MODELISATION DU PRIX D'UNE OPTION EUROPEENNE PAR LA FONCTION DE DENSITE DES RENDEMENTS A TERME

ROSENBLATT Simon
Membre de l'IAF
Responsable des Marchés de Capitaux
Caisse d'Epargne Ile de France Paris
19, rue du Louvre
75001 Paris
France
tel : 40.41.36.73
fax : 40.41.34.73.

YAHYA Ould Amar
Chargé de mission
Commission des Opérations de Bourse
39/43, quai André Citroën
75015 Paris Cédex
France
tel : 40.58.68.14.
fax : 40.58.68.00.

Résumé

Les volatilités implicites sur les calls et les puts "en dehors de la monnaie" calculées par le modèle de Black & Sholes peuvent s'avérer sensiblement différentes dans certains cas, selon les anticipations du marché.
Ces résultats aberrants, contradictoires avec les hypothèses mêmes du modèle, proviennent de phénomènes de marché que la formule ne prend pas en compte.
Nous proposons un modèle d'évaluation du prix des options fondé sur un modèle de densité des rendements à terme qui tienne compte des diverses anticipations. En plus du paramètre σ habituel qui indique la volatilité anticipée, nous introduisons un paramètre α qui mesure le sens du marché.
Lorsque α est positif, la densité des rendements à terme indique une tendance à la hausse et inversement lorsque α est négatif.
Si $\alpha = 0$, on retrouve la densité de la loi normale et la formule de Black & Sholes.
L'illustration en est donnée au travers d'un exemple tiré d'un cas réel.
Le modèle proposé, tout en rendant mieux compte des phénomènes de marché, permet de réaliser des arbitrages en cas d'anomalies prononcées.

ROSENBLATT Simon
Membre de l'IAF
Responsable des Marchés de Capitaux
Caisse d'Epargne Ile de France Paris
19, rue du Louvre
75001 Paris
France

tel : 40.41.36.73
fax : 40.41.34.73.

YAHYA Ould Amar
Chargé de mission
Commission des Opérations
de Bourse
39/43, quai André Citroën
75015 Paris Cédex
France

tel : 40.58.68.14.
fax : 40.58.68.00.

MODELISATION OF A EUROPEAN OPTION PRICE THROUGH THE FUNCTION OF DENSITY OF YIELDS TO MATURITY

Summary

Implicite volatilities on "out of the money" call and put options as calculated by Black and Sholes may appear noticeably different in certain cases depending on the market expectations.
These aberrent results, contradictory even with the hypoteses of the model, are the result of market phenomena which the formula does not account for. We present a model of evaluation of option prices based on the density model of yields to maturity that allow for various anticipations.
As well as the usual parameter σ that measures the anticipated volatility, we introduce one, α, that measures the direction of the market :
when $\alpha > 0$, the density of the yields to maturity shows a rising trend and vice versa, a fall trend when $\alpha < 0$.
When $\alpha = 0$, we find the normal distribution and therefore, Black and Sholes' formula.
This is shown by an example drawn from a real case.
The proposed model, while taking into account market phenomena, allows for the realisation of arbitrages in the case of pronounced anomalies.

I. LES LIMITES DU MODELE DE BLACK & SHOLES

I. 1. Une constatation de marché

Le modèle de Black & Sholes permet à tout instant d'évaluer le cours d'une option en fonction de la volatilité anticipée du cours du sous-jacent jusqu'à l'échéance de l'option. La formule peut s'exprimer ainsi : call = f(σ) avec σ = volatilité implicite du sous-jacent.
Inversement, elle permet de déduire, à partir du cours traité d'une option, la volatilité implicite.
Ce modèle, d'un maniement facile, est utilisé couramment sur les marchés pour spéculer sur les évolutions de la volatilité. Le domaine de validité de la formule a cependant des limites, en dehors desquelles apparaissent des incohérences entre les résultats obtenus et les hypothèses sous-jacentes au modèle. La volatilité ne dépend que de l'évolution du sous-jacent (écart-type des rendements instantanés). Cela suppose qu'elle est la même quel que soit le prix d'exercice considéré. Pourtant, le calcul donne des valeurs de la volatilité sensiblement différentes, pour des puts et des calls de prix d'exercice distincts.
Par exemple, si le marché a peur d'une forte baisse, la volatilité implicite des puts est supérieure à celle des calls. En d'autres termes, les puts se trouvent surévalués, au regard du modèle, par rapport aux calls. Inversement, dans un marché haussier, la volatilité implicite des calls "en dehors" est plus élevée que sur les puts en dehors.
En règle générale, les puts en dehors sont souvent "surévalués", (au regard du modèle), par rapport aux calls en dehors, du fait des positions prises par les gérants de portefeuilles pour couvrir ces portefeuilles contre une forte baisse ou encore, pour capturer des plus-values en finançant des achats de puts par des ventes de calls. En période de hausse, la différence est moins marquée car il est plus rare de voir des achats de calls financés par des ventes de puts, même si les calls peuvent être momentanément surévalués par rapport aux puts.
Les distorsions observées proviennent à notre avis de la complexité des

mécanismes qui soutendent les anticipations et dont l'utilisation du seul paramètre σ ne peut suffire à rendre compte.

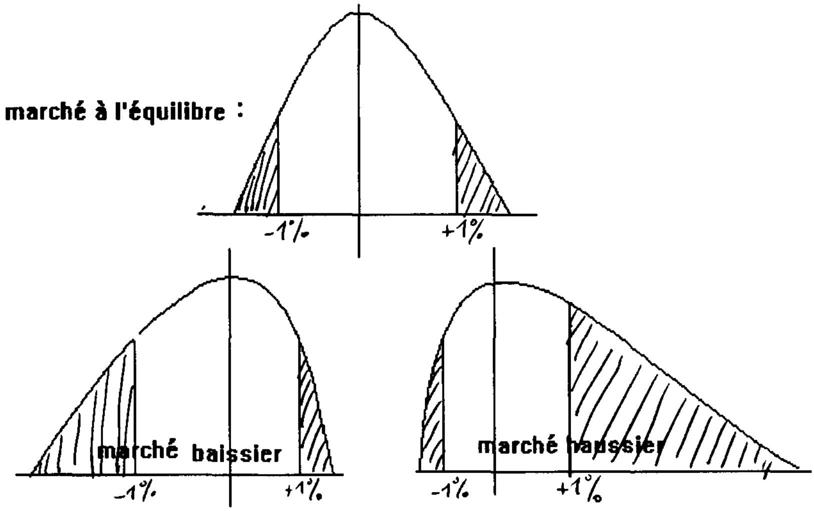
I.2. Le modèle de diffusion des prix

Le modèle de diffusion des prix suppose une évolution du type mouvement brownien :

$$\frac{dPt}{Pt} = \mu dt + \sigma dWt$$

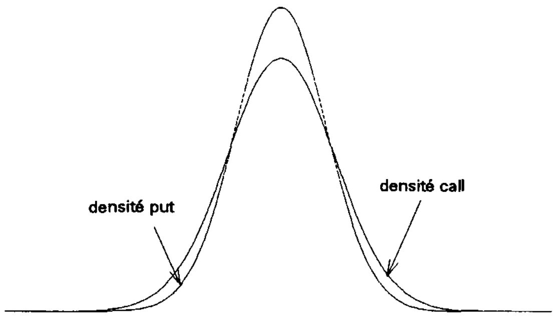
Ainsi, les rendements instantanés ($\frac{dP_t}{P_t}$) sont supposés "normaux" par rapport à un trend : hormis le trend, les probabilités de hausse et de baisse pendant l'instant dt sont les mêmes.
Statistiquement, les tests sur l'efficience des marchés montrent bien que les rendements des actions sur de longues périodes suivent une marche aléatoire, ce qui équivaut à un mouvement brownien en considérant l'évolution des rendements instantanés.
Paradoxalement, si cette approche constitue une bonne analyse du passé, elle rend compte imparfaitement de notre perception du futur, c'est à dire des anticipations. *Le prix d'un call à un instant donné indique l'anticipation du marché sur la probabilité de dépassement du prix d'exercice jusqu'à l'échéance de l'option. Or, a priori, cette anticipation n'a aucune raison de refléter une distribution "normale" des rendements à court terme. En effet, en période de hausse ou de baisse, la densité de probabilité anticipée n'est pas symétrique.*

On peut représenter la distribution de la densité des rendements à court terme par les schémas suivants :

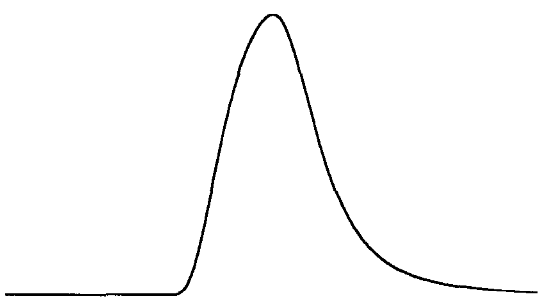


Dans l'exemple ci-dessus, les courbes permettent de lire directement la probabilité (représentée par la surface hachurée) d'une hausse et d'une baisse du marché supérieures à 1 %.
Les trois schémas reflètent les différentes anticipations du marché. Le modèle de Black & Sholes, au contraire, reflète uniquement les anticipations sur la volatilité des cours, sans tenir compte du sens des évolutions probables du marché.
Dans Black & Sholes, le fait d'utiliser un mouvement brownien impose une forme de la densité sur les rendements instantanés symétrique, du type de la courbe "marché à l'équilibre". Les hausses et les baisses ne sont pas prises en compte. Dans ces conditions, le seul paramètre permettant d'ajuster la densité aux anticipations de marché est la volatilité.

Or, ainsi que nous l'avons vu plus haut, le calul des volatilités implicites donne des valeurs différentes de σ, autrement dit, des densités de rendement différentes pour les calls et les puts.
Exemple :
Le marché est "bullish" (la volatilité implicite des calls "en dehors" est supérieure à celle sur les puts "en dehors").
Les densités de rendement déduites respectivement du prix des calls et du prix des puts donnent les deux courbes suivantes :



La "vraie" densité est unique. Elle doit pouvoir traduire l'état des anticipations du marché, quelles que soient ces anticipations. Intuitivement, on peut l'imaginer comme une moyenne des deux courbes précédentes, soit une courbe du type :



II LE MODELE DE BLACK & SHOLES : UN CAS PARTICULIER DE DENSITE DES RENDEMENTS A TERME

La formule de Black & Sholes a été élaborée par analogie au phénomène de diffusion de la chaleur.
Elle résulte en fait de l'hypothèse sur la forme du processus de diffusion des rendements instantanés décrit ci-dessus et d'un raisonnement d'arbitrage pendant l'instant dt. Elle peut être retrouvée par un raisonnement direct en utilisant la densité de probabilité des rendements à terme ($\log P_t/P_0$). La démonstration en a déjà été faite ailleurs mais il est intéressant, pour la suite de notre raisonnement, de la reprendre ici.

Sans tenir compte de la notion d'arbitrage instantané, d'ailleurs irréalisable effectivement, nous calculons le prix d'un call (ou d'un put) par l'espérance mathématique actualisée au taux de marché de la valeur intrinsèque, égale au prix de l'option à l'échéance.

$$Call = e^{-rt} E[\max(P_t - S; 0)]$$

E = symbole de l'espérance mathématique
P_0 = cours du sous-jacent aujourd'hui
P_t= cours du sous-jacent à l'échéance (variable aléatoire)
S = prix d'exercice
r = taux d'actualisation
t = temps restant à écouler jusqu'à l'échéance

Pour calculer cette espérance, nous faisons l'hypothèse que le rendement à terme ($\log P_t/P_0$) suit une loi normale de moyenne $m=(r-1/2\sigma^2)t$ et de variance $\sigma^2 t$. La moyenne m est égale à $- 1/2\sigma^2 t$ pour des contrats futurs car dans ce cas, le coût de portage est nul.

En fait cette hypothèse découle directement de l'hypothèse de diffusion (c'est un résultat de la théorie des processus stochastiques).

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

avec μ = r.

Soulignons que le fait de remplacer dans l'équation de diffusion le μ quelconque par le taux sans risque r revient à dire que le rendement de n'importe quelle action est égal en moyenne au taux sans risque. Cela correspond à l'hypothèse d'arbitrage d'un portefeuille contenant des titres et des options dans la théorie de Black & Sholes. La théorie de l'APT (arbitrage pricing theorie) suppose aussi un modèle d'évolution des rendements de ce type.

Démonstration de Black & Sholes

$$Call = e^{-rt} E\left[\max(P_t - S; 0)\right]$$

$$= e^{-rt} \int_{x-s\geq 0} (x-s) f(x) dx$$

avec $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2 t}\left[\log(x / P_0) - m\right]^2\right]$

car on suppose : $\log(P_t / P_0) \approx N(m, \sigma^2 t)$

donc

$$\text{Call} = P_0 e^{(-rt+m+\frac{1}{2}\sigma^2 t)} N(d_1) - e^{-rt} S N(d_2)$$

avec $d_1 = \frac{\log(P_0/S) + m + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$

$d_2 = \frac{\log(P_0/S) + m}{\sigma\sqrt{t}}$

cas particulier $m = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t$

On retrouve la formule de B&S.

Notre démarche consistera à construire une formule suivant le même procédé, mais en utilisant une forme appropriée de la densité des rendements à terme ($\log P_t/P_0$).

Notre premier objectif est donc de trouver une forme de densité qui tienne compte d'un paramètre "α" de dissymétrie susceptible de donner une indication sur le sens du marché.

III UNE PROPOSITION DE MODELE D'EVALUATION

III.1. La densité α-normale des rendements à terme.

Il s'agit de prendre comme forme de densité une fonction, exprimée en fonction d'un paramètre α, qui donne un tassement à gauche ou à droite suivant que α est positif ou négatif. Nous proposons la fonction suivante :

$$f(x;\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}k(\alpha)} \exp\left(-\left|\frac{x}{\sqrt{2}}\right|^{1+\exp\left(-\alpha\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} \right)$$

$$\text{avec } k(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|x|^{1+\exp(-\alpha x)})dx$$

On a ainsi : $f(-x;-\alpha) = f(x;\alpha)$

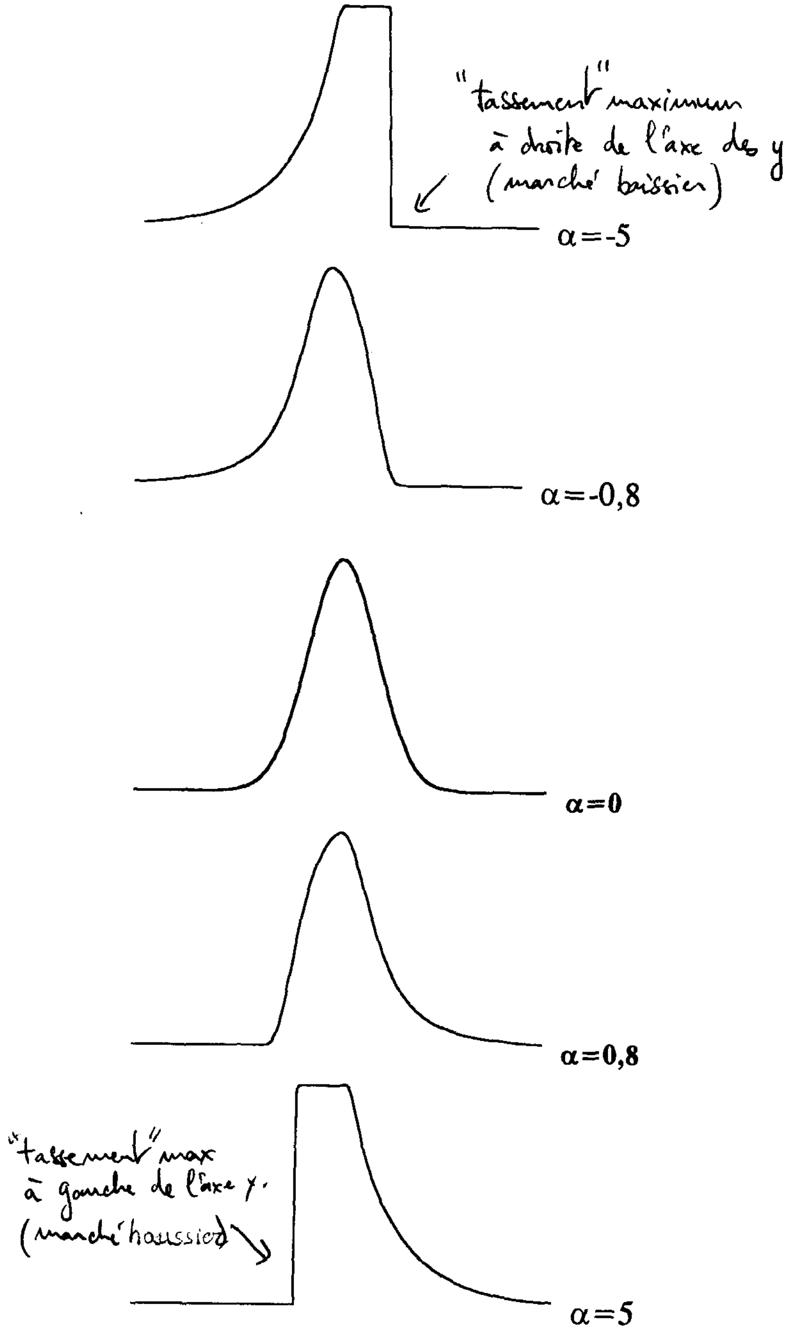
Remarque : $k(0) = \sqrt{\pi}$; $k(-\infty) = k(+\infty) = 2$

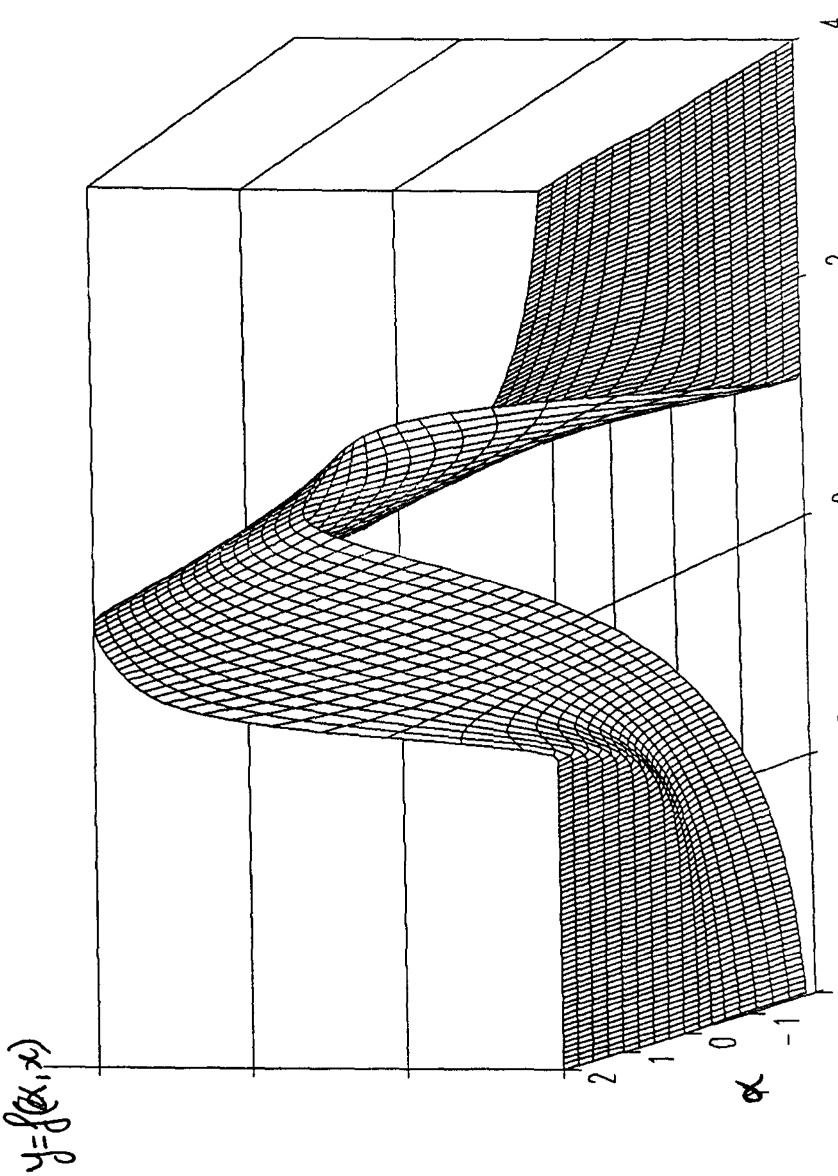
Si $\alpha = 0$, on retrouve la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1 comme fonction de densité f(x,0) : les surfaces à gauche et à droite de zéro sont symétriques et égales à 1/2.

Lorsque $\alpha \to +\infty$, la partie de la courbe située à gauche de l'axe des y forme un rectangle de hauteur $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et de coté $\sqrt{2}$ (surface à gauche =1/2). On dira, pour la suite de l'exposé, qu'on obtient un "tassement" maximum à gauche .
A droite, on obtient le "tassement" minimum avec la fonction exp(-x) (surface à droite =1/2)

Pour des valeurs de α intermédiaires entre 0 et $+\infty$, on obtient des courbes de plus en plus dissymétriques au fur et à mesure que le paramètre α croît. Les surfaces de ces courbes à gauche et à droite ne sont pas forcément égales à 1/2, mais tendent vers cette valeur quand α tend vers l'infini.
Bien sûr, pour $\alpha \leq 0$, on observe le phénomène symétrique car $f(-x,-\alpha) = f(x,\alpha)$

Quand α varie de $-\infty$ à $+\infty$, la partie gauche de la courbe se ramasse vers l'axe des ordonnées et la partie droite s'en éloigne.





Formes de la densite des rendements a Terme

Quand α est négatif, la courbe se "tasse" à droite de l'axe des y. Pour un $x_0 > 0$ donné, la probabilité pour que $x < -x_0$ est supérieure à la probabilité pour que $x > x_0$: en d'autres termes, le marché est bearish. Inversement, quand α est positif, la courbe se "tasse" à gauche de l'axe des y. La probabilité pour que $x < -x_0$ est inférieure à la probabilité pour que $x > x_0$: autrement dit, le marché est bullish.

La fonction ainsi proposée possède bien les propriétés nécessaires pour refléter le comportement du marché.

III.2. L'expression de la valeur du prix des options en fonction de la densité $f(y,\alpha)$ des rendements à terme

Notre approche est un prolongement de la formule de Black & Sholes pour notre fonction de densité $f(y,\alpha)$, baptisée α-normale.
Nous supposons, comme dans la démonstration de la formule de Black & Sholes vue ci-dessus, que le rendement logarithmique à terme, $\log P_t/P_0 \cong (P_t-P_0)/P_0$, une fois centré et réduit, suit une loi ayant pour densité $f(y,\alpha)$, au lieu de la loi normale usuelle. La traduction en termes mathématiques donne :

$$y = \frac{\log(P_t / P_0) - m}{\sigma\sqrt{t}} \quad \sim \text{une loi de densité } f(y,\alpha).$$

$$Call = e^{-rt} E\left[\max(P_t - S;0)\right]$$
$$= e^{-rt} \int_{x-S\geq 0} (x-S) f(y,\alpha) dy$$

la variable x représente le cours à terme : P_t

$$\text{donc, } y = \frac{\log(x / P_0) - m}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$\text{et} \qquad x = P_0 \exp(y\sigma\sqrt{t} + m)$$

En remplaçant x en fonction de y, on obtient les formules du call et du put.

$$\mathbf{call} = e^{-rt}\int_{y \geq \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}(\log(S/P_0)-m)} (P_0 \exp(y\sigma\sqrt{t}+m)-S) f(y,\alpha) dy$$

$$\mathbf{put} = e^{-rt}\int_{y \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}(\log(S/P_0)-m)} (S-P_0 \exp(y\sigma\sqrt{t}+m)) f(y,\alpha) dy$$

Nous n'avons pas trouvé une forme explicite de primitive ! Toutefois, le calcul numérique est assez simple à implémenter sur un tableur.

L' exemple de calcul qui suit a été fait pour des options sur futur. Dans ce cas, $m=-1/2\ \sigma^2 t$ est très proche de zéro pour des options à court terme. La moyenne m correspond au drift dans l'équation de diffusion des rendements instantanés. Nous aurions pu la prendre égale à zéro puisque, a priori, le rendement moyen à terme d'un contrat futur est nul. Cela dit, nous l'avons tout de même laissée égale à $-1/2\ \sigma^2 t$ dans l'expression générale pour faire coïncider nos formules avec celles de Black & Sholes lorsque $\alpha = 0$.

III.3. Un cas réel

Le 27 septembre 1993 était un jour "bearish" pour le MATIF notionnel à cause des événements en Russie.

En effet, les cotations suivantes ont été observées au même moment :
- put 121 dec/93 : 0,18
- call 126 dec/93 : 0,14
- MATIF NNN : 122,56

Les volatilités implicites, déduites du modèle de B&S étaient de 4,94% pour les puts et de 4,32% pour les calls.

Les estimations des paramètres α et σ déduites de notre modèle sont respectivement de -0,12 et 4,60%.

Nous constatons que la volatilité implicite de notre modèle est pratiquement la moyenne des volatilités déduites de B&S, avec une déformation α négative, qui indique le caractère baissier du marché ou du moins une forte aversion au risque.

Le gestionnaire poura alors spéculer sur un retour à la normale de α vers zéro, en plus de ses anticipations sur le niveau de la volatilité σ.

IV L'UTILISATION DU PARAMETRE α DANS UNE OPTIQUE D'ARBITRAGE

Les périodes où le paramètre α est sensiblement positif ou négatif ne durent en général pas longtemps. Après une forte anticipation de baisse ou de hausse du marché, celui-ci revient assez rapidement à l'équilibre et, même s'il y a un changement de volatilité, α revient naturellement vers zéro en quelques jours.
Comment alors profiter de cette opportunité de retour de α vers zéro tout en s'immunisant contre une variation du sous-jacent et contre une variation du niveau général de la volatilité σ ?
Dans le cas où α est positif, un retour probable de α vers zéro entraînera une baisse du call et une hausse du put, toutes choses égales par ailleurs. Il faut donc vendre des calls, acheter des puts et des contrats, de façon à s'immuniser à la fois contre une variation du sous-jacent (gestion en delta neutre) et contre une variation de la volatilité σ (gestion en véga neutre).
Le portefeuille sera constitué par la vente de n_1 calls, l'achat de n_2 puts et n_3 contrats.
Encaissement ou décaissement initial :
$I = + n_1 C - n_2 P$ avec C = prix du call et P = prix du put

Le prix S du contrat futur est proche de 0 car les frais de transaction sont très faibles.

a) gestion en delta neutre :

$n_1\ \partial C/\partial S - n_2\ \partial P/\partial S - n_3 = 0$

b) gestion en véga neutre

$n_1\ \partial C/\partial\sigma - n_2\ \partial P/\partial\sigma = 0$

Pour un call vendu ($n_1 = 1$), on trouve la proportion de puts à acheter (n_2) et de contrats à acheter (n_3) tels que :

$n_2 = \partial C/\partial\sigma\ /\ \partial P/\partial\sigma$

et $n_3 = \partial C/\partial S - (\partial C/\partial\sigma\ /\ \partial P/\partial\sigma) \times \partial P/\partial S$

Si α revient vers zéro :

$P(0) > P(\alpha)$

et $C(0) < C(\alpha)$

Le gain final de l'opération est égal à :

$$G = n_2\,\underbrace{[P(0) - P(\alpha)]}_{>\,0} + n_1\,\underbrace{[C(\alpha) - C(0)]}_{>\,0}$$