VALUATION OF THE ROLLOVER OPTION OF LIFE INSURANCE POLICIES IN THE HEATH JARROW-MORTON FRAMEWORK

Hélyette GEMAN*
Martine VAREILLES**

* University of Reims and ESSEC, Finance Department
** Assurances Générales de France, Direction des Produits Vie

Send correspondence to Hélyette GEMAN, Finance Department, ESSEC, Avenue B. Hirsch, BP 105, 95021 CERGY-PONTOISE Cedex, FRANCE - Tel : 33.1.34.43.30.28 - Fax : 33.1.34.43.30.01.

SUMMARY

The uncertainty on pay-as-you-go retirement schemes has recently entailed a shift of savings towards life insurance policies (e.g., these instruments account in France today for more than half of the national savings). At the same time, volatile interest rates, disintermediation and competition from banks and financial institutions have forced life insurers to promise and guarantee higher yields and hence to assume more interest rate risk. Some insurers offer a fidelity bonus which is paid at expiration of a policy which has not been surrendered early - this has been the case in France for some time -. Many insurers offer their clients the option of rolling over their contract with the same return as the one which was guaranteed at the inception of the policy. This can be the case both for US guaranted-insurance contracts or for French life insurance policies which can be reconducted year by year during the lifetime of the policyholder.

This paper addresses the valuation of these options in the case of single premium policies when the assets portfolio consists of zero-coupon bonds and the dynamics of stochastic interest rates are driven by the Heath-Jarrow-Morton model. Both a closed-form solution and numerical simulations will be provided.

KEY WORDS

Rollover option, arbitrage pricing, forward-neutral probability measure, Margrabe's formula under stochastic interest rates

Evaluation de l'option de renouvellement des polices d'assurance vie par le modèle Heath Jarrow-Morton

Hélyette GEMAN *
Martine VAREILLES **

* Université de Reims et ESSEC, Section Finances
** Assurances Génerales de France, Direction des Produits Vie

Prière de faire parvenir la correspondance à :
Hélyette GEMAN, Section Finances, ESSEC, Avenue B. Hirsch, BP 105, 95021 CERGY-PONTOISE Cedex, FRANCE - Tel : 33.1.34.43.30.28 - Télécopie : 33.1.34.43.30.01

Résumé

L'incertitude des régimes de retraite par répartition pure a récemment produit une réorientation de l'épargne au profit des polices d'assurances (ces instruments représentent actuellement en France plus de la moitié de l'épargne nationale). Simultanément, la volatilité des taux d'intérêt, la désintermédiation et la concurrence des banques et des institutions financières ont obligé les sociétés d'assurance vie à promettre et à garantir des rendements plus élevés et donc à assumer des risques de taux d'intérêt plus grand. Certains assureurs offrent une prime de fidélité qui est attribuée à l'échéance des polices qui n'ont pas été rachetées par anticipation (la pratique est établie en France depuis un certain temps). De nombreux assureurs offrent à leurs clients la possibilité de renouveler leur police avec le même taux de rendement qui leur avait été garanti à l'ouverture de la police. Il peut s'agir ici à la fois des contrats d'assurance garantis américains ou des polices d'assurance vie françaises qui peuvent être reconduits année après année pendant toute la vie du titulaire de la police.

Le présent article examine l'évaluation de ces options dans les cas de polices d'assurance à prime unique où le portefeuille est constitué d'obligations à coupon zéro et où l'évolution des taux d'intérêt est déterminée par le modèle Heath-Jarrow-Morton. Il propose une solution de type fermé ainsi que des simulations numériques.

Mots clés

Option de renouvellement, évaluation avec arbitrage, mesure de probabilité neutre, formule de Margrabe avec taux d'intérêt stochastiques.

INTRODUCTION

Depuis la fin des années 1970, l'assurance vie française a connu de nombreuses évolutions dans les produits vendus. Les produits d'épargne pure (produits financiers vendus dans le cadre juridique de l'assurance vie) ont progressivement pris la place des produits à aléas viagers (produits faisant intervenir un taux d'intérêt technique et une table de mortalité). Cette mutation s'est accompagnée d'une plus grande transparence des produits offerts. En particulier, les taux de frais prélevés aux clients sont clairement indiqués.

Par ailleurs, la presse "grand public" commente le fonctionnement des produits d'épargne - retraite et établit de nombreuses comparaisons tant en terme de frais prélevés, de souplesse (retraits et/ou avances avec ou sans pénalité), de rémunération de l'épargne, de taux de produits financiers distribués par l'assureur, de ratio de frais généraux sur chiffres d'affaires de la compagnie.

Ces comparaisons se font aussi bien entre compagnies d'assurance qu'avec les banques et institutions financières qui offrent des produits similaires.

L'information du consommateur étant plus grande, il devient plus vigilant dans ses choix et est susceptible de tirer parti de toutes les options cachées que proposent les contrats.

Donc, de plus en plus, l'assureur devra faire face à des clients dont les choix seront rationnels.

I - DESCRIPTION DES PRODUITS D'EPARGNE-RETRAITE ÉTUDIES

Les produits d'épargne retraite que nous allons étudier présentent les caractéristiques suivantes :

- Versements :
  Le client peut verser à tout moment, le montant qu'il désire en respectant un minimum fixé par l'assureur.

- Frais d'entrée ou frais sur les versements :
  L'assureur prélève sur chaque versement des frais d'entrée qui sont de l'ordre de 5 % (moyenne du marché).

- Souplesse :
  Le client peut retirer son épargne, en totalité ou en partie, à tout moment.

- Frais sur épargne gérée :

  Chaque année, l'assureur prélève sur le compte de l'assuré des frais sur épargne gérée qui varie entre 0,5 et 1 % en moyenne, ce qui revient à ne verser au client qu'une fraction du rendement sur le portefeuille d'actifs correspondant.

- Gestion Financière :

  . Ces contrats sont le plus souvent exprimés en francs.

  . L'assureur garantie une rémunération minimale de l'épargne de 4,5 % l'an et ceci quelque soit la durée de vie du contrat.

  . Chaque année, l'assureur attribue aux contrats une partie des produits financiers réalisés (coupons et dividendes encaissés). C'est la revalorisation définitive de l'épargne, souvent appelée, participation aux bénéfices.

- Durée des contrats :

  La durée est le plus souvent de 8 ans. En effet, la réglementation fiscale en vigueur, est telle que les plus-values réalisées sont exonérées d'impôt si le contrat a duré plus de 8 ans.

- Possibilité offerte au terme du contrat :

  Dans un souci de fidélisation de sa clientèle, l'assureur propose :

  . de recevoir l'épargne constituée sous forme de rentes viagères,

  . de recevoir l'épargne constituée sous forme de retraits programmés pendant une durée déterminée,

  . de proroger le contrat aux conditions énoncées dans le contrat (roll-over).

  Cette prorogation est de un an et peut être reconduite pendant toute la vie de l'assuré si celui-ci le désire.
  Cette prorogation ne peut avoir lieu que dans les conditions de taux spécifiées dans le contrat initial, c'est-à-dire en garantissant un taux de revalorisation de 4,5 % l'an au moins.

- Prime de fidélité :

  Depuis peu (début 1993), certains produits offrent des "primes de fidélité" qui correspondent au remboursement des frais prélevés sur les versements si le client n'a pas effectué de retrait pendant toute la durée de son contrat.

Nous allons nous intéresser à l'évaluation de l'option de prorogation en considérant des produits :

- à versement unique (le client ne verse qu'une seule fois à la souscription). On supposera un versement net de frais d'entrée de 1 F effectué par un client d'âge x.
- de durée T_0-t_0, renouvelable par années successives autant de fois que le client le souhaite.
- où le pourcentage de produits financiers distribués par l'assureur est une constante positive λ comprise entre 0 et 1.

De façon plus précise, le rendement effectivement payé à l'assuré s'écrit $\lambda R(t_0,T_0-t_0)$ (en supposant l'actif correspondant investi dans un zéro - coupon de maturité T_0 et de rendement $R(t_0,T_0-t_0)$).

II - ÉVALUATION DE L'OPTION

Notations utilisées

t_0	:	date de souscription du contrat initial
x	:	âge du client à la souscription du contrat, donc en t_0
T_0	:	date de terme du contrat initial
p	:	probabilité pour que le contrat soit racheté ou sinistré dans l'intervalle $[t_0, T_0]$ qui représente la durée normale du contrat initial
q_j	:	probabilité pour que l'option de roll-over soit exercée sur la période $[T_0 + j, T_0 + j + 1]$ sachant que le contrat était encore en vie à l'instant $T_0 + j$
A	:	espérance de vie à l'âge $x + T_0$
K_{T_0+j}	:	capital reçu par le client en $T_0 + j$, si le contrat prend fin en $T_0 + j$
C_S	:	coût, exprimé en francs de l'instant t_0, de l'option de rachat exerçable sur la période $[t_0, T_0]$
C_j	:	coût, exprimé en francs de l'instant t0, de l'option de roll-over sur la période $[T_0 + j, T_0 + j + 1]$

Le coût de l'option de rachat C_S sur la période $[t_0, T_0]$ a été déterminé par Albizzati-Geman (AFFI Conférence - juin 1993). Nous allons évaluer le coût pour l'assureur de l''option de roll-over dans le cadre des contrats d'assurance vie proposés en France.

En T_0, au terme du contrat, l'assuré pourra terminer son contrat et recevoir immédiatementle montant K_{T_0}. Il pourra aussi choisir de proroger son contrat d'un an, jusqu'en $T_0 + 1$ et ainsi d'être rémunéré aux meilleures conditions de taux entre :

- celles qui prévalent alors sur le marché $\tilde{R}(T_0,1)$

et

- celles qui lui ont été consenties à la souscription du contrat en t_0, à savoir $R(t_0, T_0 - t_0)$.

Comme nous supposons le client rationnel, il choisira de proroger son contrat jusqu'en $T_0 + 1$ si et seulement si $R(t_0,T_0-t_0) \geq R(T_0,1)$

Donc la prorogation lui permet d'obtenir en $T_0 + 1$

$$K_{T_0+1} = \sup\left[K_{T_0} e^{\lambda R(t_0,T_0-t_0)}, K_{T_0}{}^{\lambda R(T_0,1)}\right] = K_{T_0} e^{\lambda R(t_0,T_0-t_0)}$$

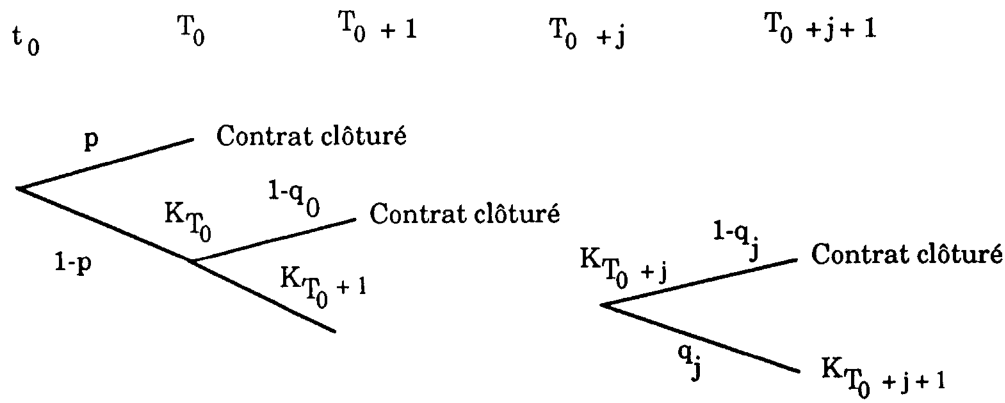
De manière plus générale, en $T_0 + j$, si le contrat existe encore à cette date, le client a deux possibilités :

- mettre fin à son contrat et recevoir immédiatement $K_{T_0+j} = K_{T_0} e^{\lambda j R(t_0,T_0-t_0)}$
- proroger son contrat d'un an et avoir la possibilité de recevoir en $T_0 + j + 1$,

$$K_{T_0+j+1} = \left[K_{T_0+j} e^{\lambda R(T_0+j,1)}\right]$$

Entre T_0 et $T_0 + A$, le client peut chaque année exercer son option de roll-over.

Représentons sur un arbre ces choix successifs qui se posent à l'assuré :



où q_j est la probabilité que le contrat soit reconduit un an sur la période $[T_0 + j, T_0 + j + 1[$ sachant qu'il existait en $T_0 + j$.

q_j est une fonction du critère rationnel représenté par q'_j où q'_j est une probabilité de l'évènement

$$\left\{R(t_0, T_0 - t_0) \geq \tilde{R}(T_0 + j, 1)\right\}$$

Par ailleurs, q_j doit aussi intégrer des considérations telles que décès, sorties "irrationnelles" motivées par des situations personnelles de l'assuré (déménagement, divorce, etc.)

Nous représentons q_j comme une fonction déterministe de q'_j de la forme

$$q_j = \sup\left(0, q'_j - \alpha - {}_1 q_{x+T_0+j-1}\right)$$

où, selon les notations actuarielles classiques,

- ${}_1 q_{x+T_0+j-1}$ représente la probabilité de décès sur la période $]T_0 + j - 1, T_0 + j]$ pour les clients âgés de x à la souscription.
- α est une fonction de j et de x dépendant aussi du marketing du produit sur laquelle nous ferons des hypothèses simplificatrices.

Ayant mis en évidence les différents éléments qui interviennent dans la probabilité q'_j, nous l'écrirons sous la forme simplifiée :

$$q_j = \beta_j q'_j$$

où β_j est un coefficient compris entre 0 et 1.

Pour l'assureur, la probabilité qu'un contrat non racheté prématurément (donc existant en T_0) existe encore en $T_0 + j$ est $\prod_{\ell=0}^{j-1} q_\ell$

Le coût pour l'assureur de l'option de roll-over en $T_0 + j$, exprimé en francs de t_0 sera noté C_j.

Le coût total du "panier" d'options de prorogations successives s'écrit

$$(1-p) \sum_{j=0}^{A-1} C_j$$

Donc, le montant que l'assureur doit provisionner (ou faire supporter au client) à cause de l'existence simultanée des options de rachat et de roll-over est égal à

$$pC_s + (1-p) \sum_{j=0}^{A-1} C_j$$

Dans le but d'obtenir une formule explicite simple, nous allons nous intéresser d'abord à l'évaluation de l'option C_0 relative à l'intervalle $[T_0, T_0 + 1[$.

Notons que la méthodologie ci-dessous développée s'applique identiquement à l'évaluation de l'option d'un roll-over unique et global tel qu'il est proposé dans les Guaranteed Insurance Contrats (GIC) américains ou dans les Registered Retirement Saving Plan (RRSP) canadiens.

Nous désignons par $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace probabilité représentant l'incertitude de l'économie, par $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration représentant l'information disponible à la date t. Selon les articles fondamentaux de Harrison-Kreps (1979) et Harrison-Pliska (1982), nous désignons par Q la probabilité risque neutre, équivalente à P et sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales (dont l'existence est assurée par l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage).

Nous avons besoin pour valoriser l'option C_0 de modéliser les mouvements des taux d'intérêt. Nous supposerons la dynamique de la structure par termes des taux dirigée par le modèle de Heath-Jarrow-Morton :

Le mouvement des zéro-coupons (B(t,T) est défini sous Q par l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r(t)dt + \sigma(t,T)dW_t$$

où

- $B(t,T)$ désigne le prix en t d'un zéro coupon payant 1 franc en T
- $r(t)$ désigne le taux court terme
- $W(t)$ est un Q-mouvement brownien

et on supposera pour simplifier une structure par termes de volatilités déterministes et de la forme

$$\sigma(t,T)=\sigma\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$$

où a et σ sont des constantes positives.

Nous aurons besoin dans ce qui suit de la relation fondamentale reliant le prix B(t, T) en du zéro-coupon de maturité T au taux zéro-coupon prévalant en t pour le terme T-t et noté R(t,T-t), à savoir $B(t,T)=e^{-(T-t)R(t,T-t)}$, ainsi que la valorisation par arbitrage du prix du zéro-coupon à l'instant t, à savoir

$$B(t,T)=E_Q\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}/\mathcal{F}_t\right]$$

La valeur C_0 de l'option à l'instant t_0 est égale à la différence entre l'expérance L_1 (sous Q) actualisée de l'engagement de l'assureur en cas d'existence de l'option et la valeur actualisée L_2 de cet engagement en cas de non existence de l'option, à savoir

$$L_1=K_{T_0}E_Q\left[\left\{e^{-\int_{t_0}^{T_0+1} r(s)ds}1_{X\geq x}e^{x}+e^{-\int_{t_0}^{T_0} r(s)ds}1_{X<x}\right\}/\mathcal{F}_{t_0}\right]$$

où pour simplifier, nous noterons

$$x=e^{\lambda R(t_0,T_0-t_0)}\ \text{ et } X=e^{\lambda \tilde{R}(T_0,1)}$$

et où K_{T_0} a pu être sorti de l'espérance car non aléatoire vu de T_0.

De même

$$L_2=E_Q\left[K_{T_0}e^{-\int_{t_0}^{T_0} r(s)ds}/\mathcal{F}_{t_0}\right]$$

En sortant de la constante K_{T_0}, L_2 s'écrit immédiatement

$$L_2=K_{T_0}B(t_0,T_0)$$

Le calcul de L_1 est une somme de deux termes dont le calcul est plus compliqué car il met en jeu l'espérance d'un produit de deux grandeurs aléatoires dépendantes.

Nous utiliserons la technique du changement de probabilité forward-neutre mise en évidence par Geman (1989) et Jamshidian (1989) et qui simplifie de façon remarquable le calcul de la valeur d'un flux aléatoire tombant à un instant futur T en présence d'une actualisation faisant intervenir des taux d'intérêt stochastiques.

En introduisant la probabilité Q_T définie par sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à Q.

$$\frac{dQ_T}{dQ} = \frac{\exp\int_{t_0}^{T} r(s)ds}{B(t_0,T)}$$

Il est facile de montrer que si $\tilde{\varnothing}$ est un flux aléatoire tombant en T

$$E_Q\left[\tilde{\varnothing}e^{-\int_{t_0}^{T_0} r(s)ds} / \mathcal{F}_{t_0}\right] = B(t_0,T)E_{Q_T}\left[\tilde{\varnothing} / \mathcal{F}_{t_0}\right]$$

Ce changement de probabilité, destiné à absorber le caractère stochastique des taux d'intérêt sur l'intervalle $[t_0,T]$, a aussi le mérite de s'interpréter économiquement comme un changement de numéraire, à savoir à prendre pour nouveau numéraire le zéro-coupon de maturité T (voir Geman 1989).

Le calcul de L_1 met en fait en jeu deux probabilités forward neutre distinctes, à savoir

$$\begin{aligned} E_Q\left[e^{-\int_{t_0}^{T_0+1} r(s)ds} e^x 1_{X<x} / \mathcal{F}_{t_0}\right] &= e^x B(t_0,T_{0+1})E_{Q_{T_0+1}}\left[1_{(X<x)} / \mathcal{F}_{t_0}\right] \\ &= e^x B(t_0,T_{0+1})Q_{T_0+1}(X \geq x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_Q\left[e^{-\int_{t_0}^{T_0} r(s)ds} 1_{X\geq x} / \mathcal{F}_{t_0}\right] &= B(t_0,T_{0+1})E_{Q_{T_0}}\left[1_{(X\geq x)} / \mathcal{F}_{t_0}\right] \\ &= B(t_0,T_0)Q_{T_0}(X < x) \end{aligned}$$

soit

$$L_1 = K_{T_0}\left\{B(t_0,T_0+1)e^x Q_{T_0+1}(X \geq x) + B(t_0,T_0)Q_{T_0}(X < x)\right\}$$

$$L_1 - L_2 = K_{T_0}B(t_0,T_0+1)e^x Q_{T_0+1}(X \geq x) + K_{T_0}B(t_0,T_0)\left[Q_{T_0}(X < x) - 1\right]$$

et on arrive ainsi pour la valeur C_0 de l'option de rollover à l'instant t_0 à l'expression remarquable

$$C_0 = K_{T_0}\left\{B(t_0,T_0+1)e^{R(t_0,T_0-t_0)}Q_{T_0+1}(X \geq x) - B(t_0,T_0)Q_{T_0}(X \geq x)\right\}$$

Notons qu'en ayant supposé un exercice purement rationnel de l'option, c'est-à-dire $\beta_0 = 1$, nous avons montré que pour un franc de capital accumulé en T_0, (c'est-à-dire $K_{T_0} = 1$) mais en ayant pris en compte l'existence des frais de gestion au travers du coefficient λ compris entre 0 et 1, nous arrivons à une formule qui ressemble à celle de Margrabe étendue à des taux d'intérêt stochastiques (voir Geman-El Karoui-Rochet 1991), ce qui correspond bien à la similitude de l'option de rollover avec une option d'échange.

En utilisant les résultats développés par El Karoui-Geman (1991, 1993), nous allons enfin montrer que :

$$Q_{T_0+1}(X \geq x) = N(d_2)$$

et

$$Q_{T_0}(X \geq x) = N(d_1)$$

où N est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_1 et d_2 sont des grandeurs que nous allons expliciter.

BIBLIOGRAPHIE

ALBIZZATI M.O., and H. GEMAN, "Interest Rate Risk Management and Valuation of The Surrender Option in Life Insurance Policies", AFFI Conference - La Baule - June 1993

ASAY M., BOUYAOUCOS P., and A. MARCIANO (1989), "An Economic Approach to Valuation of Single Premium Deferred Annuities", Goldman Sachs

EL KAROUI N. and H. GEMAN (1991), "A Stochastic Approach to Pricing FRNs", RISK, March, Vol 4, N°3

EL KAROUI N. and H. GEMAN (1993), "A Probabilistic Approach to the Valuation of Floating Rate Notes with an Aplication to Interest Rate Swaps", Advances in Options and Futures Research (forthcoming)

GEMAN H., (1989), "The Importance of the Forward Neutral Probability Measure in a Stochastic Approach to Interest Rates", ESSEC, Working Paper

GEMAN H., EL KAROUI N. and J.C. ROCHET (1991), "Changes of Numéraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing" Preprint

HARRISON J.M. and D. KREPS (1979), "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", Journal of Economic Theory 20, 381-408

HARRISON J.M. and S. PLISKA (1981), "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", Stochastic Processes and their Applications", 11, 215-260

HEATH D., JARROW R. and A. MORTON (1992) "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates ; a New Methodology for Contingent Claims Valuation", Econometrica 60, 77-105

JAMSHIDIAN F. (1989), "An Exact Bond Pricing Formula", Journal of Finance

MARGRABE W. (1978), "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another", Journal of Finance, 33.

MERTON R.C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science 4, p. 141-183

TILLEY J.A. (1990), "A Stochastic Yield Curve Model for Asset-Liability Simulations", Proceedings of the1st AFIR International Colloquium, Paris.