ÉVALUATION DES PRODUITS DÉRIVÉS DE CRÉDIT

Fevrier 2003

Idriss Tchapda Djamen
Université Claude Bernard Lyon 1
Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA)[1].

Résumé.
Évaluation des produits dérivés de crédit. Nous proposons dans cet article une méthode analytique d'évaluation des produits dérivés de crédit. En utilisant le cadre proposé par Bielecki et Rutkowski (2001), nous prolongeons les résultats de ces auteurs en obtenant des formules fermées pour l'évaluation de produits dérivés de crédit vulnérables référencés sur un panier de signatures. Cette méthodologie s'applique également à la tarification de produits dérivés titrisés pour lesquels un défaut du vendeur est envisagé. Nous proposons aussi d'étendre les résultats de Duffie (1998), donnant le taux du swap "first-to-default", en envisageant un défaut du vendeur et de l'acheteur de la protection. Enfin, par l'introduction d'un contrat financier qualifié d'option de vente sur marge de crédit risquée, nous généralisons les résultats de Schönbucher (2000) donnant la prime d'une option de vente sur marge de crédit. En général, lorsque les flux monétaires à évaluer sont soumis à plusieurs risques de défaut, nous supposons que les dates de défaut des agents économiques concernés sont conditionnellement indépendantes sachant l'information sur les prix et les taux.
Mots clés : Dérivés de crédit vulnérables, Produits dérivés titrisés.

[1] Campus de la Doua, bât. 101, 43 bd. du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex. Tel : 04.72.43.11.75. Fax : 04.72.43.11.76. E-mail : tchapda.idriss@voila.fr

Introduction.

Les produits dérivés de crédit sont des instruments financiers qui offrent à leurs utilisateurs des moyens de gestion et de maîtrise du risque de crédit. Ils permettent, tout en conservant les titres exposés, d'isoler leur composante risque de crédit, pour la transférer vers un tiers.

Sur quelques points, ils se rapprochent des produits dérivés classiques, d'actions et de taux d'intérêt par exemple.

Premièrement, comme des marchés dérivés traditionnels d'action et de taux, le marché des dérivés de crédit permet de gérer son exposition à un risque financier, dans ce cas, le risque de crédit. Il permet de mettre en liaison investisseurs ayant pour objectif d'éliminer le risque de crédit et ceux apportant une réponse à leurs souhaits.

Deuxièmement, comme une option sur action permet une maîtrise du risque de marché du sous-jacent, le dérivé de crédit est un contrat financier qui donne à son détenteur la possibilité de se défaire du risque de crédit résultant d'un premier contrat. Certains l'ont à juste titre comparé à une sorte d'assurance sur le risque de crédit. Le vendeur de la protection est l'assureur et l'acheteur de la protection l'assuré.

Depuis quelques années le marché des dérivés de crédit se caractérise par une croissance rapide. Fin 2001, le total des encours en dérivés sur crédit s'élévait à 1581 milliards de dollars, représentant ainsi neuf fois le volume constaté quatre ans plus tôt.

De nombreux domaines d'activité y sont représentés. Les acteurs principaux sont les banques et les investisseurs institutionnels tels que les compagnies d'assurance.

Les banques, à la recherche d'outils de gestion optimale de leurs lignes de crédit, ont recours à ces produits pour réduire leur concentration en crédit dans un secteur d'activité particulier. Les dérivés de crédit leur permettent également de diversifier leurs portefeuilles de prêts. Par cette technique financière, elles peuvent continuer à prêter tout en minimisant leur exposition au risque de crédit.

Les compagnies d'assurance, pour lesquelles les risques catastrophes liés au climat ou au séisme peuvent constituer un risque de crédit, se tournent vers le marché des capitaux afin de se protéger. Les évènements tels que que l'ouragan "Andrew" en 1992 aux États-Unis ont montré que les risques catastrophes dépassaient la capacité de couverture des assureurs. En effet, à la suite de cet évènement, certains réassureurs se sont retrouvés en situation de faillite. La titrisation des risques catastrophes leur offre alors un moyen de faire supporter au marché financier des risques qui traditionnellement étaient supporté par elles.

D'autres raisons tant économiques que commerciales expliquent le développement rapide du marché des dérivés de crédit. D'un point de vue économique, il peut offrir une grande rentabilité, en raison de la possibilité d'intervention dans des domaines d'activité où le risque de crédit est très élévé. D'un point de vue commercial, les dérivés de crédit, parce qu'ils sont des instruments financiers de transfert de risque sans cession de la créance sous-jacente, permettent à leurs utilisateurs de conserver dans leurs portefeuilles des investissements présentant des perspectives de croissance réelles.

L'évaluation des produits dérivés de crédit est au centre des préoccupations des intervenants du marché et de la recherche scientifique.
Dans ce sens, les institutions financières ont développé des modèles internes permettant d'évaluer les produits dérivés de crédit. Entre autres, nous connaissons des modèles basés sur des méthodes statistiques et des modèles basés sur des méthodes de portefeuille. Dans le premier cas, nous pouvons citer par exemple des méthodes de notation ou *rating ;* la note d'une dette réflète la probabilité de défaut de son émetteur ainsi que la sévérité de perte de son détenteur. Dans le second cas, on synthétise en une valeur (*value at risk* ou VAR) le risque qu'encourt une institution financière du fait de son exposition au risque de crédit.

Très peu de travaux théoriques publiés se sont interessés à l'évaluation de produits dérivés de crédit. Les principaux modèles considèrent que la date de défaut d'un agent économique est imprévisible : une variable aléatoire à intensité.

Schönbucher (2000) s'intéresse à la tarification des produits dérivés sur le risque de défaut référencés sur un seul débiteur et des produits dérivés sur le risque de marge de crédit.
Duffie (1998), donne une méthode générale d'évaluation de produits dérivés de crédit " first-to-default", c'est à dire de contrats financiers dont l'objet est de se défaire du premier défaut d'un panier de signatures. Kijima et Muromachi (2000) s'intéressent à deux types de contrats ; le premier, qualifié de swap de type F, est un cas particulier de swap " first-to-default" ; le second, qualifié de swap de type D, protège son détenteur contre les deux premiers défaut d'un panier de débiteurs. Enfin, Bielecki et Rutkowski (2001) développent une méthode générale d'évaluation de dérivés de crédit dont l'objet est de se défaire des i premiers défauts d'un panier de signatures. Ils généralisent notamment les résultats de Duffie (1998) et de Kijima et Muromachi (2000).

L'objet de cet article est d'évaluer les dérivés de crédit dans un cadre d'intensité de défaut.
Paradoxalement, les dérivés de crédit engendrent eux-même un risque de crédit, de la part du vendeur, comme de celle de l'acheteur de la protection. Nous accordons une attention particulière à cette éventualité, nous différentiant ainsi des travaux précédents. Notre intérêt se porte sur l'évaluation de trois gammes de

produits dérivés de crédit : les produits dérivés referéncés sur le risque de défaut, les produits dérivés titrisés et les produits dérivés sur le risque de marge de crédit.

L'article est structuré de la manière suivante : dans une première section, nous rappelons les résultats de Bielecki et Rutkowski (2001) sur l'évaluation des produits dérivés titrisés *"i-th to default".* Puis dans une deuxième section, nous empruntons le cadre de ces auteurs, puis prolongeons certains de leurs résultats en envisageant un défaut du vendeur de la protection.
Dans la troisième section nous nous intéressons à l'évaluation des opérations à terme sur risque de défaut. Cette fois encore, nous empruntons le cadre de Bielecki et Rutkowski (2001). Nous considérons quelques exemples de swap de défaut référencés sur un panier de débiteurs dont un swap "first-to-default" pour lesquel nous prenons en compte l'éventualité d'un défaut du vendeur et de l'acheteur de la protection.
Enfin, la quatrième section concerne l'évaluation de produits dérivés sur marge de crédit. Nous introduisons puis évaluons un produit dérivé sur la marge de crédit, l'option de vente sur marge de crédit risquée. L'avantage de l'introduction d'un tel contrat, qui apporte les mêmes satisfactions économiques pour les investisseurs qu'une option de vente sur marge de crédit classique, est de permettre une généralisation des résultats de Schönbucher (2000).

1. Évaluation de titres (ou contrats) "i^{th}-to-default" référencés sur un panier de signatures.

Définition.
Un titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" référencé sur un panier de signatures est un instrument financier cash permettant à son détenteur de se protéger contre les $i-1$ premiers défauts des signatures du panier.

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'évaluation de ces produits dérivés titrisés. L'économie générale du modèle est identique à celle de Bielecki et Rutkowski (2001). Nous proposons de prolonger leurs résultats en envisageant un défaut du vendeur de la protection.
Dans les sections 1.1 et 1.2, nous présentons le modèle économique et les résultats de Bielecki et Rutkowski (2001) sur l'évaluation des titres ou contrats "i^{th}-to-default" référencés sur un panier de signatures.
Dans la section 1.3, nous prenons en compte l'éventualité d'un défaut du vendeur du titre (ou contrat) "i^{th}-to-default". Plusieurs situations liées à la singularité des titres (ou contrats) sont envisagées. Dans tous les cas, nous supposons qu'en

cas de défaut les règlements ont lieu à la date d'échéance.
Enfin, la section 1.4 concerne l'évaluation d'un titre (ou contrat) "first-to-default" pour lequel nous prenons en compte, une fois de plus, l'éventualité d'un défaut du vendeur. Cette fois-ci, le règlement en cas de défaut intervient soit à la date de défaut du vendeur soit à la date du premier défaut du panier des débiteurs.

Les produits dérivés titrisés sont des instruments financiers cash, l'acheteur est alors sans risque de défaut puisqu'il règle en totalité sa prime pour entrer dans la distribution des flux monétaires engendrés par ces contrats financiers.

1.1. Hypothèses spécifiques de Bielecki et Rutkowski (2001).

1. **Information dans l'économie.**
On considère dans un marché sans opportunité d'arbitrage, un panier $\boldsymbol{\tau}$ d'instants de défaut $\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$ d'un nombre n d'agents économiques susceptibles de faire défaut.
La date de défaut τ_j de chacune des signatures j $(1 \leq j \leq n)$ du panier est une variable aléatoire d'intensité λ_j sous une mesure martingale $\mathbb{Q}$. On suppose l'intensité λ_j non anticipative par rapport à la filtration des prix ou des taux $\mathbb{F}$.
On pose pour $j \in \{1, ..., n\}$ et $t \in \mathbb{R}_+,\ \Gamma_j(t) = \int_0^t \lambda_j(u)du),\ \Gamma_j$ désigne le processus de hasard de la signature j.
On suppose qu'il est improbable qu'un défaut survienne à la date zéro, qui sera la date d'évaluation des produits financiers.
Le modèle économique décrit est représenté par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ muni d'une filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles.
On désigne par $(N_j(t))_{t \geq 0}$ le processus de comptage du défaut associé à la signature j, $N_j(t) = \mathbf{1}_{(t \geq \tau_j)}$.
La filtration $\mathbb{D}^j = \left(\mathcal{D}_t^j\right)_{t \geq 0}$ décrit l'information sur le défaut de l'intervenant de marché j ; elle permet d'observer sa date de défaut. C'est la filtration naturelle de son processus de comptage.
A la date t, on observe non seulement les variables d'états caractérisant l'économie telles que les taux d'intérêt, les taux de changes, les intensités de défaut, mais aussi les instants de défaut des n débiteurs du panier $\boldsymbol{\tau}$. Par conséquent, la filtration $\mathbb{G}$ est la plus petite contenant celle des taux ou des prix, pour laquelle chaque date aléatoire τ_j est un temps d'arrêt. L'information disponible à la date t est donc représentée par la $\sigma-$algèbre $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t^1 \vee \mathcal{D}_t^2 .... \vee \mathcal{D}_t^n$.

2. **Interactions entre les évènements de crédit.**
On suppose que pour deux débiteurs distincts k et l du panier,
$\mathbb{Q}\{\tau_l = \tau_k\} = 0$. Cette dernière hypothèse signifie que les défauts simultanés sont exclus dans cette économie.
Nous postulons de plus que les instants de défaut $\tau_1, ..., \tau_n$ sont indépendants

conditionnellement à la filtration des taux $\mathbb{F}$.
L'hypothèse d'indépendance conditionnelle, commune à la plupart des modèles à intensité de défaut, est posée afin de faciliter l'évaluation des flux monétaires soumis à plusieurs risques de défaut. D'un point de vue intuitif, elle signifie que lorsque les risques communs aux n firmes sont fixés (dans la filtration $\mathbb{F}$ des prix ou des taux d'intérêt), les risques particuliers à chacune des firmes sont alors indépendants. Notons que cette hypothèse ne permet pas de capturer toute l'information sur la dépendance entre les défauts d'entreprises différentes. Ainsi, le défaut d'une société ne peut avoir des conséquences sur ses filiales et sur les firmes concurrentes. Ce postulat permet cependant de mieux traiter le cas d'agents économiques soumis à des risques de défaut globaux résultant de facteurs macroéconomiques tels que le niveau des taux d'intérêt. Il a aussi l'avantage de permettre l'analyse de défauts multiples résultant du cycle des affaires ou encore de d'autres éléments liés aux politiques économiques des états.
Mathématiquement, les instants de défaut peuvent être construits de telle sorte que la propriété d'indépendance conditionnelle soit satisfaite. On parle alors de construction canonique. La méthode est similaire à celle de Lando étudiée précedemment. Il suffit, de plus, de supposer les seuils de défauts indépendants. Pour plus de détails, nous renvoyons à Bielecki et Rutkowski (2000).

3. **Description d'un titre ou contrat "i^{th}-to-default".**

Un titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" est représenté, conformément à Bielecki et Rutkowski (2001), par $CCT^{(i)} = (X, 0, \widetilde{X}_{(i)}, Z_{(i)}, \boldsymbol{\tau})$.

La variable aléatoire X, supposée $\mathcal{F}_T$ mesurable, représente sa valeur à la date d'échéance T lorsque cette dernière est antérieure à la date de défaut $\tau_{(i)}$ ($\tau_{(i)}$ désigne le i-ème défaut du panier).

La variable aléatoire $\widetilde{X}_{(i)}$ représente sa valeur à la date d'échéance lorsque cette dernière est postérieure à la date de défaut $\tau_{(i)}$. Elle est définie par $\widetilde{X}_{(i)} = \sum_{k=1}^{n} X_k 1_{\left(\tau_{(i)}=\tau_k\right)}$, où les variables aléatoires X_k ($k \in \{1, ..., n\}$) sont supposées $\mathcal{F}_T$ mesurables.

Le processus $Z_{(i)}$ définit sa fonction de paiement à la date aléatoire $\tau_{(i)}$ lorsque cette dernière est antérieure à la date d'échéance. Il est défini par $Z_{(i)}(\tau_{(i)}) = \sum_{k=1}^{n} Z_k(\tau_k) 1_{\left(\tau_{(i)}=\tau_k\right)}$, où les processus Z_k ($k \in \{1, ..., n\}$) sont supposés $\mathbb{F}$-prévisibles.
Cette représentation exclue la possibilité de distribution de dividendes continues aux ayant droits. Les flux sont distribués soit à la date du i-ème défaut du panier ou à la date d'échéance du contrat. Les flux payés par ces instruments financiers sont liés à la survenance du i-ème défaut du panier. Dans le cas où T représente la date d'échéance du contrat, par l'achat d'un tel instrument financier, on se protège, jusqu'à la date T, contre les $(i-1)$ premiers défauts du panier. En l'absence

de survenance du i-ème défaut avant ou à l'échéance, les ayant droits reçoivent à cette date un flux contingent égal à X. Au cas où le i-ème défaut intervient avant la date d'échéance T, une partie de la récupération est anticipée tandis que l'autre partie est payée à la date d'échéance du contrat. Notons qu'après le i-ème défaut, les flux engendrés par ces instruments financiers dépendent de l'identité de la i-ème signature à faire défaut.

Dans la mesure où l'on ne connaît pas l'ordre de défaut des débiteurs de référence, le détenteur de ces produits financiers est soumis aux risques de défaut de toutes les signatures du panier. Toutefois, il n'assume que le risque de défaut des $(n-i+1)$ dernières signatures du panier à faire défaut.
La situation est symétrique pour le vendeur de ce titre (ou contrat). Ce dernier est également soumis aux risques de défaut des signatures du panier, mais il transfère vers les investisseurs le risque de défaut des $(n-i+1)$ dernières signatures à faire défaut et n'assume que le risque de défaut des $(i-1)$ premières signatures à faire défaut.
On pourrait ainsi assimiler un titre i-th to default référencé sur un panier de signatures à une opération de transfert réciproque de panier de risques de défaut. Le panier des instants de défaut est décomposé en deux sous paniers, le vendeur du contrat acceptant les risques de défaut du premier sous panier constitué des $(i-1)$ premiers débiteurs à faire défaut tandis que l'acheteur du contrat assume les risques de défaut du deuxième sous panier composée des $(n-i+1)$ dernières signatures à faire défaut.
Dans la mesure où le vendeur du contrat assume les $(i-1)$ premiers défauts, il réclame le règlement d'une prime, représentée par le prix du produit financier, qui compense aussi les risques pris sur ce premier sous-panier. La prime réglée par l'acheteur le protège contre les défauts du premier sous-panier. Si le premier défaut du second sous-panier intervient avant la date d'échéance, il reçoit, dès cette date, un règlement monétaire inferieur à celui promis, à l'échéance, au cas où il n'y a aucun défaut dans ce second sous panier.

A partir de l'hypothèse de dates de défauts conditionnellement indépendantes, Bielecki et Rutkowski proposent une méthode d'évaluation de ces produits financiers. Par leur méthodologie, ils généralisent les résultats de Duffie (1998) sur l'évaluation des produits dérivés de crédit "first-to-default" ; puis ceux de Li (1999) sur un contrat "i^{th} -to-default" particulier, l'option de défaut binaire sur un panier de dates de défaut. Enfin, ces auteurs prolongent les résultats de Kijima et Muromachi (2000).

La méthode de Bielecki et Rutkowski (2001) est basée sur une décomposition du panier $\boldsymbol{\tau}$ en trois sous ensembles contenant respectivement, $(i-1)$, 1 et $(n-i)$ signatures. Ils désignent par $\Pi^{(i,j)}$, l'ensemble de telles partitions. Ainsi, si

π est un élément de $\Pi^{(i,j)}$, il s'exprime sous la forme suivante : $\pi = \{\pi_-, \{j\}, \pi_+\}$. Le sous ensemble π_- représente les $(i-1)$ premières signatures à faire défaut ; l'indice j représente l'identité de l'émetteur faisant défaut en i-ème position, c'est-à-dire, $\tau_{(i)} = \tau_j$; enfin, le dernier sous ensemble noté π_+ désigne les $(n-i)$ dernières signatures à faire défaut.
Puis ils posent : $\tau(\pi_-) = \tau_{(i-1)}$ (resp. $\tau(\pi_+) = \tau_{(i+1)}$), le $(i-1)$-ème (resp. $(i+1)$-ème) défaut du panier. Notons que dans certains cas on pourra avoir $\tau(\pi_-) = -\infty$ ou $\tau(\pi_+) = +\infty$.

1.2. Valeur d'un titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" non vulnérable.
Le prix $X^{(i)}(0,T)$ du titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" vérifie :

$$X^{(i)}(0,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X 1_{(T<\tau_{(i)})}}{B(T)} + \frac{\widetilde{X}_{(i)} 1_{(T\geq\tau_{(i)})}}{B(T)} + \frac{\widetilde{Z}_{(i)} 1_{(T\geq\tau_{(i)})}}{B(\tau_{(i)})}\right].$$

Or on sait que :

$$1_{\left(T<\tau_{(i)}\right)} = \sum_{k=1}^{n} 1_{\left(\tau_{(i)}=\tau_k; T<\tau_k\right)} \text{ et } 1_{\left(T\geq\tau_{(i)}\right)} = \sum_{k=1}^{n} 1_{\left(\tau_{(i)}=\tau_k; T\geq\tau_k\right)},$$

d'où :

$$X^{(i)}(0,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{X 1_{\left(\tau_{(i)}=\tau_k; T<\tau_k\right)}}{B(T)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k 1_{\left(\tau_{(i)}=\tau_k; T\geq\tau_k\right)}}{B(T)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k 1_{\left(\tau_{(i)}=\tau_k; T\geq\tau_k\right)}}{B(\tau_k)}\right].$$

Par ailleurs, les évènements de crédits $\left\{\tau_{(i)} = \tau_k; T < \tau_k\right\}$ et $\left\{\tau_{(i)} = \tau_k; T \geq \tau_k\right\}$, s'écrivent chacun comme une réunion disjointe d'évènements de crédits, c'est à dire,

$$\begin{aligned} \left\{\tau_{(i)} = \tau_k; T < \tau_k\right\} &= \bigcup_{\pi\in\Pi^{(i,j)}} \{\tau(\pi_-) < \tau_k < \tau(\pi_+); T < \tau_k\} \\ \text{et } \left\{\tau_{(i)} = \tau_k; T \geq \tau_k\right\} &= \bigcup_{\pi\in\Pi^{(i,j)}} \{\tau(\pi_-) < \tau_k < \tau(\pi_+); T \geq \tau_k\}. \end{aligned}$$

En appliquant la proposition 3.1 de Jeanblanc et Rutkowski (2000) et l'hypothèse 2 précédente, Bielecki et Rutkowski (2001) obtiennent une expression de $X^{(i)}(0,T)$ en une somme de trois termes :

$$X^{(i)}(0,T) = J_X^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T) + K_Z^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T) + L_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T).$$

Le premier terme $J_X^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$, égal à

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{B(T)} \sum_{j=1}^{n} \int_T^{\infty} \left(\sum_{\pi\in\Pi^{(i,j)}} \left(\prod_{k\in\pi-} (1-e^{-\Gamma_k(u)})\right) e^{-\sum_{l\in\pi_+}\Gamma_l(u)}\right) \lambda_j(u) e^{-\Gamma_j(u)} du\right], \tag{1}$$

est le prix du titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" représenté par $CCT^{(i)} = (X, 0, 0, 0, \boldsymbol{\tau})$. Il protège son détenteur contre les $(i-1)$ premiers défauts et s'apparente à un titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" de type binaire.
Le second terme $K_Z^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$, égal à

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \frac{Z_j(u)}{B(u)}\left(\sum_{\pi\in\Pi^{(i,j)}}\left(\prod_{k\in\pi-}(1-e^{-\Gamma_k(u)})\right)e^{-\sum_{l\in\pi_+}\Gamma_l(u)}\right)\lambda_j(u)e^{-\Gamma_j(u)}du\right], \tag{2}$$

est le prix du titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" représenté par $CCT^{(i)} = (0, 0, 0, Z_{(i)}, \boldsymbol{\tau})$. Il protège son détenteur contre le i-ème défaut.
Li (1999) s'intéresse à l'évaluation de ce type d'instruments financiers, il suppose les flux Z_k égaux à 1.
Enfin le troisième terme $L_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$, égal à

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j}{B(T)}\int_0^T \left(\sum_{\pi\in\Pi^{(i,j)}}\left(\prod_{k\in\pi-}(1-e^{-\Gamma_k(u)})\right)e^{-\sum_{l\in\pi_+}\Gamma_l(u)}\right)\lambda_j(u)e^{-\Gamma_j(u)}du\right], \tag{3}$$

est le prix du titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" représenté par $CCT^{(i)} = (0, 0, \widetilde{X}_{(i)}, 0, \boldsymbol{\tau})$.
On peut donc conclure qu'un titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" est la somme de trois instruments financiers.

Le premier, de prix $J_Z^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$, est un titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" à barrière désactivée en cas de survenance du i-ème défaut avant la date d'échéance T.

Le second, de prix $K_Z^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$, est un titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" à barrière activée en cas de survenance du i-ème défaut avant la date d'échéance T.

Le troisième, de prix $L_Z^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$, est un titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" à barrière activée en cas de survenance du i-ème défaut avant la date d'échéance T.
La différence entre les deux derniers instruments financiers est liée à la date de distribution des flux monétaires aux investisseurs. Dans le premier cas, le règlement intervient à la date aléatoire du i-ème défaut alors que dans le second cas il a lieu à la date d'échéance T.

Remarques.
Il est possible de donner des expressions plus simples de (1) et de (3) pour un titre (ou contrat) "first-to-default". En effet, dans ce cas, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$ et $\pi \in \Pi^{(1,j)}$, on a $\pi_- = \emptyset$ et $\pi_+ = \{1, ..., j-1, j+1, ..., n\}$.

Il en résulte les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\int_T^{\infty}\left(\sum_{\pi\in\Pi^{(i,j)}}\left(\prod_{k\in\pi-}(1-e^{-\Gamma_k(u)})\right)e^{-\sum_{l\in\pi_+}\Gamma_l(u)}\right)\lambda_j(u)e^{-\Gamma_j(u)}du\\
&=\int_T^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(u)e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(u)}\\
&=e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\int_0^{T}\left(\sum_{\pi\in\Pi^{(i,j)}}\left(\prod_{k\in\pi-}(1-e^{-\Gamma_k(u)})\right)e^{-\sum_{l\in\pi_+}\Gamma_l(u)}\right)\lambda_j(u)e^{-\Gamma_j(u)}du\\
&=\int_0^{T}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(u)e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(u)}\\
&=1-e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T)}.
\end{aligned}$$

Soit d'après (1)

$$J_X^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T)=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{B(T)}e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T)}\right],$$

et d'après (3)

$$L_{\widetilde{X}}^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T)=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widetilde{X}}{B(T)}(1-e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T)})\right]$$

si en plus on suppose que $X_1=X_2=...=X_n=\widetilde{X}$.
Ce résultat peut s'obtenir directement en montrant, comme dans Duffie (1998), que la $(\mathbb{F},\mathbb{G})$ intensité du premier instant de défaut du panier est égale à la somme des intensités de défaut des signatures du panier.
D'après la forme des prix des titres "first-to-default" soumis au schéma de recouvrement nul, la méthode developpée par Blanchet-Scalliet et Jeanblanc (2001), pour la duplication des flux monétaires soumis à un risque de défaut, peut être prolongée à celle des instruments financiers "first-to-default". Il suffit alors de supposer l'existence sur le marché d'un actif élémentaire qui paie une unité monétaire si à sa date d'échéance aucun défaut n'est survenu dans l'économie.

1.3. Titres (ou contrats) "i^{th}-to-default" vulnérables, règlement à la date d'échéance.

1.3.1. Définition.

Un titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" vulnérable est un titre ou contrat "i^{th}-to-default" pour lequel le vendeur est susceptible de faire défaut.

Les contrats à terme vulnérables sont des opérations financières pour lesquelles le vendeur et l'acheteur sont soumis au risque de défaut. C'est le cas par exemple des *defaultable* swaps mais aussi des swaps sur le risque de défaut.

La prise en compte du caractère vulnérable résulte du constat selon lequel des banques, susceptibles d'être en défaut, émettent ce type d'instruments financiers. Ces titres (ou contrats) vulnérables s'apparentent (dans une forme plus abstraite) aux produits dérivés de crédit titrisés, ce sont des notes sur des paniers de défaut, émises par des agents économiques susceptibles d'être en défaut.

1.3.2. Hypothèses supplémentaires.
La variable aléatoire τ_V représente la date de défaut du vendeur. Elle admet une intensité aléatoire λ_V sous $\mathbb{Q}$. Cette dernière est supposée non anticipative par rapport à la filtration des prix ou des taux $\mathbb{F}$.
On pose $\Gamma_V(u) = \int_0^u \lambda_V(u)du)$, Γ_V désigne le processus de hasard du vendeur.
L'information dans l'économie est cette fois décrite au moyen de la filtration $\mathbb{G} = \mathbb{G}^V \vee \mathbb{D}$, *où* $\mathbb{G}^V = \mathbb{F} \vee \mathbb{D}^V$ et $\mathbb{D} = \mathbb{D}^1 \vee \mathbb{D}^2 \vee ... \vee \mathbb{D}^n$.
Par rapport à la section précédente, on observe en plus la date de défaut du vendeur.
Sous $\mathbb{Q}$, les instants de défaut $\tau_1, ..., \tau_n$ et τ_V sont supposés indépendants conditionnellement à l'information sur les taux.

La première application concerne l'évaluation d'un titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" vulnérable pour lequel sa valeur sans défaut (du vendeur) est représentée par $CCT^{(i)} = (0, 0, \widetilde{X}_{(i)}, 0, \boldsymbol{\tau})$. Ce dernier instrument financier est la composante de $CCT^{(i)} = (X, Z_{(i)}, \widetilde{X}_{(i)}, 0, \boldsymbol{\tau})$ qui permet à son détenteur de se protéger contre le $i-$ème défaut avec règlement à la date T.
En cas de défaut du vendeur, celui-ci règle, à la date d'échéance, une fraction $\delta_V(T)$, supposée $\mathcal{F}_T$ mesurable, de la valeur promise.
Ainsi, le titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" vulnérable est représenté par $\overline{CCT}^{(i)} = (0, 0, \widetilde{X}_{(i)} e_V(T), 0, \boldsymbol{\tau})$, où $e_V(T) = 1_{(T<\tau_V)} + \delta_V(T) 1_{(T \geq \tau_V)}$.

Proposition 1.3.3.
Le prix $\overline{L}_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$ du titre (ou contrat) "i^{th}-to-default" vulnérable, représenté par $\overline{CCT}^{(i)} = (0, 0, \widetilde{X}_{(i)} e_V(T), 0, \boldsymbol{\tau})$, est égal à

$$v_V(0,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\sum_{j=1}^n X_j \int_0^T \left(\sum_{\pi \in \Pi^{(i,j)}} \left(\prod_{k \in \pi-} (1 - e^{-\Gamma_k(u)})\right) e^{-\sum_{l \in \pi_+} \Gamma_l(u)}\right) \lambda_j(u) e^{-\Gamma_j(u)} du\right],$$

où $v_V(0,T)$ est le prix de l'obligation zéro-coupon émise par le vendeur du titre de valeur terminale $e_V(T)$; $\mathbb{Q}_T$ désigne la T-mesure forward-neutre de défaut liée à $v_V(t,T)$.

Preuve : Les flux liés à $\overline{CCT}^{(i)} = (0, 0, \widetilde{X}_{(i)} e_V(T), 0, \boldsymbol{\tau})$ vérifient :

$$\sum_{k=1}^{n} X_k e_V(T) 1_{\left(\tau_{(i)}=\tau_k; T \geq \tau_k\right)}.$$

Sa valeur initiale est alors donnée par

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=1}^{n} e_V(T) \frac{X_j}{B(T)} \sum_{\pi \in \Pi^{(i,j)}} 1_{(\tau(\pi_-)<\tau_j<\tau(\pi_+); T \geq \tau_j)}\right] \\ = &\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=1}^{n} e_V(T) \frac{X_j}{B(T)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{\pi \in \Pi^{(i,j)}} 1_{(\tau(\pi_-)<\tau_j<\tau(\pi_+); T \geq \tau_j)} | \mathcal{F}_T \vee \mathcal{D}_T^V\right]\right]. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse d'indépendance conditionnelle, les σ-algèbres $\mathcal{D}_T^1 \vee ... \vee \mathcal{D}_T^n$ et $\mathcal{D}_T^V$ sont indépendantes connaissant $\mathcal{F}_T$. On obtient alors

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{\pi \in \Pi^{(i,j)}} 1_{(\tau(\pi_-)<\tau_j<\tau(\pi_+); T \geq \tau_j)} | \mathcal{F}_T \vee \mathcal{D}_T^V\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{\pi \in \Pi^{(i,j)}} 1_{(\tau(\pi_-)<\tau_j<\tau(\pi_+); T \geq \tau_j)} | \mathcal{F}_T\right].$$

Ainsi, le prix de cet instrument financier vulnérable est donné par :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=1}^{n} e_V(T) \frac{X_j}{B(T)} \sum_{\pi \in \Pi^{(i,j)}} \int_0^T \left(\prod_{k \in \pi-} (1 - e^{-\Gamma_k(u)})\right) e^{-\sum_{l \in \pi_+} \Gamma_l(u)} \lambda_j(u) e^{-\Gamma_j(u)} du\right],$$

soit finalement en passant à l'univers forward-neutre de défaut,

$$v_V(0,T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j \sum_{\pi \in \Pi^{(i,j)}} \int_0^T \left(\prod_{k \in \pi-} (1 - e^{-\Gamma_k(u)})\right) e^{-\sum_{l \in \pi_+} \Gamma_l(u)} \lambda_j(u) e^{-\Gamma_j(u)} du\right].$$

Remarque.
Il semble intéressant de faire le lien entre $\overline{L}_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$ et $L_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$.
Rappelons que $L_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$, défini par la relation (3), est le prix de la valeur sans défaut (du vendeur) de l'instrument financier vulnérable.
Le rapport de prix $\frac{\overline{L}_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)}{L_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)}$ vérifie

$$\frac{v_V(0,T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j \int_0^T \left(\sum_{\pi \in \Pi^{(i,j)}} \left(\prod_{k \in \pi-} (1 - e^{-\Gamma_k(u)})\right) e^{-\sum_{l \in \pi_+} \Gamma_l(u)}\right) \lambda_j(u) e^{-\Gamma_j(u)} du\right]}{B(0,T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j \int_0^T \left(\sum_{\pi \in \Pi^{(i,j)}} \left(\prod_{k \in \pi-} (1 - e^{-\Gamma_k(u)})\right) e^{-\sum_{l \in \pi_+} \Gamma_l(u)}\right) \lambda_j(u) e^{-\Gamma_j(u)} du\right]},$$

où $\mathbb{P}_T$ désigne la T-mesure forward neutre sans défaut.
Lorsque le défaut du vendeur est indépendant des taux d'intérêt, nous savons, d'après les résultats d'Augros et Tchapda (2000 ; 2002) que la restriction de la T-mesure forward neutre de défaut sur la filtration $\mathbb{F}$ est la T-mesure forward neutre sans défaut. On a alors l'égalité

$$\frac{\overline{L}_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)}{L_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)} = \frac{v_V(0,T)}{B(0,T)}.$$

Le rapport d'espérance qui apparaît dans le contexte général, où les dates de défaut sont conditionnellement indépendantes et le défaut du vendeur correlé aux taux d'intérêt, exprime l'impact de la dépendance entre le défaut du vendeur et les taux d'intérêt. Il fait aussi intervenir notamment les différentes corrélations entre le défaut des débiteurs du panier et le défaut du vendeur.

Considérons maintenant le cas d'un instrument financier émis par le même vendeur, représenté, cette fois, par $\widehat{CCT}^{(i)} = (Xe_V(T), 0, \widetilde{X}_{(i)}e_V(T), 0, \boldsymbol{\tau})$. Comme sa valeur sans défaut représentée par $CCT^{(i)} = (X, 0, \widetilde{X}_{(i)}, 0, \boldsymbol{\tau})$, il permet aux investisseurs de se protéger contre les i premiers défauts du panier de débiteurs. Toutefois, son détenteur est en plus exposé au risque de défaut du vendeur.

La troisième application concerne le cas de titres (ou contrats) "first-to-default" vulnérables. Comme pour la seconde application, nous représentons sa valeur sans défaut (du vendeur) par $CCT^{(1)} = (X, 0, \widetilde{X}_{(1)}, 0, \boldsymbol{\tau})$. De plus, nous supposons que $X_1 = X_2 = ... = X_n = \widetilde{X}$. Autrement dit, les flux monétaires engendrés par cet instrument financier après le premier défaut ne dépendent pas de l'identité de la première signature du panier en défaut. Cette représentation des produits financiers "first-to-default" sans défaut (du vendeur) est conforme à celle de Kijima et Muromachi (2000) . Ces derniers auteurs les qualifient de swaps de type F.
La prise en compte de l'éventualité d'un défaut du vendeur pour ce titre (ou contrat) nous permet de le représenter par $\widehat{CCT}^{(1)} = (Xe_V(T), 0, \widetilde{X}_{(1)}e_V(T), 0, \boldsymbol{\tau})$.
Contrairement à Kijima et Muromachi (2000), X et $\widetilde{X}$ ne sont pas supposés constants ; ils sont aléatoires et $\mathcal{F}_T$ mesurables.
La proposition 1.3.4 qui va suivre étend leurs résultats dans un cadre où le vendeur est susceptible de faire défaut.

Proposition 1.3.4.
Le prix $\overline{X}^{(1)}(0,T)$ du titre (ou contrat) "first-to-default" vulnérable, représenté par $\widehat{CCT}^{(1)} = (Xe_V(T), 0, \widetilde{X}_{(1)}e_V(T), 0, \boldsymbol{\tau})$, vérifie :

$$\overline{X}^{(1)}(0,T) = \overline{J}_X^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T) + \overline{L}_{\widetilde{X}}^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T),$$

où

$$\overline{J}_X^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T) = v_V(0,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[Xe^{-\sum_{l=1}^n \Gamma_l(T)}\right]$$
$$\text{et } \overline{L}_{\widetilde{X}}^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T) = v_V(0,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\widetilde{X}\left(1-e^{-\sum_{l=1}^n \Gamma_l(T)}\right)\right].$$

Preuve. On exprime ce produit vulnérable "first-to-default" comme une somme de deux instruments financiers vulnérables, $\widehat{CCT}^{(1)} = (Xe_V(T),0,0,0,\boldsymbol{\tau}) + (0,0,\widetilde{X}_{(1)}e_V(T),0,\boldsymbol{\tau})$.
Le prix du produit vulnérable représenté par $(0,0,\widetilde{X}_{(1)}e_V(T),0,\boldsymbol{\tau})$ se déduit de la proposition 1.3.3 du chapitre 4. De plus, on a $X_1 = X_2 = ... = X_n$, par la remarque de la section 1.2, on en déduit le prix du second instrument financier vulnérable.
Pour l'évaluation du premier instrument financier vulnérable, son prix se déduit de la preuve de la proposition 1.4.4 et de la remarque de la section 1.2. Il est égal à :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=1}^n e_V(T)\frac{X}{B(T)}\sum_{\pi\in\Pi^{(i,1)}}\int_T^\infty\left(\prod_{k\in\pi-}(1-e^{-\Gamma_k(u)})\right)e^{-\sum_{l\in\pi_+}\Gamma_l(u)}\lambda_j(u)e^{-\Gamma_j(u)}du\right]$$
$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e_V(T)\frac{X}{B(T)}e^{-\sum_{l=1}^n \Gamma_l(T)}\right].$$

Enfin le passage à l'univers forward neutre de défaut nous donne le résultat.

1.4. Titres (ou contrats) "first-to-default" vulnérables, règlement anticipé au premier défaut.

Nous considérons le cas d'un titre (ou contrat) "first-to-default" vulnérable pour lequel le règlement du vendeur du titre (ou contrat) intervient à sa date de défaut, s'il est le premier à faire défaut. De plus, nous supposons que sa valeur sans défaut (du vendeur) est conforme à la description de Duffie (1998). Elle est donc représentée par $CCT^{(1)} = (X,0,0,Z_{(1)},\boldsymbol{\tau})$.
Le titre vulnérable n'est pas seulement soumis au risque de défaut des signatures du panier, mais en plus il est soumis au risque de défaut du vendeur de la protection. C'est la différence fondamentale avec le modèle de Duffie (1998).
Ainsi, lorsque le défaut du vendeur se produit en premier et avant la date d'échéance du titre (ou contrat), le règlement est anticipé. Le détenteur du titre (ou contrat) reçoit dès cette date un flux aléatoire égal à $Z_V(\tau_V)$. En revanche, si le défaut d'une des signatures du panier se produit en premier et avant la date d'échéance, l'acheteur du titre(ou contrat) reçoit à cette date le flux aléatoire égal à $Z_{(1)}(\tau_{(1)})$. Les paiements s'arrêtent dès que le premier défaut (parmi les débiteurs de référence ou le vendeur de la protection) intervient avant la date d'échéance. Une compensation, pour solde de tout compte, est alors versée à l'acheteur de la protection.

Enfin, si aucun défaut n'est intervenu à la date d'échéance, le détenteur du titre (ou contrat) reçoit le flux contingent égal à X.

Les hypothèses sur les dates de défaut ainsi que celles sur l'information dans l'économie sont identiques à celles de la section 1.3. Nous supposons le processus Z_V de recouvrement du vendeur $\mathbb{F}$-prévisible
En nous basant sur les résultats de la section 1.2, nous verrons que cet instrument financier vulnérable peut être représenté comme un titre (ou contrat) "first-to-default" non vulnérable référencé sur le panier de signatures $\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_V\}$.
Posons

$$Z^V(\widehat{\tau}_{(1)}) = \sum_{k=1}^{n} Z_k(\tau_k) 1_{\left(\widehat{\tau}_{(1)}=\tau_k; T\geq\tau_k\right)} + Z(\tau_V) 1_{\left(\widehat{\tau}_{(1)}=\tau_k; T\geq\tau_k\right)},$$

où $\widehat{\tau}_{(1)}$ représente le premier défaut du panier $\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_V\}$.

Proposition 1.4.1.
Le prix $\widetilde{S}^{(1)}(0,T)$ du titre (ou contrat) "first-to-default" vulnérable décrit cidessus vérifie :

$$\widetilde{S}^{(1)}(0,T) = J_X^{(1),\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_V\}}(0,T) + K_{Z^V}^{(1),\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_V\}}(0,T), \tag{4}$$

où

$$J_X^{(1),\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_V\}}(0,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{B(T)} e^{-\Gamma_V(T)-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T)}\right]$$
$$\text{et } K_{Z^V}^{(1),\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_V\}}(0,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \frac{Z_j(u)}{B(u)}\left(e^{-\Gamma_V(u)-\sum_{l\neq j}\Gamma_l(u)}\right)\lambda_j(u)e^{-\Gamma_j(u)}du \\ \quad + \int_0^T \frac{Z_V(u)}{B(u)}\left(e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(u)}\right)\lambda_V(u)e^{-\Gamma_V(u)}du\end{array}\right].$$

Preuve.
Les flux engendrés par cet instrument dérivé cash vérifient :

$$X 1_{\left(T<\tau_{(1)}\right)} 1_{(T<\tau_V)} + \sum_{k=1}^{n} Z_k(\tau_k) 1_{\left(\widehat{\tau}_{(1)}=\tau_k; T\geq\tau_k\right)} + Z_V(\tau_V) 1_{\left(\widehat{\tau}_{(1)}=\tau_k; T\geq\tau_k\right)},$$

où $\tau_{(1)}$ (resp. $\widehat{\tau}_{(1)}$) représente le premier défaut du panier $\boldsymbol{\tau}$ (resp. $\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_V\}$).
En remarquant que $1_{\left(T<\tau_{(1)}\right)} 1_{(T<\tau_V)} = 1_{\left(T<\widehat{\tau}_{(1)}\right)}$, ce produit dérivé de crédit peut être représenté par $\overline{CCT}^{(1)} = (X, 0, 0, Z^V, \boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_V\})$.
Son prix se déduit alors des résultats de la section 1.2.

Remarques.
Le prix du produit "first-to-default" vulnérable référencé sur un panier de n débiteurs est identique à celui d'un produit "first-to-default" non vulnérable référencé

sur un panier de $n+1$ débiteurs ; la signature en plus étant celle du vendeur de l'instrument financier vulnérable.

D'après la description d'un titre (ou contrat) "first-to-default" vulnérable, un instrument financier "first-to-default" non vulnérable, référencé sur un panier comportant n débiteurs, peut être assimilé à un instrument financier "first-to-default" vulnérable, référencé sur un panier comportant $(n-1)$ débiteurs. La signature en moins dans le panier représente le vendeur du produit financier vulnérable. Ainsi, tout débiteur du panier servant de référence au produit financier "first-to-default" non vulnérable peut être considéré à son tour comme le vendeur d'un produit financier "first-to-default" vulnérable référencé sur le même panier moins la signature de ce débiteur.

A la différence de la section précédente pour laquelle l'évaluation des produits dérivés vulnérables s'opère dans l'univers forward-neutre de défaut, l'évaluation de cet instrument financier "first-to-defaut" vulnérable se fait au moyen de la probabilité risque-neutre. Ceci résulte de la définition de la probabilité forward-neutre de défaut[2], liée au mode de recouvrement de la valeur de marché, lorsque la récupération a lieu à la date de défaut. Ici, nous adoptons une approche générale et ne donnons aucune forme aux processus de recouvrement à la date du premier défaut.

Enfin si le vendeur de cet instrument financier est supposé sans risque de défaut, c'est-à-dire, conformément à notre convention, lorsque $\tau_V = +\infty$, $\lambda_V = 0$ et $Z_V = 0$, la formule (4) vérifie $\widetilde{S}^{(1)}(0,T) = J_X^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T) + K_Z^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$. On retrouve alors le prix de l'instrument financier non vulnérable associé, représenté par $CCT^{(1)} = (X, 0, 0, Z_{(1)}, \boldsymbol{\tau})$.

2. Swaps "i^{th}-to-default" référencés sur un panier de signatures.

Dans cette section, nous nous intéressons à des opérations de swaps, référencés sur le panier $\boldsymbol{\tau}$ de débiteurs, qui permettent à l'acheteur du contrat de se protéger contre le i-ème défaut. Pour ce faire, ce dernier paie une prime fixe périodique représentant la jambe fixe du swap. Le vendeur se tient prêt à régler, soit à la date $\tau_{(i)}$, soit à la date d'échéance du contrat, un paiement contingent représentant la jambe variable du swap.

Notons que cette jambe variable peut être liée à des titres émis par les débiteurs de référence. Bielecki et Rutkowski (2001) donnent quelques exemples. Ils s'intéressent à l'évaluation du taux fixe d'un swap "i^{th}-to-default" pour lequel la jambe variable est constante. Ils supposent aussi que le règlement de cette

[2] Voir la section 1.3. du chapitre 3.

dernière intervient à la date $\tau_{(i)}$, si cette dernière est antérieure à la date d'échéance du contrat.
Dans les sections 2.1 et 2.2, nous décrivons le swap "i^{th}-to-default", puis présentons les résultats proposés par Bielecki et Rutkowski (2001) pour l'évaluation du taux de swap.
La section 2.3 concerne l'évaluation du taux de swap lorsque le règlement de la jambe variable intervient à la date d'échéance. Dans ce cas, nous prenons en compte uniquement l'éventualité d'un défaut du vendeur de la protection.
Enfin dans la section 2.4, nous nous intéressons à l'évaluation du taux de swap "first-to-default" lorsque le règlement de la jambe variable est anticipée. Cette fois, nous supposons que le vendeur et l'acheteur de la protection sont susceptibles de faire défaut.

2.1. Hypothèses spécifiques.
Nous retenons les hypothèses 1 et 2 de la section 1.1.
Nous représentons un swap "i^{th}-to-default" référencé sur le panier $\boldsymbol{\tau}$ par $S_1C\mathbf{T}^{(i)} = \left(\mathbf{F}^{(i)}, 0, Z_{(i)}, 0, \boldsymbol{\tau}\right)$ ou $S_2C\mathbf{T}^{(i)} = \left(\mathbf{F}^{(i)}, 0, \widetilde{X}_{(i)}, 0, \boldsymbol{\tau}\right)$. Avec :

-$\mathbf{T} = (T_0, T_1, ..., T_m, T)$, $(T_1 < T_2 < ...... < T_m < T)$, T représente la date d'échéance du contrat, les dates $T_i (1 \leq i \leq n)$ correspondent aux dates de paiement de la prime par l'acheteur du swap, la date T_0 est la date de départ du contrat ;

- $\mathbf{F}^{(i)} = \left(-\kappa^{(i)}\Delta_1, ..., -\kappa^{(i)}\Delta_m\right)$ représente les flux de la jambe fixe du contrat, $\kappa^{(i)}$ est le taux du swap et $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$, avec $i = 1, ...m$. Nous supposons que le montant notionnel du swap est égal à une unité monétaire ;

- $\widetilde{X}_{(i)}$ représente la jambe variable du contrat, au cas où son règlement intervient à la date d'échéance T ; c'est une variable aléatoire $\mathcal{G}_T$ mesurable, elle vérifie $\widetilde{X}_{(i)} = \sum_{k=1}^{n} X_k 1_{\left(\tau_{(i)} = \tau_k\right)}$, où les X_k sont supposés $\mathcal{F}_T$ mesurables ;

- $Z_{(i)}$ représente la jambe variable du swap, au cas où son règlement intervient à la date $\tau_{(i)}$; le processus $Z_{(i)}$, vérifie $Z_{(i)} = \sum_{k=1}^{n} Z_k 1_{\left(\tau_{(i)} = \tau_k\right)}$, où les processus Z_k $(k \in \{1, ..., n\})$ sont supposés $\mathbb{F}$-prévisibles.

La distinction entre les deux contrats de swap représentés par $S_1C\mathbf{T}^{(i)}$ et $S_2C\mathbf{T}^{(i)}$ est liée à la date de règlement de la jambe variable.

Proposition 2.2.
Lorsque le règlement de la jambe variable intervient à la date de $\tau_{(i)}$, le taux de swap vérifie :

$$\kappa^{(i)} = \frac{K_Z^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0, T)}{\sum_{k=1}^{m} J_{\Delta_k}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0, T_k)}, \tag{5}$$

Lorsque le règlement de la jambe variable intervient à la date d'échéance T, le taux de swap vérifie :

$$\kappa^{(i)} = \frac{L_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)}{\sum_{k=1}^{m} J_{\Delta_k}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T_k)}, \tag{6}$$

où les termes $J_{\Delta_k}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T_k)$ $(1 \leq k \leq n)$, $K_Z^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$ et $L_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$ sont définis dans la section 2.2.
Preuve. Elle s'obtient assez rapidement en remarquant que
$S_1CT^{(i)} = \left(\mathbf{F}^{(i)},0,0,Z_{(i)},\boldsymbol{\tau}\right) = \left(\mathbf{F}^{(i)},0,0,0,\boldsymbol{\tau}\right) + \left(\mathbf{0},0,0,Z_{(i)},\boldsymbol{\tau}\right)$ pour le règlement à la date $\tau_{(i)}$,
$S_2C\mathbf{T}^{(i)} = \left(\mathbf{F}^{(i)},0,\widetilde{X}_{(i)},0,\boldsymbol{\tau}\right) = \left(\mathbf{F}^{(i)},0,0,0,\boldsymbol{\tau}\right) + \left(0,0,\widetilde{X}_{(i)},0,\boldsymbol{\tau}\right)$ pour le règlement à la date d'échéance T.
Or d'après la section 1.2, les prix de $\left(\mathbf{F}^{(i)},0,0,0,\boldsymbol{\tau}\right)$, $\left(\mathbf{0},0,0,Z_{(i)},\boldsymbol{\tau}\right)$ et $\left(\mathbf{0},0,\widetilde{X}_{(i)},,0,\boldsymbol{\tau}\right)$ sont égaux respectivement à $\sum_{k=1}^{m} \kappa J_{\Delta_k}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T_k)$, $K_Z^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$ et $L_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$.
Sachant que le contrat de swap est conclu à titre onéreux, on obtient le résultat.
Bielecki et Rutkowski (2001) supposent que le règlement de la jambe variable est anticipé. Par ailleurs, ils supposent que l'acheteur du contrat cherche à se protéger contre la perte qu'il pourrait subir sur un panier d'obligations zéro-coupon soumis au schéma de recouvrement fractionnaire de la valeur faciale, à taux constant.
Ainsi, ils posent $Z_k = (1-\delta_k)L_k$, où L_k représente la valeur faciale de l'obligation zéro-coupon risquée émise par la signature k ; la constante δ_k représente son taux de recouvrement.
Les formules (5) et (6) sont données dans un cadre général. Si par exemple l'acheteur du contrat cherche à se protéger contre la perte qu'il pourrait subir à la suite du i-ème défaut sur un panier d'obligations zéro-coupon soumises au mode de recouvrement fractionnaire à la date d'échéance, on a $X_k = (1-\delta_k(T))L_k$. La variable aléatoire $\delta_k(T)$, $\mathcal{F}_T$ mesurable, représente le taux de recouvrement de l'obligation zéro-coupon émise par la signature k.

Interessons-nous maintenant à certaines situations particulières conduisant à des expresssions analytiques du taux de swap.

2.3. Swaps first-to-default particuliers.
Nous déduisons de (1), (2) et (3) les prix des instruments financiers first-to-default, représentés par $(1,0,0,0,\boldsymbol{\tau})$, $\left(0,0,\widetilde{X},0,\boldsymbol{\tau}\right)$ et $(0,0,0,Z,\boldsymbol{\tau})$ et de prix spot $\widetilde{B}_0(0,T)$, $L_{\widetilde{X}}^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$ et $K_Z^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T)$ respectivement. On a

$$\widetilde{B}_0(0,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{B(T)} e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T)}\right],$$

$$L_{\widetilde{X}}^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{B(T)} \int_0^T \lambda_j(u) e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(u)} du\right],$$
$$K_Z^{(1),\boldsymbol{\tau}}(0,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \sum_{j=1}^{n} \int_0^T \frac{Z_j(u)}{B(u)} \lambda_j(u) e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(u)} du\right],$$

où $\widetilde{B}_0(0,T)$ est identique au prix, dans un monde où le taux d'intérêt spot est égal à $r(t)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(t)$, d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut d'échéance T.

Nous supposons maintenant que la jambe variable du swap ne dépend pas de l'identité du premier débiteur de référence à faire défaut. On pose alors $X_1 = X_2 = ... = X_n = \widetilde{X}$ pour le cas d'un règlement à la date d'échéance et $Z_1 = Z_2 = ... = Z_n = Z$ pour le cas du règlement de la jambe variable à la date du premier défaut. swap "first-to-default" est particulierèment intéressant.

Il résulte alors que le taux de swap "first-to-default" représenté par $S_2C\mathbf{T}^{(1)} = \left(\mathbf{F}^{(1)}, 0, \widetilde{X}_{(1)}, 0, \boldsymbol{\tau}\right)$ vérifie :

$$\kappa^{(1)} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widetilde{X}}{B(T)}(1 - e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T)})\right]}{\sum_{k=1}^{m} \Delta_k \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T_k)}}{B(T_k)}\right]},$$

alors que le taux de swap représenté par $S_1C\mathbf{T}^{(1)} = \left(\mathbf{F}^{(1)}, 0, 0, Z_{(1)}, \boldsymbol{\tau}\right)$ vérifie

$$\kappa^{(1)} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \sum_{j=1}^{n} \int_0^T \frac{Z_j(u)}{B(u)} \lambda_j(u) e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(u)} du\right].}{\sum_{k=1}^{m} \Delta_k \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T_k)}}{B(T_k)}\right]}.$$

On peut alors conclure que le taux de swap est un rapport de prix d' instruments financiers soumis au risque de défaut. En effet, le numérateur représente le prix d'un produit financier d'échéance T référencé sur le panier $\boldsymbol{\tau}$ et à barrière activée en cas de premier défaut. Le dénominateur peut être assimilé au prix d'une obligation couponnée, à recouvrement nul, promettant de payer aux dates T_k un flux monétaire égal à Δ_k $(1 \leq k \leq m)$. Notons que pour ce titre de créance, l'instant aléatoire de défaut de son émetteur correspond au premier défaut du panier de débiteur.

On peut donc conclure que la valeur d'un taux de swap de défaut est égal à la valeur d'une option de défaut binaire divisée par la valeur d'une obligation couponnée risquée, à taux de recouvrement nul, promettant des coupons aux dates T_k, à un taux égal à Δ_k $(1 \leq k \leq m)$.

Le taux de swap représenté par $S_2C\mathbf{T}^{(1)} = \left(\mathbf{F}^{(1)}, 0, \widetilde{X}_{(1)}, 0, \boldsymbol{\tau}\right)$ vérifie :

$$\kappa^{(1)} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widetilde{X}}{B(T)}\right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widetilde{X}}{B(T)} e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T)}\right]}{\sum_{k=1}^{m} \Delta_k \widetilde{B}_0(0,T_k)},$$

où $\widetilde{B}_0(0,T_k)$ est donnée par la proposition précédente.
Considérons un agent économique souhaitant se protéger contre un panier d'obligations zéro-coupon soumis au mode de recouvrement fractionnaire (*fractionnal of recovery of treasury value*) à l'échéance, comme la jambe variable du La jambe variable de $S_2C\mathbf{T}^{(1)}$ ne dépend pas de l'identité de la première signature du panier à faire défaut, on pourrait la choisir comme le moyenne arithmétique, c'est -à-dire,

$$\widetilde{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-\delta_k(T)),$$

où $\delta_k(T)$ représente le taux de recouvrement dfe l'obligation zéro-coupon soumise au défaut émise par la signature k. Le taux de swap est alors égal à

$$\begin{aligned}\kappa^{(1)} &= \frac{B(0,T)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\delta}_k(0,T)}{\sum_{k=1}^{m}\Delta_k\widetilde{B}_0(0,T_k)} \\ &= \frac{1}{n}\frac{\sum_{k=1}^{n}\Big(B(0,T)-\widetilde{\delta}_k(0,T)\Big)}{\sum_{k=1}^{m}\Delta_k\widetilde{B}_0(0,T_k)},\end{aligned}$$

où $\widetilde{\delta}_k(0,T)$ est la valeur actuelle, dans un monde où le taux d'intérêt est égal à $r(t)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(t)$, du taux de recouvrement de l'obligation zéro-coupon d'échéance T émise par le débiteur k. On peut alors remarquer que cette formule est similaire à celle donnant le taux de swap de taux d'intérêt.
La formule précédente nous permet de mieux traduire l'impact de la perte résultant du panier débiteur sur le taux de swap de défaut. En effet, et comme on pouvait le penser, si la valeur actuelle du taux de recouvrement des débiteurs de référence est très proche de la valeur de l'obligation zéro-coupon sans risque de défaut, le taux de swap sera très proche de zéro. En revanche, si le marché, où le taux d'intérêt spot est égal à $r(t)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(t)$, anticipe des taux de recouvrement faibles, le taux de swap sera davantage élevé. Le cas extrême équivaut à celui où le taux de recouvrement de tous les titres du panier est nul, dans ce cas : le taux de swap, égal à $\kappa_M^{(1)}$, vérifie

$$\kappa_M^{(1)} = \frac{B(0,T)}{\sum_{k=1}^{m}\Delta_k\widetilde{B}_0(0,T_k)}.$$

Dans la mesure où l'on ne connait pas au moment de l'évaluation du taux de swap la sévérité de la perte encourue par la détention d'un panier d'obligations zéro-coupon, $\kappa_M^{(1)}$ représente le taux de swap maximum que reclamerait un gestionnaire pour protéger d'un panier d'obligations zéro-coupon soumis au mode de recouvrement fractionnaire.
Plus généralement, lorsque la jambe variable du swap est supposée indépendante

de l'identité du premier débiteur à faire défaut, elle peut être choisie comme une fonction multivariée des pertes subies sur chacune des obligations zéro-coupon.

2.4. Swap de défaut simple particulier.
Interessons-nous maintenant au cas du swap avec règlement de la jambe variable au moment du défaut. De plus, nous supposons que le panier est constitué d'un seul débiteur de référence.

Il résulte alors que le taux de swap de défaut, κ, représenté par $S_1C\mathbf{T} = (\mathbf{F}, 0, Z, 0, \tau)$, vérifie

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \frac{Z(u)}{B(u)}\lambda(u)e^{-\Gamma(u)}du\right].}{\sum_{k=1}^{m}\Delta_k \widetilde{B}_0(0,T_k)}.$$

Supposons de plus que le titre débiteur sous-jacent au contrat de swap est soumis au mode de recouvrement fractionnaire de la valeur de marché au taux K. La date T représente aussi l'échéance du titre soumis au défaut, $X^d(0,T)$ est le prix de ce titre.

Proposition 2.4.1.
On a :

$$\kappa = \frac{\widehat{Z}^d(0) - \widetilde{Z}(0)}{\sum_{k=1}^{m}\Delta_k \widetilde{B}_0(0,T_k)},$$

où $\widehat{Z}^d(0)$ représente la valeur sans défaut d'un titre risqué émis par le débiteur de référence, d'échéance T, soumis au mode de recouvrement de la valeur de marché au taux $K^d = 1 - K$;
$\widetilde{Z}(0)$ représente la valeur hors défaut d'un titre risqué émis par le débiteur de référence, d'échéance T, ayant une valeur sans défaut identique à celle de X^d et soumise au mode de recouvrement nul.
Preuve.
La valeur du swap étant nulle à la date de signature, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{k=1}^{m}\kappa\Delta_i\frac{1_{(T_k<\tau)}}{B(T_k)} - \frac{(1-K(\tau))\,X^d(\tau_-)}{B(\tau)}1_{(t<\tau\le T)}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{k=1}^{m}\kappa\Delta_i\frac{1_{(T_k<\tau)}}{B(T_k)} - \frac{K^d(\tau)X^d(\tau_-)}{B(\tau)}1_{(t<\tau\le T)}\right], \end{aligned}$$

où $K^d = 1 - K$.
Soit X la valeur sans défaut de X^d à la date T, on a :

$$0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{k=1}^{m}\kappa\Delta_i\frac{1_{(T_k<\tau)}}{B(T_k)} + \frac{X}{B(T)}1_{(T<\tau)} - \frac{X}{B(T)}1_{(T<\tau)} - \frac{K^d(\tau)X^d(\tau_-)}{B(\tau)}1_{(t<\tau\le T)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \kappa \Delta_k \widetilde{B}_0(0, T_k) + \widetilde{Z}(t) - \widehat{Z}^d(t).$$

D'où le résultat.

Nous pouvons comme dans la section précédente analyser l'impact du taux de recouvrement du titre débiteur sur le taux de swap de défaut.
D'une part, et comme on pouvait s'y attendre, lorsque le marché anticipe un taux de recouvrement du titre débiteur proche de 100%, le taux de swap est proche de zéro. Au contraire lorsque le marché anticipe un taux de recouvrement du titre débiteur proche de zéro, le taux de swap est très proche de la valeur

$$\kappa_M = \frac{Z(0) - \widetilde{Z}(0)}{\sum_{k=1}^{m} \Delta_k \widetilde{B}_0(0, T_k)},$$

où $Z(0)$ est le prix du titre représenté par $DCT = (X, 0, 0, 0, +\infty)$, c'est-à-dire la valeur sans défaut du titre X^d. Ainsi, κ_M est le taux de swap maximum à payer pour se protéger contre une perte qu'on pourrait subir d'une obligation zéro-coupon soumise au mode de recouvrement fractionnaire de la valeur de marché.
D'autre part, et d'après la formule précédente, il est clair que le taux de swap est une fonction décroissante du taux de recouvrement du titre débiteur.

2.5. Swap "i^{th}-to-default" vulnérable : règlement de la jambe variable à la date d'échéance du contrat.

Cette section concerne l'évaluation du taux de swap "i^{th}-to-default" dans un contexte particulier. Nous supposons dans cette partie que le paiement de la jambe variable intervient à la date d'échéance du swap.
Cette spécificité nous permet de ne prendre en compte que le risque de défaut du vendeur du swap. La vulnérabilité du contrat de swap se traduit par l'éventualité d'un défaut du vendeur, c'est-à-dire pour l'acheteur du contrat, un risque de défaut supplémentaire. Les hypothèses de cette section sont identiques à celles de la section 2.3.
Le swap "i^{th}-to-default" vulnérable référencé sur le panier $\boldsymbol{\tau}$ est représenté par $\overline{S_1C\mathbf{T}}^{(i)} = \left(\overline{\mathbf{F}}^{(i)}, \mathbf{0}, \widetilde{X}_{(i)} e_V(T), 0, \boldsymbol{\tau}\right)$ où $\overline{\mathbf{F}}^{(i)} = \left(-\overline{\kappa}^{(i)}\Delta_1, ..., -\overline{\kappa}^{(i)}\Delta_m\right)$. On rappelle que $e_V(T) = 1_{(T<\tau_V)} + \delta_V(T)1_{(T\geq\tau_V)}$. Le terme $\overline{\kappa}^{(i)}$ représente le taux fixe du swap "i^{th}-to-default" vulnérable.

Proposition 2.5.1.
On a :

$$\overline{\kappa}^{(i)} = \frac{\overline{L}_{\widetilde{X}}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0, T)}{\sum_{k=1}^{m} J_{\Delta_k}^{(i),\boldsymbol{\tau}}(0, T_k)}. \tag{7}$$

Preuve.
Elle s'obtient en combinant la preuve de la proposition 2.2 et celle de la proposition 1.3.3.
Remarques.
Lorsque $i = 1$, d'après les propositions 1.3.1 et 1.3.5, le taux du swap "i^{th}-to-default" vulnérable vérifie :

$$\overline{\kappa}^{(1)} = \frac{v_V(0,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\widetilde{X}\left(1 - e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T)}\right)\right]}{\sum_{k=1}^{m}\Delta_k\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{e^{-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T_k)}}{B(T_k)}\right]}.$$

Il nous semble intéressant comme dans la section précédente de faire le lien entre le taux du swap vulnérable ($\overline{\kappa}^{(i)}$) et taux de swap non vulnérable ($\kappa^{(i)}$) donné par la formule (4.6) .
On a la relation suivante :

$$\frac{\overline{\kappa}^{(i)}}{\kappa^{(i)}} = \frac{\overline{L}_{\widetilde{X}}^{(i),\tau}(0,T)}{L_{\widetilde{X}}^{(i),\tau}(0,T)}.$$

Elle exprime que le rapport entre le taux de swap "i^{th}-to-default" vulnérable et le taux de swap "i^{th}-to-default" non vulnérable de mêmes caractéristiques est égal au rapport du prix d'un produit financier "i^{th}-to-default" vulnérable sur le prix de sa valeur sans défaut (du vendeur).
Si sous la probabilité risque neutre, le défaut du vendeur du swap "i^{th}-to-default" vulnérable est indépendant de l'information des prix ou des taux, le rapport du taux du contrat vulnérable sur celui de sa valeur sans défaut est égale au rapport de l'obligation zéro-coupon d'échéance T- émise par le vendeur, ayant un taux de recouvement identique à celui de la jambe variable - sur l'obligation zéro-coupon sans risque de défaut de mêmes caractéristiques.

2.6. Swap "first-to-default" vulnérable, règlement anticipé au premier défaut.

2.6.1. Description du contrat et Hypothèses spécifiques.

Cette section concerne l'évaluation du taux de swap dans un cadre où le règlement de la jambe variable est anticipé. Nous savons que dans un contrat de swap de défaut, l'acheteur de la protection et le vendeur de la protection asssument chacun le risque de défaut de l'autre. Nous proposons donc de calculer le taux du swap "first-to-default" en prenant en compte à la fois l'éventualité d'un défaut du vendeur et de l'acheteur de la protection.
Ce contrat financier est alors soumis aux risques de défaut de $(n + 2)$ signatures : l'acheteur de la protection, le vendeur de la potection et les n signatures du

panier.
L'acheteur de la protection cherche à se défaire du premier défaut parmi les signatures du panier. Pour cela, tant qu'aucun défaut parmi les $(n+1)$ autres signatures n'est intervenu, il paie une commission périodique aux dates $T_i (1 \leq i \leq m)$. En revanche, s'il vient à faire défaut en premier et avant la date d'échéance, T, du contrat, il règle dès cette date au vendeur de la protection une compensation aléatoire égale à $Z_A(\tau_A)$.
Le vendeur de la protection se tient prêt à régler à l'acheteur un paiement contingent égal à $Z_{(1)}(\tau_{(1)})$ si l'un des débiteurs de référence est le premier à faire défaut avant l'échéance du contrat. Toutefois, au cas où il serait le premier à faire défaut, une compensation aléatoire, $Z_V(\tau_V)$, est versée à l'acheteur de la protection dès cette date.
Un tel contrat a une valeur nulle après le premier défaut parmi les $(n+2)$ signatures. Le premier défaut stoppe les paiements, une compensation est alors payée soit au vendeur soit à l'acheteur du contrat. Autrement dit, le vendeur et l'acheteur de la protection refusent le risque de défaut de l'autre et réclament une compensation.

La variable aléatoire τ_A (resp. τ_V) représente la date de défaut de l'acheteur (resp. du vendeur). C'est une variable aléatoire d'intensité λ_A (resp. λ_V) sous $\mathbb{Q}$, supposée non anticipative par rapport à la filtration des prix ou des taux $\mathbb{F}$. Le processus défini par $\Gamma_A(u) = \int_0^u \lambda_A(u)du$ (resp. $\Gamma_V(u) = \int_0^u \lambda_V(u)du$) désigne le processus de hasard de l'acheteur (resp. du vendeur).
Nous supposons ici que les dates de défaut $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, \tau_A$ et τ_V sont indépendantes conditionnellement à l'information sur les taux, sous $\mathbb{Q}$.
Le paiement contingent égal à $Z_{(1)}(\tau_{(1)})$, vérifie : $Z_{(1)} = \sum_{k=1}^n Z_k(\tau_k) 1_{\left(\tau_{(1)}=\tau_k; T \geq \tau_k\right)}$, où les Z_k $(1 \leq k \leq n)$ sont $\mathbb{F}$-prévisibles. Les compensations Z_A et Z_V sont $\mathbb{F}$-prévisibles.
On désigne par $\widetilde{\kappa}^{(1)}$ le taux du swap. Il est clair que sa valeur est nulle après le premier défaut. Nous prenons comme date de référence pour l'évaluation la date zéro.
Nous allons voir que nous pouvons assimiler ce contrat "first-to-default" vulnérable référencé sur le panier $\boldsymbol{\tau}$ à un autre contrat "first-to-default" non vulnérable referéncé sur le panier $\boldsymbol{\tau} \cup \{\tau_A, \tau_V\}$.
Posons

$$\begin{aligned} Z_A^V(\widetilde{\tau}_{(1)}) = & -Z_A(\tau_A) 1_{\left(\widetilde{\tau}_{(1)}=\tau_A; T \geq \tau_A\right)} + \sum_{k=1}^n Z_k(\tau_k) 1_{\left(\widetilde{\tau}_{(1)}=\tau_k; T \geq \tau_k\right)} \\ & + Z_V(\tau_V) 1_{\left(\widetilde{\tau}_{(1)}=\tau_V; T \geq \tau_V\right)}, \end{aligned}$$

où $\widetilde{\tau}_{(1)}$ désigne le premier défaut du panier $\boldsymbol{\tau} \cup \{\tau_A, \tau_V\}$.

Proposition 2.6.2.
Le taux de swap $\widetilde{\kappa}^{(1)}$ vérifie :

$$\widetilde{\kappa}^{(1)} = \frac{K_{Z_A^V}^{(1),\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_A,\tau_V\}}(0,T)}{\sum_{k=1}^{m} J_{\Delta_k}^{(1),\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_A,\tau_V\}}(0,T_k)}, \tag{8}$$

où

$$K_{Z_A^V}^{(1),\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_A,\tau_V\}}(0,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \frac{Z_j(u)}{B(u)}\left(e^{-\Gamma_A(u)-\Gamma_V(u)-\sum_{l\neq j}\Gamma_l(u)}\right)\lambda_j(u)e^{-\Gamma_j(u)}du \\ -\int_0^T \frac{Z_A(u)}{B(u)}\left(e^{-\Gamma_V(u)-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(u)}\right)\lambda_A(u)e^{-\Gamma_A(u)}du \\ +\int_0^T \frac{Z_V(u)}{B(u)}\left(e^{-\Gamma_A(u)-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(u)}\right)\lambda_V(u)e^{-\Gamma_V(u)}du \end{array}\right]$$

et

$$J_{\Delta_k}^{(1),\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_A,\tau_V\}}(0,T_k) = \Delta_k\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{e^{-\Gamma_A(T_k)-\Gamma_V(T_k)-\sum_{l=1}^{n}\Gamma_l(T_k)}}{B(T_k)}\right].$$

Preuve.
Les flux engendrés par cet instrument financier vérifient :

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{m}\widetilde{\kappa}^{(1)}\Delta_i 1_{\left(T_i<\tau_{(1)}\right)}1_{(T_i<\tau_A)}1_{(T_i<\tau_V)} - Z_A(\tau_A)1_{\left(\widetilde{\tau}_{(1)}=\tau_A;T\geq\tau_A\right)} \\ &+\sum_{k=1}^{n} Z_k(\tau_k)1_{\left(\widetilde{\tau}_{(1)}=\tau_k;T\geq\tau_k\right)} + Z_V(\tau_V)1_{\left(\widetilde{\tau}_{(1)}=\tau_V;T\geq\tau_V\right)}, \end{aligned}$$

où $\tau_{(1)}$ désigne le premier défaut du panier $\boldsymbol{\tau}$ et $\widetilde{\tau}_{(1)}$ représente le premier défaut du panier $\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_A,\tau_V\}$.
En remarquant que $1_{\left(T_i<\tau_{(1)}\right)}1_{(T_i<\tau_A)}1_{(T_i<\tau_V)} = 1_{\left(T_i<\widetilde{\tau}_{(1)}\right)}$, on est en présence d'un swap "first-to-default" non vulnérable referéncé sur le panier $\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_A,\tau_V\}$ avec une jambe variable égale à Z_A^V. On obtient alors le résultat en utilisant la proposition 2.2.

Remarques.
Comme pour la remarque de la proposition 2.2, le taux de swap vulnérable est un rapport de prix de deux instruments financiers soumis au risque de défaut. Le numérateur représente le prix d'un produit financier d'échéance T, référencé sur le panier $\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_A,\tau_V\}$ et à barrière activée en cas de premier défaut. Le dénominateur représente le prix d'une obligation couponnée, à recouvrement nul, promettant de payer aux dates T_k un flux monétaire égal à Δ_k $(1\leq k\leq m)$. Notons que pour ce dernier titre de créance, la date de défaut de son émetteur est une variable aléatoire à intensité risque neutre identique à celle de l'instant du premier défaut du panier $\boldsymbol{\tau}\cup\{\tau_A,\tau_V\}$.

Le swap "first-to-default" vulnérable, tel que décrit, permet d'envisager plusieurs clauses au gré du cédant et du cessionnaire des risques de défaut. On peut par exemple supposer qu'aucune des contreparties ne paie de compensation en cas de défaut. Il suffit alors de supposer que $Z_A = Z_B = 0$.
D'après l'expression du taux de swap, on peut conclure que la compensation promise par l'acheteur augmente la valeur du taux du swap vulnérable tandis que celle promise par le vendeur diminue le taux du swap vulnérable. Autrement dit, un swap "first-to-default" pour lequel le risque de défaut de l'acheteur est négligé a un taux sur-estimé tandis que lorsque le risque de défaut du vendeur est négligé, le taux de swap est sous-estimé.

Dans le cas où le vendeur et l'acheteur de la protection sont sans risque de défaut, c'est-à-dire si $\tau_A = \tau_V = +\infty,\ \lambda_A = \lambda_V = 0$ et $Z_A = Z_B = 0$, la formule (4.8) est alors identique à la formule (4.7) .
On retrouve le taux fixe du contrat de swap "first-to-default" non vulnérable de Duffie (1998).

D'autres situations liées au vendeur et à l'acheteur sont envisageables.

a) le vendeur de la protection est seul soumis au défaut. Il suffit de poser $\tau_V = +\infty,\ \lambda_V = 0$ et $Z_B = 0$.

b) L'acheteur de la protection est seul soumis au défaut. De même que précedemment, il suffit de poser $\tau_A = +\infty,\ \lambda_A = 0$ et $Z_A = 0$.

c) Ni le vendeur, ni l'acheteur de la protection ne sont soumis au défaut. Il suffit de poser $\tau_V = +\infty,\ \lambda_V = 0,\ Z_B = 0,\ \tau_A = +\infty,\ \lambda_A = 0$ et $Z_A = 0$.

Dans ces deux cas, l'expression du taux de swap vulnérable se déduit de (4.8) . La dernière situation est particulièrement intéressante, elle est équivalente au cadre proposé par Bielecki et Rutkowski (2001). On peut alors conclure que nos résultats généralisent ceux de ces auteurs.

3. Évaluation des produits dérivés sur marge de crédit.

3.1. Définition

A notre connaissance, seul Schönbucher (2000) s'est intéressé à l'évaluation des options sur marge de crédit.
Une option sur marge de crédit d'échéance T et de spread d'exercice $s(s > 0)$, portant sur une obligation zéro-coupon risquée d'échéance $U \ (U > T)$ et de prix spot $v(t, U)$, est un contrat financier donnant à son détenteur le droit d'échanger à la date T la valeur de l'obligation risquée $(v(T, U))$ contre une proportion d'obligation sans risque de défaut $(B(T, U))$. Cette proportion égale à

$\overline{S}$ est liée au spread d'exercice par la relation $\overline{S} = \exp(-s(U-T))$.

Dans cette partie, après une présentation (dans la section 3.2) des résultats obtenus par Schönbucher (2000), nous définirons puis évaluerons (dans la section 3.3) un contrat financier (l'option de marge sur crédit risquée) qui présente les mêmes avantages que l'option de vente sur marge de crédit.

3.2. Option de vente sur marge de crédit.
L'économie proposée par Schönbucher (2000) pour évaluer la prime de l'option de vente sur marge de crédit est similaire à celle décrite par Duffie (1998). Toutefois, pour déterminer la valeur de l'obligation zéro-coupon risquée, l'auteur envisage plusieurs évènements de crédit, chacun d'entre eux conduisant l'émetteur de la dette à une renégociation avec ses créanciers. Il suppose également que chaque défaut entraîne une décote de la valeur faciale de l'obligation zéro-coupon risquée. Pour évaluer une option de vente sur marge de crédit, il suppose que l'obligation zéro-coupon ne peut subir qu'un seul défaut. A la suite de cet évènement de crédit, l'obligation zéro-coupon subit une décote et continue d'être cotée. Cette spécificité lui permet de considérer son modèle comme une extension du modèle de recouvrement fractionnaire de la valeur de marché. En effet, le prix spot d'une obligation zéro-coupon risquée d'échéance U vérifie :

$$v(t,U) = Q(t)\widehat{B}(t,U),$$

où $Q(t) = 1_{(t<\tau)} + q1_{(t\geq\tau)}$. Le terme q, constant, représente la fonction de décote après le premier défaut ; $\widehat{B}(t,U)$ définit la valeur hors défaut de l'obligation risquée, elle s'assimile à une obligation sans risque de défaut de rendement sous $\mathbb{Q}$ égal à $r(t) + q\lambda(t)$.
On note qu'à une date antérieure au défaut, la valeur de $v(t,U)$ est la même que celle d'une obligation zéro-coupon soumise au schéma de recouvrement du type fractionnaire de la valeur de maché au taux $(1-q)$. Le terme q s'assimile alors au taux de perte enregistré par le titre obligataire à la suite du premier défaut.
Dans le cadre de Schönbucher, après le défaut l'obligation zéro-coupon s'identifie à une obligation zéro-coupon sans risque de défaut (dans un monde où le taux d'intérêt spot est égal à $r(t) + q\lambda(t)$) et de valeur faciale égale à q. De plus, l'information sur les prix ou les taux d'intérêt est engendrée par un $\mathbb{Q}$ mouvement brownien $(w(t))_{t\geq 0}$.

La dynamique de $\widehat{B}(t,U)$, proposée par Schönbucher (2000), est de la même forme que celle de Augros et Tchapda (2002). Elle vérifie

$$d\widehat{B}(t,U) = \widehat{B}(t,U)\left(r(t) + q\lambda(t)\,dt + \widehat{a}(t,U)dw(t)\right),$$

où $\widehat{a}(.,U)$ est supposée déterministe.
La dynamique du prix spot, $B(t,U)$, de l'obligation zéro-coupon sans risque de

défaut d'échéance U, est donnée par

$$dB(t,U) = B(t,U)\left(r(t)dt + a(t,U)dw(t)\right),$$

Notons par $\widehat{\gamma}(t,T)$ le différentiel de volatilité entre la valeur hors défaut de l'obligation risquée et celle de l'obligation sans risque de même date d'échéance U, $\widehat{\gamma}(t,U) = \widehat{a}(t,U) - a(t,U)$.

Remarque.
On a la relation suivante entre la marge de défaut ($\widetilde{\gamma}(t,T)$) correspondant à un recouvrement nul, et celle ($\widehat{\gamma}(t,T)$) correspondant à un taux de recouvrement égal à $(1-q)$:

$$\widetilde{\gamma}(t,T) = \frac{1}{q}\widehat{\gamma}(t,T).$$

On a aussi une relation entre la valeur "hors défaut" ($\widetilde{B}^0(t,T)$) de l'obligation zéro-coupon correspondant à un recouvrement nul et la valeur "hors défaut" ($\widehat{B}(t,T)$) de l'obligation zéro-coupon correspondant à un recouvrement égal à $(1-q)$. A savoir :

$$\widetilde{B}^0(t,T) = \left(\frac{\widehat{B}(t,T)}{B(t,T)^{1-q}}\right)^{\frac{1}{q}} \exp\left(\frac{1-q}{2q}\int_t^T \widehat{\gamma}^2(u,T)du\right).$$

Ces remarques permettent de retrouver les résultats du chapitre 3 dans le cadre de Schönbucher.

D'après la définition 3.1, la fonction de paiement de l'option de vente sur marge de crédit d'échéance T vérifie :

$$(\overline{S}B(T,U) - v(T,U))^+.$$

Il en résulte alors que son prix spot $CSP(t)$ est défini par :

$$\begin{aligned} CSP(t) &= B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}B(T,U) - v(T,U))^+}{B(T)}|\mathcal{G}_t\right] \\ &= B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}B(T,U) - v(T,U))^+ 1_{(T<\tau)}}{B(T)}|\mathcal{G}_t\right] \\ &+ B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}B(T,U) - v(T,U))^+ 1_{(T\geq\tau)}}{B(T)}|\mathcal{G}_t\right]. \end{aligned}$$

Schönbucher suppose de plus que l'option est dans la monnaie en cas de défaut. Cette hypothèse semble tout à fait réaliste. En effet, en cas de défaut, on a une dégradation de la valeur du titre risqué. Ainsi,

$$(\overline{S}B(T,U) - v(T,U))^{+}1_{(T\geq\tau)} = (\overline{S}B(T,U) - v(T,U))1_{(T\geq\tau)}.$$

La prime de l'option vérifie :

$$\begin{aligned} CSP(t) = {} & B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}B(T,U) - v(T,U))^{+}1_{(T<\tau)}}{B(T)}|\mathcal{F}_t\right] \\ & + B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}B(T,U) - v(T,U))1_{(T\geq\tau)}}{B(T)}|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Elle s'exprime alors comme la somme de deux termes.

Le premier terme, noté $CSP\overline{D}(t)$, vérifie :

$$CSP\overline{D}(t) = B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}B(T,U) - v(T,U))^{+}1_{(T<\tau)}}{B(T)}|\mathcal{F}_t\right].$$

C'est une option sur marge de crédit, avec une barrière désactivée en cas de défaut. Elle permet de se couvrir seulement contre l'écart de crédit. Ainsi, le risque de défaut de l'émetteur de l'obligation risquée est transféré vers les investisseurs. Le vendeur de cette option de type binaire n'assume que le risque de dégradation du prix de l'obligation risquée à la date T.

Le second terme, noté $CSPD(t)$, vérifie

$$\begin{aligned} CSPD(t) = {} & B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}B(T,U) - v(T,U))1_{(T\geq\tau)}}{B(T)}|\mathcal{F}_t\right] \\ = {} & \overline{S}B(t,U) - v(t,U) - 1_{(t<\tau)}\widetilde{B}(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}B(T,U) - \widehat{B}(T,U))}{\widetilde{B}(T)}|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Il s'identifie à un contrat d'échange (du titre risquée contre une proportion du titre non risquée) à barrière. Cette barrière étant activée si à l'échéance T, l'émetteur de l'obligation risquée est en défaut. L'échange a lieu uniquement en cas de défaut de l'émetteur du titre risqué. Ainsi, $CSDP(t)$ représente le coût du risque de défaut de l'émetteur de l'obligation risquée.

Notons $\gamma(t,T,U) = a(t,U) - a(t,T)$ le différentiel de volatilité entre l'obligation zéro-coupon sans risque d'échéance U et celle d'échéance T.
Schönbucher (2000) obtient des formules fermées pour $CSP\overline{D}(t)$ et $CSPD(t)$.

$$\begin{aligned} CSP\overline{D}(t) = {} & \overline{S}\widetilde{B}^{0}(t,T)\frac{B(t,U)}{B(t,T)}\exp\left(\frac{1}{q}\int_t^T \gamma(s,T,U)\widehat{\gamma}(s,T)ds\right)\Phi(d_1 \\ & -\widetilde{B}^{0}(t,T)\frac{\widehat{B}(t,U)}{\widehat{B}(t,T)}\exp\left(\frac{1-q}{q})\int_t^T \widehat{\gamma}(s,T,U)\widehat{\gamma}(s,T)ds\right)\Phi\left(d_2\right), \end{aligned}$$

les termes d_1 et d_2 vérifient

$$d_1 = \frac{K+F+V}{\sqrt{V}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sqrt{V}$$

où

$$\begin{aligned}
K &= \ln \overline{S} + \ln \frac{\widehat{B}(t,T)}{B(t,T)} - \ln \frac{\widehat{B}(t,U)}{B(t,U)} \ ; \\
F &= \exp\left(\frac{1}{q}\int_t^T \widehat{\gamma}(u,T)\left(\gamma(s,T,U) - (1-q)\widehat{\gamma}(s,T,U)\right) ds\right) \ ; \\
V &= \int_t^T \left(\widehat{\gamma}(s,T,U) - \gamma(s,T,U)\right)^2 ds.
\end{aligned}$$

On a $CSPD(t)$ qui vérifie :

$$\begin{aligned}
CSPD(t) = {} & \overline{S}B(t,U) - v(t,U) \\
& -1_{(t<\tau)}\overline{S}B(t,U)\frac{\widetilde{B}^0(t,T)}{B(t,T)}\exp(-\frac{1}{q}\int_t^T \widehat{\gamma}(s,T)\gamma(s,T,U)ds) \\
& +1_{(t<\tau)}\widehat{B}(t,U)\frac{\widetilde{B}^0(t,T)}{\widehat{B}(t,T)}\exp(\frac{1-q}{q}\int_t^T \widehat{\gamma}(s,T)\widehat{\gamma}(s,T,U)ds).
\end{aligned}$$

3.3. Option de vente sur marge de crédit risquée.

Nous proposons maintenant d'évaluer une variante de l'option sur écart de crédit, qualifiée d'option de vente sur marge de crédit risquée.

L'acheteur d'un tel contrat financier se protège contre la dégradation de la valeur d'un titre risqué par rapport à celle d'un titre risqué ayant une meilleure qualité de crédit.

C'est le cas par exemple d'un gestionnaire qui a investi dans les obligations notées $Baa3$ et qui anticipe sur la dégradation de la valeur de ces dernières. Il souhaite se couvrir contre un écartement de spread par rapport aux obligations notées Aaa. Il peut donc acheter une option de vente sur marge de crédit risquée, qui lui donnera le droit d'échanger une obligation notée $Baa3$ contre une proportion d'une obligation notée Aaa.

Sous certaines hypothèses, que nous analyserons dans la suite, il est possible de donner une formule analytique donnant la prime de cette option sur marge de crédit risquée. Nous montrerons de plus que le cas précédent, traité par Schönbucher (2000), est un exemple d'option sur marge de crédit risquée.

3.3.1. Hypothèses spécifiques.

Notons par $v_1(t,U)$ (resp. $v_2(t,U)$) le prix spot de l'obligation zéro-coupon d'échéance U, ayant la moins (resp. plus) bonne qualité de crédit. La variable aléatoire τ_1 (resp. τ_2) représente la date de défaut de l'émetteur D_1 (resp. D_2) de $v_1(t,U)$ (resp. $v_2(t,U)$) ; elle admet pour intensité sous $\mathbb{Q}$, λ_1 (resp. λ_2).

- Les hypothèses 1, 2, 3 et 4 du paragraphe 4.1 du chapitre 3, sont valables dans cette section, avec $E = 1$ et $V = 2$.

- Nous supposons, comme dans le modèle de Schönbucher (2000) que le titre risqué émis par D_1 (resp. D_2) subi une décote, constante, égale à q_1 (resp. q_2), à la date de défaut de son émetteur.

Il en résulte alors d'après nos hypothèses et les résultats de la section précédente que :

$$v_1(t,U) = Q_1(t)\,\widehat{B}_1(t,U) \quad \text{et} \quad v_2(t,U) = Q_2(t)\,\widehat{B}_2(t,U),$$

où $Q_i(t) = 1_{(t<\tau_i)} + q_i 1_{(t\geq\tau_i)}$, $\widehat{B}_i(t,U)$ représente la valeur hors défaut du titre risqué R_i, $i = 1,2$.

- La dynamique de $\widehat{B}_i(t,U)$ sous $\mathbb{Q}$ est donnée par :

$$d\widehat{B}_i(t,U) = \widehat{B}_i(t,U)\left(r(t)dt + q_i\lambda_i(t)dt + \widehat{a}_i(t,U)dw(t)\right),$$

où $\widehat{a}_i(.,U)$ est supposée déterministe. On note par $\widehat{\gamma}_i(t,U)$, $i = 1,2$, le différentiel de volatilité entre $\widehat{B}_i(t,U)$ et $B(t,T)$.

Nous supposons enfin que :

i) l'option est dans la monnaie, si à l'échéance, D_1 est en défaut ;

ii) l'option est en dehors de la monnaie, si à l'échéance, D_2 est en défaut tandis que D_1 ne l'est pas.

Les hypothèses *i*) et *ii*) semblent tout à fait réalistes.

En effet, dans le cas *i*), lorsque l'émetteur D_1 est en défaut, on a une dégradation de la valeur de sa dette (par rapport à une proportion de celle de l'émetteur D_2), quelque soit la situation de D_2. Ainsi, l'option de vente sera dans la monnaie.

Dans le cas *ii*), lorsque D_2 est en défaut et que D_1 ne l'est pas, on a une plus forte dégradation de la valeur du titre émis par D_2. Ainsi, l'option de vente sera en dehors de la monnaie.

3.3.2. Évaluation.

Considérons une option sur marge de crédit risquée d'échéance T, de spread d'exercice s, écrit sur $v_1(t,U)$ par rapport au titre $v_2(t,U)$. Notons par $\widetilde{C}SP(t)$ son prix spot.

Sa fonction de paiement à l'échéance, $\widetilde{C}SP(T)$, vérifie :

$$\widetilde{C}SP(T) = (\overline{S}Q_2(T)\,\widehat{B}_2(T,U) - Q_1(T)\,\widehat{B}_1(T,U))^+,$$

où $\overline{S} = \exp(-s(U-T))$.
Des hypothèses $i)$ et $ii)$, on en déduit que la prime de l'option $\widetilde{C}SP(t)$ vérifie alors :

$$\widetilde{C}SP(t) = B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}Q_2\,(T)\,\widehat{B}_2(T,U) - Q_1\,(T)\,\widehat{B}_1(T,U))^+ 1_{(T<\tau_1)} 1_{(T<\tau_2)}}{B(T)} | \mathcal{G}_t\right]$$
$$+B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}Q_2\,(T)\,\widehat{B}_2(T,U) - q_1 \widehat{B}_1(T,U)) 1_{(T\geq\tau_1)}}{B(T)} | \mathcal{G}_t\right].$$

Posons

$$\widetilde{C}SP\overline{D}(t) = B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}Q_2\,(T)\,\widehat{B}_2(T,U) - Q_1\,(T)\,\widehat{B}_1(T,U))^+ 1_{(T<\tau_1)} 1_{(T<\tau_2)}}{B(T)} | \mathcal{G}_t\right].$$

et

$$\widetilde{C}SPD(t) = B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}Q_2\,(T)\,\widehat{B}_2(T,U) - q_1 \widehat{B}_1(T,U)) 1_{(T\geq\tau_1)}}{B(T)} | \mathcal{G}_t\right].$$

Comme dans la section précédente, l'option sur marge de crédit risquée s'écrit comme la somme de deux termes.

Le premier, égal à $\widetilde{C}SP\overline{D}(t)$, représente le prix d'une option sur marge de crédit de type binaire. Il protège uniquement contre le risque de dégradation de la valeur du titre R_1. La barrière est désactivée en cas de survenance du premier défaut. Ainsi, le vendeur de cet instrument financier transfère vers les investisseurs les risques de défaut.

Le second, égal à $\widetilde{C}SPD(t)$, peut s'écrire :

$$\widetilde{C}SPD(t) = B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}\widehat{B}_2(T,U) - q_1 \widehat{B}_1(T,U)) 1_{(T\geq\tau_1)} 1_{(T<\tau_2)}}{B(T)} | \mathcal{G}_t\right]$$
$$+B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}q_2\widehat{B}_2(T,U) - q_1 \widehat{B}_1(T,U)) 1_{(T\geq\tau_1)} 1_{(T\geq\tau_2)}}{B(T)} | \mathcal{G}_t\right].$$

Il s'écrit comme une somme de deux termes.
Le premier est un contrat d'échange du titre risquée émis par D_1 contre une proportion de celui émis par D_2. C'est un instrument financier dont les flux à l'échéance sont soumis à deux barrières de défaut ; la première désactivée si à l'échéance D_2 est en défaut, la seconde activée si à l'échéance D_1 est en défaut. Ainsi, Il protège son détenteur contre le risque de défaut de D_1 mais pas contre celui de D_2.
Le second possède les mêmes caractéristiques que le premier. La seule différence est liée aux deux barrières qui, cette fois, sont toutes activées lors de la survenance des défauts. Il protège donc contre les deux risques de défaut, celui de D_1 et celui

de D_2.

Nous allons, comme dans la section précédente, donner une formule analytique pour $\widetilde{CSP\overline{D}}(t)$ et $\widetilde{CSPD}(t)$.
Considérons les obligations zéro-coupon d'échéance T dont le rendement sous $\mathbb{Q}$ est égal à $r(t)+\lambda_i(t)$ (resp.$r(t)+\lambda_1(t)+\lambda_2(t)$), $i=1,2$, c'est-à-dire ayant pour valeur $\widetilde{B}_i^0(t,T)$ (resp. $\widetilde{B}_{1,2}^0(t,T)$).
Nous savons alors d'après Augros et Tchapda (2002) que $\widetilde{B}_{1,2}^0(t,T)$ vérifie

$$\widetilde{B}_{1,2}^0(t,T)=\widetilde{B}_1^0(t,T)\frac{\widetilde{B}_2^0(t,T)}{B(t,T)}\exp\left(\frac{1}{q_1q_2}\int_t^T\widehat{\gamma}_1(s,T)\widehat{\gamma}_2(s,T)ds\right),$$

où $\widehat{\gamma}_i(t,T)$, $i=1,2$, représente le différentiel de volatilité entre $\widehat{B}_i(t,T)$ et $B(t,T)$.

Proposition 3.2.4.
Le prix spot, $\widetilde{CSPD}(t)$, de l'option sur marge de crédit de type binaire est égal à :

$$\begin{aligned}
&-\overline{S}(1-q_2)1_{(t<\tau_1)}1_{(t<\tau_2)}\widetilde{B}_{1,2}^0(t,T)\frac{\widehat{B}_2(t,U)}{\widehat{B}_2(t,T)}\exp\begin{pmatrix}-(1-\frac{1}{q_2})\int_t^T\widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_2(s,T)ds\\ -\frac{1}{q_1}\int_t^T\widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds\end{pmatrix}\\
&+\overline{S}v_2(t,U)-v_1(t,U)\\
&+1_{(t<\tau_1)}\widetilde{B}_1^0(t,T)\frac{\widehat{B}_1(t,U)}{\widehat{B}_1(t,T)}\exp\left(-\frac{1-q_1}{q_1}\int_t^T\widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds\right)\\
&-\overline{S}q_21_{(t<\tau_1)}\widetilde{B}_1^0(t,T)\frac{\widehat{B}_2(t,U)}{\widehat{B}_2(t,T)}\exp\left(\int_t^T\widehat{\gamma}_2(s,T,U)(\frac{1}{q_1}\widehat{\gamma}_1(s,T)-\widehat{\gamma}_2(s,T))ds\right),
\end{aligned}$$

où $\widehat{\gamma}_i(t,T,U)=\widehat{a}_i(t,U)-\widehat{a}_i(t,T)$ est le différentiel de volatilité entre $\widehat{B}_i(t,U)$ et $\widehat{B}_i(t,T)$.
Preuve. Voir annexe.

Proposition 3.2.5.

$$\widetilde{CSP\overline{D}}(t)=\overline{Z}_A(t)\Phi(d_1)-\overline{Z}_B(t)\Phi\left(d_2\right)$$

où

$$\overline{Z}_A(t)=\overline{S}\widetilde{B}_{1,2}^0(t,T)\frac{\widehat{B}_2(t,U)}{\widehat{B}_2(t,T)}\exp\left(\int_t^T\left[\frac{1}{q_1}\widehat{\gamma}_1(s,T)+\frac{1-q_2}{q_2}\widehat{\gamma}_2(s,T)\right]ds\right),$$

$$\overline{Z}_B(t)=\widetilde{B}_{1,2}^0(t,T)\frac{\widehat{B}_1(t,U)}{\widehat{B}_1(t,T)}\exp\left(\int_t^T\left[\frac{1-q_1}{q_1}\widehat{\gamma}_1(s,T)+\frac{1}{q_2}\widehat{\gamma}_2(s,T)\right]ds\right).$$

Les termes d_1 et d_2 sont déterminés par

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{\overline{S}\widehat{B}_2(t,U)\widehat{B}_1(t,T)\exp\left(\begin{array}{c}\frac{1-q_2}{q_2}\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_2(s,T)ds \\ +\frac{1}{q_1}\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds\end{array}\right)}{\widehat{B}_1(t,U)\widehat{B}_2(t,T)\exp\left(\begin{array}{c}\frac{1-q_1}{q_1}\int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \\ +\int_t^T \frac{1}{q_2}\widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_2(s,T)ds\end{array}\right)}\right] + \int_t^T \left(\widehat{\gamma}_1(s,T,U)-\widehat{\gamma}_2(s,T,U)\right)^2 ds}{\sqrt{\int_t^T \left(\widehat{\gamma}_1(s,T,U)-\widehat{\gamma}_2(s,T,U)\right)^2 ds}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_t^T \left(\widehat{\gamma}_1(s,T,U)-\widehat{\gamma}_2(s,T,U)\right)^2 ds}.$$

Preuve. Voir annexe.

Remarques.
L'option sur marge de crédit classique, proposée par Schönbucher (2000), est un cas particulier d'option sur marge de crédit risquée pour lequelle l'émetteur D_2 est supposé sans risque de défaut.
Dans ce cas, en utilisant la convention introduite au chapitre 3, on a $\tau_2 = +\infty$. Il vient alors que $\lambda_2 = 0$, $q_2 = 0$, $\widehat{B}_2(t,T) = B(t,T)$,
$v_2(t,U) = B(t,U)$, $\widetilde{B}^0_{1,2}(t,T) = \widetilde{B}^0_1(t,T)$ et $\widehat{\gamma}_2(s,T,U) = \gamma(s,T,U)$.

- La proposition 4.2.4 nous donne alors

$$\begin{aligned}\widetilde{C}SPD(t) = {} & \overline{S}B(t,U) - v_1(t,U) \\ & +1_{(t<\tau_1)}\widehat{B}_1(t,U)\frac{\widetilde{B}^0_1(t,T)}{\widehat{B}_1(t,T)}\exp\left(\frac{1-q_1}{q_1}\int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds\right) \\ & -\overline{S}1_{(t<\tau_1)}\widetilde{B}^0_1(t,T)\frac{B(t,U)}{B(t,T)}\exp\left(-\frac{1}{q_1}\int_t^T \gamma(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds\right)\end{aligned}$$

- La proposition 4.2.3 nous donne

$$\widetilde{C}SP\overline{D}(t) = \left[\overline{Z}_A(t)\Phi(d_1) - \overline{Z}_B(t)\Phi(d_2)\right]$$

où

$$\overline{Z}_A(t) = \overline{S}\widetilde{B}^0_1(t,T)\frac{B(t,U)}{B(t,T)}\exp\left(\frac{1}{q_1}\int_t^T \gamma(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds\right),$$

et

$$\overline{Z}_B(t) = \widetilde{B}^0_1(t,T)\frac{\widehat{B}_1(t,U)}{\widehat{B}_1(t,T)}\exp\left(\frac{1-q_1}{q_1})\int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds\right).$$

Les termes d_1 et d_2 vérifient :

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{\overline{S}B(t,U)\widehat{B}_1(t,T)\exp\left(\frac{1}{q_1}\int_t^T \gamma(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds\right)}{\widehat{B}_1(t,U)B(t,T)\exp\left(-(1-\frac{1}{q_1})\int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds\right)}\right] + \int_t^T \left(\widehat{\gamma}_1(s,T,U)-\gamma(s,T,U)\right)^2 ds}{\sqrt{\int_t^T \left(\widehat{\gamma}_1(s,T,U)-\gamma(s,T,U)\right)^2 ds}}$$

$$d_2 = d_1 - \int_t^T \left(\widehat{\gamma}_1(s,T,U)-\gamma(s,T,U)\right)^2 ds.$$

On retrouve les résultats obtenus par Schönbucher (2000).

L'option sur marge de crédit risquée, telle que décrite, est un exemple de contrat "first-to-default" représenté par

$DCT = \left((\overline{S}\widehat{B}_2(T,U) - \widehat{B}_1(T,U))^+, 0, \widetilde{X}_{(1)}, 0, \boldsymbol{\tau} = (\tau_1,\tau_2)\right)$, où

$$\widetilde{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} (\overline{S}\widehat{B}_2(T,U) - q_1\widehat{B}_1(T,U))1_{\left(\tau_{(1)}=\tau_1;\ \tau_1\le T<\tau_2\right)} \\ +(\overline{S}q_2\widehat{B}_2(T,U) - q_1\widehat{B}_1(T,U))1_{\left(\tau_{(1)}=\tau_1;\ T\ge\tau_1;\ T\ge\tau_2\right)} \end{bmatrix}.$$

Conclusion.

Cet article nous a permis de montrer que la méthode d'évaluation prenant en compte l'éventualité d'un défaut du vendeur de la protection s'applique aussi à la tarification des produits dérivés de crédit référencés sur un panier de signatures. Des applications de cette méthodologie ont été proposées à l'évaluation des produits dérivés titrisés cashs et de certains contrats de swap de défaut référencés sur un panier de signatures. Elles nous ont permis de prolonger certains résultats de Bielecki et Rutkowski (2001).

Dans le cas où les règlements interviennent à la date d'échéance du contrat, nous avons établis des formules fermées similaires à celles de ces derniers auteurs. La différence est liée au fait qu'elles sont exprimées au moyen de la probabilité forward-neutre de défaut associée à une obligation zéro-coupon risquée émise par le vendeur. Dans ce cas, des relations similaires à celles du chapitre précédent ont été établies entre produits dérivés vulnérables et produits dérivés non vulnérables.

Dans le cas d'un règlement anticipé, nous avons montré que les instruments financiers vulnérables cashs soumis à un panier de débiteurs s'évaluent comme des instruments financiers non vulnérables soumis à un panier de débiteurs contenant une signature en plus.

Dans cet article, nous avons pris en compte l'éventualité d'un défaut de l'acheteur et du vendeur de la protection pour certains contrats dont le swap "first-to-default". Pour ce dernier instrument financier pour lequel la récupération est anticipée, nous avons montré qu'on pouvait l'évaluer comme un swap "first-to-default" non vulnérable. Toutefois, ce dernier contrat est referéncé sur un panier contenant en plus la signature du vendeur et celle de l'acheteur de la protection. Par ailleurs, nous avons analysé certains cas particuliers de swaps "first-to-default" conduisant à des expressions analytiques de la marge. Pour ces situations, nous avons mis en évidence l'impact du taux de recouvrement du titre sous jacent sur le taux de swap de défaut. Ce qui nous a permis par la suite d'exhiber les taux de swap maximum.

Enfin, l'introduction d'un contrat financier, l'option de vente sur marge de crédit risquée, nous a permis de généraliser les résultats de Schönbucher (2000). Nous avons montré que ce type de produit financier, qui est un contrat d'échange entre titres soumis au risque de défaut, présente les mêmes avantages qu'une option de vente sur marge de crédit classique. Ce produit financier offre aux investisseurs la possibilité de réduire le coût en assumant un risque de défaut supplémentaire. Les résultats obtenus pour ce dernier instrument financier peuvent être généralisés en prenant en compte l'éventualité d'un défaut du vendeur.

Références.

AUGROS J.C. et TCHAPDA DJAMEN I., "Évaluation dans un univers forward-neutre, de produits de taux d'intérêt soumis au défaut", *Cahier de recherche de l'ISFA*, 2000, *Finance vol* 23 $n^0 1$, *Juin* 2002.

BÉLANGER A., SHREVE S.E. and WONG D. "A Unified Model for Credit Derivatives", *preprint*, 2001.

BIELECKI T. and RUTKOWSKI M., "Credit Risk : Modelling, Valuation and Hedging", *Springer*, 2001.

BLANCHET-SCALLIET C. and JEANBLANC M., "Hazard rate for credit risk and hedging defaultable contingent claims", *Working paper*, *Université d'Evry Val d'Essonne*, 2000.

BRUNEL V. et DE LA NOUE P. "Dérivés de crédit : quelle utilisation" *Revue Quants numéro* 40, 2001

BRUYERE P. "Les produits dérivés de crédit", *Economica*, 1998

CHAZOT C., CLAUDE P., "Les Swaps : Concepts et applications", *Economica,* 1999.

DUFFIE D., "Modèles dynamiques d'évaluation", *puf*, 1994.

DUFFIE D., "First to Default Valuation", *Working paper*, *Stanford University*, 1998.

DUFFIE D. and SINGLETON K., "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds", *The Review of Financial Studies*, 1999, p.687 − 720.

ELLIOTT R.J., JEANBLANC M. et YOR M., " On Models of Default Risk", *Mathematical Finance*, 10, 2000, p.179 − 196.

GAUVIN A. “la nouvelle gestion du risque financier”, *Librairie Générale de Droit et de Jurisprudence*, EJA, 2000.

D’HEROUVILLE P., MATHIEU P. “Les dérivés de crédit” : une nouvelle gestion du risque de crédit”, *Economica,* 1998.

JEANBLANC M. et RUTKOWSKI M., “Modelling of Default Risk : An Overview” *Mathematical Finance : Theory and practice, Fudan University.* Forthcoming in modern Mathematics Series, High Education Press. Beijin, 1999.

GEMAN H., EL KAROUI N. et ROCHET J.C., “Changes of Numeraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing”, *Journal of Applied Probability*, 32, 1995, p. 443 – 458.

JARROW R. and TURNBULL S. “Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk”, *Journal of Finance* 50, 1995, p. 53 – 85.

KIJIMA M. and MUROMACHI “Credit events and the valuation of credit derivatives of basket type” *Rev. Derivatives Research* 4, (2000) , p. 55-79.

KUSUOKA “Ramarks on default risk models”, *Adv. Math. Econ. 1,* p. 69 – 82, 1999.

LAURENT J.P. “Les dérivés de crédit, la titrisation”, *Revue d’Economie Financière, numéro* 59, 2000.

LI D.X., “The valuation of the i-th-to-default basket credit derivatives” *Working paper, RiskMetrics Group,* 1999.

SCHÖNBUCHER P.J., “Credit Risk Modelling and Credit Derivatives”, *Ph.D dissertation, University of Bonn,* 2000.

Annexe.

Preuve de la proposition 3.2.4.
On sait que

$$\widetilde{C}SPD(t) = B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}v_2\,(T,U) - v_1(T,U))1_{(T\geq\tau_1)}}{B(T)}|\mathcal{G}_t\right].$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\widetilde{C}SPD(t) =& \overline{S}v_2(t,U) - v_1(t,U)\\ &-\overline{S}B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{v_2\,(T,U)\,1_{(T<\tau_1)}}{B(T)}|\mathcal{G}_t\right]\\ &+B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{v_1(T,U)1_{(T<\tau_1)}}{B(T)}|\mathcal{G}_t\right].\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}v_2\,(T,U)\,1_{(T<\tau_1)} =& \widehat{B}_2\,(T,U)\,1_{(T<\tau_1)}1_{(T<\tau_2)} + q_2\widehat{B}_2\,(T,U)\,1_{(T\geq\tau_2)}1_{(T<\tau_1)}\\ =& (1-q_2)\widehat{B}_2\,(T,U)\,1_{(T<\tau_1)}1_{(T<\tau_2)} + q_2\widehat{B}_2\,(T,U)\,1_{(T<\tau_1)},\end{aligned}$$

et

$$v_1(T,U)1_{(T<\tau_1)} = \widehat{B}_1\,(T,U)\,1_{(T<\tau_1)},$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}\widetilde{C}SPD(t) =& \overline{S}v_2(t,U) - v_1(t,U)\\ &-\overline{S}(1-q_2)B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_2\,(T,U)\,1_{(T<\tau_1)}1_{(T<\tau_2)}}{B(T)}|\mathcal{G}_t\right]\\ &+B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{+\widehat{B}_1\,(T,U)\,1_{(T<\tau_1)} - \overline{S}q_2\widehat{B}_2\,(T,U)\,1_{(T<\tau_1)}}{B(T)}|\mathcal{G}_t\right].\end{aligned}$$

Comme $\widehat{B}_1\,(T,U)$ et $\widehat{B}_1\,(T,U)$ sont uniquement contingents aux taux, on combine l'hypothèse selon laquelle les dates de défaut de D_1 et D_2 sont conditionnellement indépendantes connaissant l'information sur les prix et le corollaire 3.1 de Jeanblanc et Rutkowski (2000), on obtient :

$$\begin{aligned}\widetilde{C}SPD(t) =& \overline{S}v_2(t,U) - v_1(t,U)\\ &-\overline{S}(1-q_2)1_{(t<\tau_1)}1_{(t<\tau_2)}\widetilde{B}_{1,2}(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_2(T,U)}{\widetilde{B}_{1,2}(T)}|\mathcal{F}_t\right]\\ &+1_{(t<\tau_1)}\widetilde{B}_1(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_1\,(T,U)}{\widetilde{B}_1(T)}|\mathcal{F}_t\right]\\ &-\overline{S}q_2 1_{(t<\tau_1)}\widetilde{B}_1(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_2(T,U)}{\widetilde{B}_1(T)}|\mathcal{F}_t\right],\end{aligned}$$

où $\widetilde{B}_{12}(t) = \exp\left(\int_0^t (r(s) + \lambda_1(s) + \lambda_2(s))\, ds\right)$ et $\widetilde{B}_1(t) = \exp\left(\int_0^t (r(s) + \lambda_1(s))\, ds\right)$.
Pour avoir la valeur de $\widetilde{C}SPD(t)$, il nous faut évaluer les trois termes

$$\widetilde{B}_{1,2}(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_2(T,U)}{\widetilde{B}_{1,2}(T)}|\mathcal{F}_t\right],\ \widetilde{B}_1(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_1(T,U)}{\widetilde{B}_1(T)}|\mathcal{F}_t\right]$$

$$\text{et } \widetilde{B}_1(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_2(T,U)}{\widetilde{B}_1(T)}|\mathcal{F}_t\right].$$

Pour ce faire, on utilise la technique de changement de numéraire. On obtient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_{1,2}(t))\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_2(T,U)}{\widetilde{B}_{1,2}(T)}|\mathcal{F}_t\right] &= \widetilde{B}^0_{1,2}(t,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{1,2}_T}\left[\widehat{B}_2(T,U)|\mathcal{F}_t\right] \ ; \\
\widetilde{B}_1(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_1(T,U)}{\widetilde{B}_1(T)}|\mathcal{F}_t\right] &= \widetilde{B}^0_1(t,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^1_T}\left[\widehat{B}_1(T,U)|\mathcal{F}_t\right] \ ; \\
\text{et } \widetilde{B}_1(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_2(T,U)}{\widetilde{B}_1(T)}|\mathcal{F}_t\right] &= \widetilde{B}^0_1(t,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^1_T}\left[\widehat{B}_2(T,U)|\mathcal{F}_t\right],
\end{aligned}$$

où $\mathbb{Q}^1_T$ représente l'univers associé au numéraire de prix $v^0_1(t,T)$, $\quad i = 1,2$; $\mathbb{Q}^{1,2}_T$ est l'univers associé au numéraire $v^0_{1,2}(t,T)$. On sait alors que

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{Q}^1_T}{d\mathbb{Q}}|\mathcal{F}_t &= \frac{\widetilde{B}^0_1(t,T)}{\widetilde{B}^0_1(0,T)\widetilde{B}_1(t)} \\
\text{et } \frac{d\mathbb{Q}^{1,2}_T}{d\mathbb{Q}}|\mathcal{F}_t &= \frac{\widetilde{B}^0_{1,2}(t,T)}{\widetilde{B}^0_{1,2}(0,T)\widetilde{B}_1(t)}.
\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à exprimer $\widehat{B}_1(T,U)$ et $\widehat{B}_2(T,U)$ sous $\mathbb{Q}^1_T$; puis $\widehat{B}_2(T,U)$ sous $\mathbb{Q}^{1,2}_T$.
Sous $\mathbb{Q}^1_T$ on a :

$$\widehat{B}_1(T,U) = \frac{\widehat{B}_1(t,U)}{\widehat{B}_1(t,T)}\exp\begin{pmatrix} \int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)d\widetilde{w}^T_1(s) - \frac{1}{2}\int_t^T (\widehat{\gamma}_1(s,T,U))^2\, ds \\ -(1-\frac{1}{q_1})\int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \end{pmatrix},$$

et

$$\widehat{B}_2(T,U) = \frac{\widehat{B}_2(t,U)}{\widehat{B}_2(t,T)}\exp\begin{pmatrix} \int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)d\widetilde{w}^T_1(s) - \frac{1}{2}\int_t^T (\widehat{\gamma}_2(s,T,U))^2\, ds \\ \int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)(+\frac{1}{q_1}\widehat{\gamma}_1(s,T) - \widehat{\gamma}_2(s,T))ds \end{pmatrix},$$

où $\widetilde{w}^T_1$ est un $\mathbb{F}$ mouvement brownien sous $\mathbb{Q}^1_T$ satisfaisant

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}^T_1(t) &= w(t) - \int_0^t \widetilde{a}_1(s,T)ds \\
&= w(t) - \int_0^t \left(\frac{1}{q_1}\widehat{\gamma}_1(s,T) + a(s,T)\right)ds\ 0 \le t \le T.
\end{aligned}$$

De même, sous $\mathbb{Q}_T^{1,2}$ on a :

$$\widehat{B}_2(T,U) = \frac{\widehat{B}_2(t,U)}{\widehat{B}_2(t,T)} \exp\begin{pmatrix} \int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)d\widetilde{w}^T(s) - \frac{1}{2}\int_t^T (\widehat{\gamma}_2(s,T,U))^2 \, ds \\ -(1-\frac{1}{q_2})\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_2(s,T)ds \\ +\frac{1}{q_1}\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \end{pmatrix},$$

où $\widetilde{w}^T$ est un $\mathbb{F}$ mouvement brownien sous $\mathbb{Q}_T^{1,2}$ satisfaisant

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}^T(t) &= w(t) - \int_0^t \left(\widetilde{a}_i(s,T) + \widetilde{\gamma}_j(s,T)\right) ds \\
&= w(t) - \int_0^t \left(\frac{1}{q_i}\widehat{\gamma}_i(s,T) + a(s,T) + \frac{1}{q_j}\widehat{\gamma}_j(s,T)\right) ds \\
&= w_1^T(t) - \frac{1}{q_2}\int_0^t \widehat{\gamma}_2(s,T)ds, \ 0 \le t \le T.
\end{aligned}$$

Il en résulte finalement que :

$$\widetilde{B}_{1,2}(t))\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_2(T,U)}{\widetilde{B}_{1,2}(T)}|\mathcal{F}_t\right] = \widetilde{B}^0_{1,2}(t,T)\frac{\widehat{B}_2(t,U)}{\widehat{B}_2(t,T)} \exp\begin{pmatrix} -(1-\frac{1}{q_2})\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_2(s,T)ds \\ -\frac{1}{q_1}\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{B}_1(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_1(T,U)}{\widetilde{B}_1(T)}|\mathcal{F}_t\right] = \widetilde{B}^0_1(t,T)\frac{\widehat{B}_1(t,U)}{\widehat{B}_1(t,T)} \exp\left(-(1-\frac{1}{q_1})\int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds\right)$$

et

$$\widetilde{B}_1(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\widehat{B}_2(T,U)}{\widetilde{B}_1(T)}|\mathcal{F}_t\right] = \widetilde{B}^0_1(t,T)\frac{\widehat{B}_2(t,U)}{\widehat{B}_2(t,T)} \exp\left(\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)(+\frac{1}{q_1}\widehat{\gamma}_1(s,T) - \widehat{\gamma}_2(s,T))ds\right).$$

D'où le résultat.

Preuve de la proposition 3.2.5.
Nous savons que

$$\widetilde{C}SP\overline{D}(t) = B(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(\overline{S}\widehat{B}_2(T,U) - \widehat{B}_1(T,U))^+ 1_{(T<\tau_1)}1_{(T<\tau_2)}}{B(T)}|\mathcal{G}_t\right].$$

On peut obtenir la valeur de $\widetilde{C}SP\overline{D}(t)$ en procédant de manière identique que dans la preuve de la proposition 5.3 du chapitre 3. Il suffit pour cela de poser $\widetilde{Z}_A(T) = \overline{S}\widehat{B}_2(T,U)$ et $\widetilde{Z}_B(T) = \widehat{B}_1(T,U)$.
Ainsi, $\widetilde{B}^0_{A,B}(t,T) = \widetilde{B}^0_{1,2}(t,T)$ vérifie :

$$\widetilde{B}^0_{1,2}(t,T) = \widetilde{B}^0_1(t,T)\frac{\widetilde{B}^0_2(t,T)}{B(t,T)} \exp\left(\frac{1}{q_1 q_2}\int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T)\widehat{\gamma}_2(s,T)ds\right).$$

Ce terme est la valeur hors défaut de l'obligation zéro-coupon risquée, de prix spot $v^0_{1,2}(t,T)$, définie par la proposition $D.1$.
D'après la preuve de la proposition précédente, sous $\mathbb{Q}^{1,2}_T$, univers forward-neutre de défaut associé à $v^0_{1,2}(t,T)$ (défini dans la section 1.3.1 du chapitre 3), on a :

$$\widehat{B}_2(T,U) = \frac{\widehat{B}_2(t,U)}{\widehat{B}_2(t,T)} \exp\begin{pmatrix} \int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)d\widetilde{w}^T(s) - \frac{1}{2}\int_t^T (\widehat{\gamma}_2(s,T,U))^2\,ds \\ -(1-\frac{1}{q_2})\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_2(s,T)ds \\ +\frac{1}{q_1}\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \end{pmatrix}$$

et

$$\widehat{B}_1(T,U) = \frac{\widehat{B}_1(t,U)}{\widehat{B}_1(t,T)} \exp\begin{pmatrix} \int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)d\widetilde{w}^T(s) - \frac{1}{2}\int_t^T (\widehat{\gamma}_1(s,T,U))^2\,ds \\ -(1-\frac{1}{q_1})\int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \\ +\frac{1}{q_2}\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \end{pmatrix},$$

où $\widetilde{w}^T$ est un $\mathbb{F}$ mouvement brownien sous $\mathbb{Q}^{1,2}_T$.
Le résultat final est alors similaire à celui obtenu dans la proposition 5.2 du chapitre 3 avec :

$$\overline{Z}_A(t) = \overline{S}\widetilde{B}^0_{1,2}(t,T)\frac{\widehat{B}_2(t,U)}{\widehat{B}_2(t,T)} \exp\begin{pmatrix} -(1-\frac{1}{q_2})\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_2(s,T)ds \\ +\frac{1}{q_1}\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \end{pmatrix},$$

$$\overline{Z}_B(t) = \widetilde{B}^0_{1,2}(t,T)\frac{\widehat{B}_1(t,U)}{\widehat{B}_1(t,T)} \exp\begin{pmatrix} -(1-\frac{1}{q_1})\int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \\ +\frac{1}{q_2}\int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \frac{\ln\left[\dfrac{\overline{S}\widehat{B}_2(t,U)\widehat{B}_1(t,T)\exp\begin{pmatrix} -(1-\frac{1}{q_2})\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_2(s,T)ds \\ +\frac{1}{q_1}\int_t^T \widehat{\gamma}_2(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \end{pmatrix}}{\widehat{B}_1(t,U)\widehat{B}_2(t,T)\exp\begin{pmatrix} -(1-\frac{1}{q_1})\int_t^T \widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_1(s,T)ds \\ +\int_t^T \frac{1}{q_2}\widehat{\gamma}_1(s,T,U)\widehat{\gamma}_2(s,T)ds \end{pmatrix}}\right] + \int_t^T (\widehat{\gamma}_1(s,T,U)-\widehat{\gamma}_2(s,T,U))^2\,ds}{\sqrt{\int_t^T (\widehat{\gamma}_1(s,T,U)-\widehat{\gamma}_2(s,T,U))^2\,ds}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_t^T (\widehat{\gamma}_1(s,T,U)-\widehat{\gamma}_2(s,T,U))^2\,ds}.$$