PARADOXES SUR LE CALCUL DES OPTIONS
Et si tout ceci n'était qu'une illusion ... ?

J-PH. JOUSSEAUME
DIRECTEUR
BANQUE MONETAIRE ET FINANCIERE (GROUPE CASDEN B.P.)
91, COURS DES ROCHES - 77186 NOISIEL (FRANCE)
TEL : (1) 64.80.32.81
FAX : (1).64.62.22.88

Résumé

Nous connaissons tous, les limites des formules classiques employées pour la valorisation des options. Ces limites proviennent des hypothèses nécessairement réductrices de l'environnement. Mais, peu d'opérateurs reconnaissent que l'utilisation de ces formules aboutit, aussi, quelque fois à des paradoxes.

Il se pourrait donc que les méthodes actuelles ne soient pas satisfaisantes.

L'auteur propose, alors, de reprendre une voie, qui avait été abandonnée en son temps. Ce faisant, il est obligé de mettre en cause certains principes de la théorie moderne des options comme la probabilité neutre au risque, et l'utilisation, dans certains cas, du principe d'absence d'opportunité d'arbitrage.

La méthode proposée généralise les méthodes classiques et peut valoriser des options pour lesquelles il n'existe pas de marché, comme dans le cas des produits d'assurance, et donc pas d'arbitrage possible . De plus, elle permet d'aborder d'une façon simple l'analyse de la structure des taux des emprunts obligataires en introduisant la notion de taux de rendement actuariel optionnel.

Une première analyse de ce problème a été présentée au groupe finance des actuaires I.S.F.A. en septembre 1992, puis au quatrième colloque A.F.I.R. à Orlando d'avril 1994. Il s'agit ici de la suite de cette étude qui en reprend les principales lignes, tout en tenant compte des remarques qui ont été présentées à l'auteur depuis ces deux réunions.

1.1 Limites de la formule de Black et Scholes

Nous connaissons tous, les limites de la formule de Black et Scholes.

- Il s'agit d'options européennes, donc exerçables uniquement à l'échéance.
- Aucun paiement ne peut intervenir avant cette échéance. Ceci interdit l'utilisation de cette formule pour des options longues.
- La volatilité est constante. Ce qui est loin des réalités du marché.
- La dérivabilité du cours de l'option peut être mise en échec par le caractère fractal des cours de bourse.
- La méthode utilise des arbitrages; le sous-jacent doit donc être coté sur un marché.

Néanmoins ce résultat remarquable devait servir de base à toute la gestion des options, et permettre son développement. Cette approche détermine les principales conventions nécessaires au fonctionnement du marché. Des études furent menées pour généraliser cette solution à des problèmes particuliers (option de change, option sur marché à terme, volatilité variable...). Les différents auteurs ont cherché, pour être crédibles, à retrouver cette formule fondamentale dans les travaux ultérieurs. Nous verrons ci-après les conséquences de cette remarque.

1.2. Paradoxes posés par l'utilisation de la formule de Black et Scholes

Mais après analyse, quatre paradoxes pourraient jeter le doute sur la fiabilité des résultats obtenus par cette formule.

1) L'**impact de la variation du taux sans risque** semble contraire aux résultats attendus. Une baisse du taux sans risque produit une baisse du cours de l'option. Or, nous pourrions nous attendre à ce que, l'état de la nature restant identique, le gain espéré à l'échéance soit constant et dés lors, une baisse du taux devrait faire monter le prix de l'option. Le cours de l'option devrait réagir comme une valeur actuelle. Les recherches récentes ont confirmé ce principe sans en tirer réellement toutes les conséquences.

2) Dans la logique de l'état de la nature utilisé par Black et Scholes, **la limite** du prix donnée par la formule lorsque la **volatilité tend vers zéro** doit être celui

d'une option d'un événement certain. Nous devrions donc obtenir la valeur actuelle de la différence entre la valeur moyenne du sous-jacent à l'échéance et le prix d'exercice. C'est-à-dire comme nous le verrons plus loin:

$$\text{Call à l'échéance} \quad = \quad [\, S_0\, e^{(\mu.t)} - E \,]$$

3) La volatilité ne dépend pas de l'option elle-même, mais de la loi du sous-jacent; Or actuellement, les opérateurs modifient cet indice au gré de leur humeur ou de leurs anticipations. La volatilité n'est pas la même pour deux prix d'exercice différents, ou pour un call et un put. Tout se passe comme si **la formule de Black et Scholes ne possédait pas assez de degrés de liberté** pour traduire les aléas du marché, et, qu'il faille utiliser une variable annexe, la volatilité, sous couvert de garder un caractère pseudo-scientifique aux prix pratiqués.

4) Dans cette formule **seule la volatilité décrit la trajectoire de l'action**. Par conséquent deux actions qui ont même volatilité, mais des trends différents engendrent des valeurs d'options identiques... En fait la trajectoire de l'action se définit par deux paramètres; le trend et la volatilité. Nous pourrions penser que l'information du trend est contenu dans le cours du sous-jacent. Mais il semble que cela ne soit pas le cas, car le même raisonnement pourrait être fait pour la volatilité. Tous les modèles, qui excluent un de ses deux paramètres (le trend ou la volatilité), aboutissent donc à des contradictions. Une trajectoire possède deux degrés de liberté. Cette formule n'en possède qu'un.

2. L'approche actuarielle probabiliste.

Ces constatations peuvent nous faire douter de la bonne adéquation de cette formule avec la réalité des marchés.

Mais une autre approche consisterait à considérer qu'une **option est un contrat d'assurance à prime unique et échéance certaine**. Dans ce cas, **le prix équitable d'une option doit être égal à la somme des gains probables à l'échéance**, actualisée au moment du calcul. Cette voie n'est pas originale et a été étudiée dès 1976 par Cox et Ross, pour retrouver le modèle de Black et Scholes. Nous verrons que la méthode actuarielle, donne une généralisation de cette formule, et permet d'expliquer les paradoxes cités plus hauts.

Le lecteur averti pourrait opposer à cette hypothèse, le fameux **paradoxe de St. Pétersbourg** selon lequel un joueur ne prend pas en compte, pour l'évaluation de sa mise, l'espérance moyenne de ses gains. Nous retrouvons, ici, **la théorie de l'utilité**. En fait ici, il ne s'agit pas d'un joueur isolé, qui ne jouera qu'un nombre restreint de fois, mais d'un professionnel, habitué à l'évaluation du risque dans la gestion, et agissant dans un marché efficient, pour un montant déterminé, et dans un but précis. C'est la principale différence entre un jeu unique et un **marché organisé** où le nombre des intervenants conduit **le cours à s'équilibrer** vers la définition citée plus haut.

En revanche, l'**attitude face à la dispersion du risque** (gain minimum, gain maximum) peut être approchée, dans cette hypothèse, par **le choix du taux de rendement demandé par l'investisseur**. c'est la seule variable sur laquelle puisse peser l'opérateur.

Plus la dispersion est élevée, ou plus l'opérateur est averse au risque, plus le taux de rendement demandé devrait être important. La valeur minimale, quant à elle, étant le taux sans risque pour une dispersion du risque nulle, c'est à dire pour un portefeuille certain.

Pour sa part, un porteur neutre au risque ne tient pas compte de la dispersion du risque, donc de l'importance de la volatilité. Pour ce type d'opérateur, le choix revient à maximiser la performance moyenne.

Dans le cas d'une option, le gain est un flux unique perçu à l'échéance du contrat, et, est égal à la différence positive entre le cours de l'action à l'échéance, et le prix d'exercice du contrat.

Ce qui donne pour le prix d'un call :

$$\text{Call} = \frac{1}{(1 + t_X)^t} \int_E^{+\infty} (X - E)\, f_X(x)\, dx$$

avec :

$f_X(x)$: fonction de densité de la loi de probabilité étudiée
E : prix d'exercice de l'option.

L'intégration s'effectue pour des cours X de l'action supérieurs à l'échéance à E

ou dans le cas d'une actualisation continue en posant: $1+t_X = e^r$

$$\boxed{\text{Call} = \int_{E}^{+\infty} (X - E)\, e^{-(r.t)}\, f_X(x)\, dx}$$

2.1. Environnement de Black et Scholes - méthode actuarielle

Il serait bon d'analyser, plus avant, les hypothèses retenues dans le modèle de Black et Scholes et notamment, celles relatives aux lois de variation du cours de l'action sous-jacente S(t).

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu\, dt + \sigma\, dZ(t)$$

ou :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu\, dt + \sigma\, N(t)\, \sqrt{dt}$$

N(t) suit une loi de Gauss réduite.

alors en utilisant le lemme d'Itô, nous pouvons démonter que :

$\text{Log}\,(S / S_0)$ suit une gaussienne

de moyenne $(\mu - 1/2\, \sigma^2)\, t$

d'écart type $\sigma \sqrt{t}$

(dans cette hypothèse : la valeur moyenne de $S_{(t)}$ est égale à : $S_0\, e^{\mu t}$)

$$\text{Call} = \int_{E}^{+\infty} (X - E)\, e^{-(r.t)}\, f_X(x)\, dx$$

soit :

$$\text{Call} = \int_{E}^{+\infty} X\, e^{-(r.t)}\, f_X(x)\, dx - \int_{E}^{+\infty} E\, e^{-(r.t)}\, f_X(x)\, dx$$

$$\text{Call} = C_1 - C_2$$

1) Calcul de $C_1 = \displaystyle\int_E^{+\infty} X\, e^{-(r.t)}\, f_X(x)\, dx$

c'est-à-dire :

$$C_1 = S_0\, e^{((\mu-r)\, t)}\ \ N[\,(\,Log(S_0/E) + (\mu+\sigma^2/2)t\,)/(\,\sigma\,\sqrt{t}\,)]$$

2) Calcul de $C_2 = \displaystyle\int_E^{+\infty} E\, e^{-(r.t)}\, f_X(x)\, dx$

ou :

$$C_2 = E\, e^{-(r.t)}\ \ N[\,(\,Log(S_0/E) + (\mu-\sigma^2/2)t\,)\,/\,(\,\sigma\,\sqrt{t}\,)\,]$$

d'où la formule générale :

$$\boxed{\begin{array}{c} Call = S_0\, e^{((\mu-r).t)}\ N(d_1) - E\, e^{-(r.t)}\, N(d_2) \\ Call = [\,S_0\, e^{(\mu.t)}\ N(d_1) - E\ \ N(d_2)\,]\ \ e^{-(r.t)} \end{array}}$$

$$d_1 = [\,Log(S_0/E) + (\mu+\sigma^2/2\,)t\,]\,/\,(\,\sigma\,\sqrt{t})$$
$$d_2 = [\,Log(S_0/E) + (\mu-\sigma^2/2\,)t\,]\,/\,(\,\sigma\,\sqrt{t})$$

Le call est égal à la différence entre la valeur moyenne implicite de l'action à l'échéance et la valeur du prix d'exercice, ces deux valeurs étant pondérées par les probabilités N(d1) et N(d2), actualisée au moment du calcul.

D'autre part, quelque soit la loi des cours de l'action X(t) :

$$Call = \int_E^{+\infty} (\,X - E\,)\ e^{-(r.t)}\ f_X(x)\, dx$$

$$Put = \int_{-\infty}^{E} (\,E - X\,)\ e^{-(r.t)}\ f_X(x)\, dx$$

$$\text{Call - Put} = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E)\, e^{-(r.t)}\, f_X(x)\, dx$$

$$\text{Call - Put} = (\overline{S(t)} - E)\, e^{-(r.t)}$$

Call - Put = Valeur actuelle du gain moyen algébrique

$\overline{S(t)}$: valeur moyenne du sous-jacent à l'échéance.

Pour le calcul du put, il suffit de remarquer que :

$$\text{Call - Put} = S_0\, e^{((\mu - r).t)} - E\, e^{-(r.t)}$$

$$\text{Put} = E\, e^{-(r.t)}\, N(-d2) - S_0\, e^{((\mu - r).t)}\, N(-d1)$$

$$\text{Put} = [\, E\ N(-d2) - S_0\, e^{(\mu.t)}\, N(-d1)\,]\, e^{-(r.t)}$$

Ces formules possèdent le facteur d'actualisation continue qui peut être remplacé le cas échéant par un facteur d'actualisation discrète.

Aucune hypothèse particulière n'a été utilisée pour ces calculs, si ce ne sont celles relatives à la loi de probabilité des cours de l'action. Nous vérifions que **le prix équitable dépend bien du trend de l'action**, ce qui paraît logique pour différencier les prix de call de deux actions qui ont même volatilité mais deux trends différents (cf. supra).

2.3. Comparaison entre la formule classique et la formule actuarielle

Pour retrouver la formule de Black et Scholes, il nous faut ajouter l'égalité du trend de l'action et du taux sans risque.

$$\text{Call} = S_0\, N(d_1) - E\, e^{-(r.t)}\, N(d_2)$$

(formule de **Black et Scholes**)

La valeur du trend de l'action ne semble donc pas absente de la formule de Black et Scholes. Cette formule paraît n'être, en fait, qu'un cas particulier d'une formule plus générale.

En fait, la valeur du trend peut être très différente de la valeur d'un taux sans risque, et l'application de la formule de Black et Scholes conduit, alors, à des aberrations que l'on essaie d'atténuer par la modification de la variable volatilité. (cf. paradoxe numéro 3)

Nous remarquerons que la signification du taux r n'est pas la même entre les deux formules.

Dans la formule du taux actuariel généralisée, il s'agit du taux des investissements pour une durée égale à l'échéance du contrat et pour un niveau de répartition de risque donné. Ce taux pourrait être égal au trend de l'action.

Dans la formule de Black et Scholes, r représente le taux sans risque instantané, celui-ci étant considéré comme constant pendant toute la durée restante du contrat. Cette dernière hypothèse est très contraignante dans la mesure où la structure des taux n'est pas toujours plate et peut même évoluer. (cf. Ho et Lee [3]). Nous verrons que nous pouvons nous affranchir de cette difficulté par l'utilisation de la méthode proposée.

Plusieurs auteurs ont démontré la formule de Black et Scholes (dont Cox et Ross en 1976), par la méthode du taux de rendement actuariel probable. Mais pour conclure, il leur fallait admettre plusieurs hypothèses supplémentaires:

a) L'investisseur doit être neutre au risque.

Ce que les auteurs traduisent par:

Le cours de l'option est égal à l'espérance du gain final actualisé au taux sans risque.

Mais, actualiser un actif à un taux déterminé c'est définir sa performance, ou son trend espéré. Et, dans ce cas précis, un trend égal au taux sans risque devrait laissait supposer que l'actif est certain...

b) Par ailleurs, dans la démonstration, lors de l'utilisation du lemme d'Itô, nous pouvons constater que le trend du sous-jacent est supposé être égal à ce même taux sans risque. Cette propriété est contraire aux hypothèses du modèle de Black et Scholes.

Ces deux " remarques" représentent le "prix à payer" pour retrouver à partir d'une actualisation directe, la formule de Black et Scholes.

2.4. Cas des options sur futures

En fait, la valeur du sous-jacent qui doit être utilisée dans la formule de l'option est celle que celui-ci aura à l'échéance et non pas sa valeur au moment du calcul. Dans le cas d'un sous-jacent qui possède un marché à terme, l'usage veut que les opérateurs prennent le cours à terme au lieu du prix au comptant. Cette pratique semble donc pleinement justifiée. Le cours à terme peut-être un bon indicateur de la valeur $S_0\, e^{(\mu.t)}$.

La formule devient alors :

$$\boxed{\begin{array}{c} Call = [\, Fn\, N(d1) - E\ \ N(d2)\,]\, e^{-(r\,t)} \\ \\ Put = [\, E\, N(-d2) - Fn\ \ N(-\, d1)\,]\, e^{-(r\,t)} \end{array}}$$

avec Fn : valeur du contrat futur.

(Formule de Black)

Nous nous apercevons que les opérateurs qui refuse la notion de trend dans la formule de Black et Scholes, l'utilise implicitement dans la formule de Black.

$$Fn \# S_0\, e^{(\mu.t)}$$

2.5. Cas des options de change

Prenons, maintenant, cette formule actuarielle dans le cas des options de change; si le gain à l'échéance t est considéré comme étant égal à :

$$\text{gain} = X\, e^{(ti.t)} - E$$

avec:

X cours coté de la devise à l'échéance
$e^{(ti.t)}$ représente la capitalisation du montant en devise au taux t_i pendant la durée t. au taux ti de la devise
E prix de vente des devises au contrat

alors :

$$\text{Option} = \int_E^{+\infty} (X\, e^{(ti.t)} - E)\; e^{-(r\,t)}\; fx(x)\, dx$$

soit :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Call} = S0\, e^{((ti+\mu-r)\,t)}\; N(d1) - E\, e^{-(r\,t)}\, N(d2) \\ \text{Put} = E\, e^{-(r\,t)}\, N(-d2) - S0\, e^{((ti+\mu-r)\,t)}\; N(-\,d1) \end{array}}$$

dans le cas où μ égal r :

$$\text{Call} = S_0\, e^{(ti.t)}\; N(d_1) - E\, e^{-(r\,t)}\, N(d_2)$$
(formule de Garman-Kohlhagen)

Si de plus t_i est nul, cela signifie que l'actif sous-jacent ne peut être placé sur un marché de type monétaire (domestique ou étranger), nous retrouvons, alors, le cas des valeurs mobilières étudiées par Black et Scholes.

3.1. L'approche binomiale - méthode actuarielle

Etudions la formule proposée dans le cas d'un actif qui suivrait une loi binomiale. C'est à dire qui ne pourrait pendre à l'instant suivant $t_{(k+1)}$ que deux états dont les valeurs respectives sont : S_k u et S_k d

En particulier pour k = 0, nous avons :

$$S0 \begin{cases} S_1(1) = S_0\, u & \text{probabilité } p \\ S_1(0) = S_0\, d & \text{probabilité } (1 - p) \end{cases}$$

Nous savons que dans un marché organisé :

$$S_0\, \mu = E(S_1) = p\, S_0\, u + (1-p)\, S_0\, d$$

(μ trend de l'action ou taux de rendement actuariel.)

Ce qui donne **la relation fondamentale** qui décrit le système :

$$p = \frac{\mu - d}{u - d}$$

Trois de ces quatre paramètres suffisent à déterminer le système.

Il s'en suit pour l'étape n, état k :

$$S_n(k) = S_0\, u^k\, d^{(n-k)} \qquad \text{avec } k=0,n$$

$$\text{Prob. } (X_n=S_n(k)) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k\, (1-p)^{(n-k)}$$

probabilité que le cours de l'action X_n à l'étape n soit égal à $S_n(k)$.

S'il existe un call sur cet actif, et, en supposant que le prix d'exercice soit E, la valeur de ce call doit être égal au gain probable, soit :

$$C0 = \frac{\sum_{k=a}^{k=n} \text{Prob. } (X_n = S_n(k)) \ \text{MAX.}[\ (S_n(k) - E), 0\ ]}{\mu'^n}$$

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{\mu'^n} \left[\sum_{0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)} \ \text{MAX.}\ [\ (u^k d^{(n-k)} S0 - E), 0] \right]}$$

μ' = trend de l'option ou facteur d'actualisation de l'option

Là aussi, la loi de diffusion suffit pour déterminer le cours de l'option.

<u>3.2. L'approche binomiale : méthode de Cox, Ross et Rubinstein</u>

Prenons maintenant un portefeuille composé de Δ actions et d'un actif sans risque B (cf. méthode de Cox, Ross, Rubinstein) .

$$P_0 = \Delta\ S + B$$

$$P0 \begin{cases} P_u = \Delta\ S.u + B\ r & \text{probabilité } p \\ P_d = \Delta\ S.d + B\ r & \text{probabilité } (\ 1 - p\ ) \end{cases}$$

Choisissons Δ et B pour que ce portefeuille "duplique" l'option sur l'action S

Dans ce cas nous obtenons deux équations à deux inconnues.

$$\begin{aligned} C_u &= \Delta\ S.u + B\ r \\ C_d &= \Delta\ S.d + B\ r \end{aligned}$$

dans ce cas :

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S\,(u - d)} \qquad\qquad B = \frac{u\,C_d - d\,C_u}{(u - d)\,r}$$

et par suite :

$$C = \Delta S + B$$

$$C = [\,p'\,C_u + (1 - p')\,C_d\,]\;1/r$$

$$\text{en posant} \quad p' = \frac{r - d}{u - d}$$

Le cours de l'option est égal à la valeur actuelle au taux sans risque des valeurs finales de l'option.

De proche en proche, en partant de la valeur de l'option à l'échéance, nous obtenons la formule de Cox, Ross, Rubinstein

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{r^n}\left[\sum_{0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p'^k\,(1-p')^{(n-k)}\ \mathrm{MAX.}\,[\,(u^k\,d^{(n-k)}\,S0 - E),0]\right]}$$

Nous aurions obtenu le même résultat en appliquant la méthode du portefeuille préconisé par Black et Scholes, à la probabilité binomiale.

Nous remarquerons que la constante p' utilisée dans la formule de Cox, Ross et Rubinstein n'est pas la probabilité p de survenance de l'événement favorable u du sous-jacent mais un nombre compris entre zéro et un que l'on peut assimiler à une probabilité (d'un événement qu'il reste à définir). Il s'agit, ici, d'un artifice de calcul.

Nous constatons que cette formule est indépendante de la valeur de p. L'analogie avec la formule de Black et Scholes semble parfaite, en effet:

$$p' = p \iff \mu = r$$

4. Analyse comparative entre les méthodes classiques et la méthode actuarielle

En conclusion, nous nous apercevons, que les deux formules utilisées actuellement sur les marchés:
- aboutissent à une formation du **cours** qui est aussi une **valeur actuelle des gains futurs**; ce qui justifie, à posteriori, la démarche entreprise.
- induisent l'**égalité du trend de l'actif sous-jacent et du taux de rendement sans risque**.

Nous nous rappelons que, de plus, il nous est possible de passer de la méthode de Black et Scholes à celle de Cox, Ross et Rubinstein.

Il serait intéressant d'analyser ces deux méthodes pour essayer de retrouver les hypothèses qui limitent leur utilisation par rapport à la méthode actuarielle.

Or par comparaison avec la définition du cours de l'option à priori les formules de Black et Scholes et celle de Cox Ross et Rubinstein utilisent deux préceptes particuliers :

- la théorie de l'absence de l'arbitrage
- la probabilité neutre au risque

4.1. L'absence d'opportunité d'arbitrage

Avant de préciser ce phénomène, il nous faut rappeler le principe fondamental de la théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Selon cette théorie :
" Un actif certain ne peut rapporter que le taux des actifs sans risque de la durée et de la structure d'amortissement de cet actif. "

" Un opérateur ne peut pas gagner plus que le taux sans risque sans accepter une part de risque. "

Une des conséquences de cette théorie, est que le cours d'un actif aléatoire, dans un marché organisé, doit être égal à la valeur actuelle probable des flux futurs de cet actif. Dans le cas contraire, la loi des grands nombres aboutirait à la conclusion d'un gain ou d'une perte quasi-systématique par arbitrage.

4.1.1. ... traitée dans les processus stochastiques

Les modèles d'évaluations stochastiques sont généralement quasi-certains, ils se décomposent généralement en une partie qui traduit la tendance et une partie aléatoire. Or il semble possible d'annihiler les effets de la partie aléatoire dans un portefeuille. Dans ce cas, ce dernier réagit comme la tendance d'une manière certaine. Ce qui suppose, selon la théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage, que sa rentabilité est aussi égale au taux sans risque. Nous retrouvons, ici, la contradiction évoquée ci-dessus.

L'utilisation du principe d'arbitrage dans ce contexte, ne se justifierait qu'au milieu d'un environnement où tous les actifs auraient la même rentabilité; celle du taux sans risque. Mais ces actifs, selon cette même théorie, ne peuvent être que des actifs certains pour lesquels il ne semble pas utile de calculer des options.

Par exemple, supposons que deux actifs suivent la même loi binomiale en ce qui concerne la distribution des probabilités mais avec des valeurs différentes.

Nous pouvons alors constituer un portefeuille comprenant ces deux actifs. La rentabilité moyenne de ce portefeuille est alors égale à la moyenne des rentabilités de ces deux actifs, pondérée par leur proportion dans le portefeuille. Cette valeur dépend uniquement des rentabilités moyennes de chaque actif et de la composition du portefeuille. Cette valeur est parfaitement définie pour chaque composition du portefeuille.

Nous savons, par ailleurs, qu'à chaque instant il existe une composition initiale du portefeuille telle, que les deux valeurs probables des portefeuilles finaux seront égaux. Si, de plus, nous ajoutons, l'hypothèse de l'absence d'opportunité d'arbitrage, alors cette rentabilité doit être aussi égale au taux sans risque.

Ce portefeuille a donc deux rentabilités; sa rentabilité moyenne et celle des actifs sans risque, ce qui aboutit à une contradiction. En fait la distribution binomiale, parce qu'elle ne possède **que deux états possibles,** utilisée avec la théorie de l'arbitrage, se révèle un mauvais système d'analyse du marché. Le fait aléatoire se réduit trop facilement au fait certain par un simple choix de la composition du portefeuille, ce qui est loin d'être le cas sur les marchés. **L'utilisation du principe de l'arbitrage dans le processus binomial ajoute une relation logique mais contradictoire et surabondante au système d'équations mathématiques.**

4.1.2. Cas de la formule de Black et Scholes

En revanche, le problème semble plus ardu pour la méthode préconisée par Black et Scholes.

Comme nous l'avons vu, les variations du sous-jacent se répartissent en deux composantes, la dérive de l'action et la dispersion aléatoire autour de celle-ci. Le but de la martingale proposée par Black et Scholes est d'annihiler les effets de cette dispersion dans un portefeuille composé d'une option et de n d'options de cette action. Il semble raisonnable de penser que si ce portefeuille, dont la structure est modifiée à chaque instant, doit avoir une rentabilité constante, il réagira, "en moyenne", **comme le trend du sous-jacent et non pas comme un portefeuille certain**. Là aussi, le principe de l'arbitrage revient, néanmoins, à **imposer la rentabilité du taux sans risque.**

L'hypothèse de la constance de la performance du "portefeuille de Black et Scholes" à la valeur λ conduit, lors de la prise en compte des conditions aux limites, à l'égalité de λ et de μ.

4.1.3. Remarque sur la théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage

En conclusion, dans la définition d'un cours par arbitrage il semble important de veiller à ce que :

- La martingale d'arbitrage ne doit pas altérer la suite des cours futurs du sous-jacent.
- Le principe de l'arbitrage ne doit pas exploiter la simplicité souhaitable du modèle utilisé pour simuler le marché et obtenir, par là même, des résultats non transposables dans un environnement plus complexe.

4.2. Le principe de la probabilité neutre au risque

Dans la méthode de duplication de l'option, nous cherchons à trouver un portefeuille qui reproduirait le prix de l'option. Il n'est pas certain que ce problème puisse être résolu. Supposons que le portefeuille soit composé d'un certain nombre d'actions et d'un actif sans risque. Une fois le nombre d'actions et le montant de l'actif sans risque déterminés, nous devrions vérifier que cette solution ne s'oppose pas aux hypothèses de départ.

Dans la méthode binomiale, cette méthode conduit à l'existence de la probabilité neutre au risque.

Certains auteurs justifient l'utilisation de la probabilité neutre par le fait que quelques opérateurs peuvent être neutres au risque.

Mais, d'une part, une seule catégorie de porteur définirait, dans cette hypothèse, un cours de marché valable pour tous. Et d'autre part, un porteur neutre au risque n'a, lui non plus, aucun effet sur l'état de la nature, il ne peut seulement qu'avoir des évaluations propres, et dans son cas, la neutralité face au risque s'exprime par l'indifférence du choix face à la valeur de la volatilité. Son choix se portera donc sur l'actif qui possède la meilleure rentabilité moyenne, quelqu'en soit le risque.

D'autres auteurs, décrivent un univers neutre au risque.

Mais dans cet univers, le cours du sous-jacent ne suit pas la chronologie des cours de l'univers réel.

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que la stratégie de duplication des options revient à l'analyse d'un portefeuille du type de Black et Scholes.

En fait, l'utilisation de la probabilité neutre ne sert qu'à retrouver, à partir de la formule binomiale, les résultats de la formule de Black et Scholes. En ignorant que cette dernière provient, comme nous l'avons vu, d'une utilisation abusive de la théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage. De même, l'ajout de la théorie de la probabilité neutre est nécessaire pour retrouver par l'intégration directe les résultats de la formule de Black et Scholes.

Nous n'avons, dés lors qu'une alternative:

- Développer autour de la formule de Black et Scholes un environnement artificiel en utilisant la théorie de la probabilité neutre au risque. C'est l'objet de la plupart des études actuelles.

- Remettre en cause cette formule, ou tout au moins son écriture actuelle.

Or, il est facile de démonter que le principe de la probabilité neutre est contraire, elle même, aux hypothèses initiales du système étudié.

Le but de cette étude est donc d'attirer l'attention du monde financier sur le fait que si beaucoup d'études ont été effectuées pour généraliser les résultats de la formule de Black et Scholes peu ont réellement osé douter de la véracité des résultats de cette formule. Que serait-il arrivé si la méthode de Cox, Ross et Rubinstein avait été connue avant celle de Black et Scholes ?

5. Conclusion - Le fait aléatoire dans l'évaluation des options - le principe de la gestion en delta neutre

La valeur de l'option intéresse deux types d'intervenants:
- Les investisseurs
- Les intermédiaires

Les premiers cherchent dans l'option une **espérance de gain équitable par rapport à leur mise de fond initiale.**

Actuellement, les seconds ne proposent que des prix liés à des **arbitrages de couvertures**. Le but étant ne pas perdre sur chaque contrat.

Or l'option fait intervenir des événements aléatoires, comme un **produit d'assurance**. En toute logique, un portefeuille composé de deux actifs aléatoires ne peut être réduit à un portefeuille certain que si les distributions des probabilités de ces deux actifs sont parfaitement corrélés. Ce qui ne semble pas le cas avec une option et l'actif sous-jacent.

Nous percevons l'importance du choix des modèles d'arbitrage et de leur adéquation avec le marché. L'investisseur est-il, alors, réellement conscient des hypothèses nécessaires à la formation du cours de l'option? Notamment, en ce qui concerne les variations des actifs sous-jacents. Que dire de la résistance des modèles utilisés dans le cas de variations brusque du taux sans risque, quand on suppose que ce dernier est implicitement le trend du sous-jacent?

En fait, le **nombre de contrats** qui doit équilibrer, en gestion en "delta neutre", les variations aléatoires de l'action **est lui même un nombre aléatoire.** Cette particularité ne peut être levée que dans le cas d'un système à deux états, comme nous l'avons vu. Dans le cas général, (plus de deux états ou pour des variables continues) il ne semble pas possible de déterminer ce nombre à priori. **L'obtention d'un portefeuille certain peut donc être remis en cause...** or, c'est cette propriété qui permet d'utiliser le principe de l'absence d'opportunité d'arbitrage dans la formule de Black et Scholes.

L'expérience montre que l'utilisation de la méthode dite en delta neutre est perverse. Elle fonctionne en général assez bien pour des petites variations du sous-jacent, ce qui est le cas la plupart du temps, mais devient complètement erronée pour de brusques variations, ce qui entraîne, alors des pertes importantes.

6. Analyse dynamique du prix des options

Les principes de gestion des options résident dans l'utilisation de la dérivabilité du cours du sous-jacent. Or l'aspect aléatoire de ceux-ci semble empêcher l'existence de ces dérivées. En particulier l'égalité des dérivées à droite et à gauche n'est peut-être pas vérifiée pour des variables aléatoires continues. Néanmoins, pour de petites variations du cours du sous-jacents les paramètres utilisés actuellement, comme les coefficient delta et gamma, donnent des résultats valables, mais, pour de fortes variations imprévues, les résultats obtenus ne sont plus utilisables.

Par construction le prix de l'option est égale à la valeur du gain moyen qui sera obtenu à l'échéance. La couverture de l'option ne fonctionnera réellement que si le cours de l'action dépasse à l'échéance le prix de l'exercice augmenté de la capitalisation de la prime.

Dans les hypothèses choisies par Black et Scholes nous connaissons la loi de variation de l'action étudiée. En particulier nous savons que mathématiquement le cours moyen de l'option suit la loi suivante :

$$S\,\text{moyen}_{(t)} = S0\, e^{\mu t}$$

De même nous pouvons déterminer deux probabilités importantes :

Probabilité P_E qu'à l'échéance le cours de l'action dépasse le prix d'exercice E :

$$P_E \quad = \quad N\,[\,\mathrm{Log}(S_0/E) + (\mu-\sigma^2/2\,)t\,)\,/\,(\,\sigma\,\sqrt{t})\,]$$

Probabilité $P_{E'}$ qu'à l'échéance le cours de l'action dépasse le prix d'exercice E augmentée du prix de la prime P :

$$P_{E'} \quad = \quad N\,[\,\mathrm{Log}(S_0/(E+P)) + (\mu-\sigma^2/2\,)t\,)\,/\,(\,\sigma\,\sqrt{t})\,]$$

A titre d'exemple pour une option à six mois sur le CAC 40 les résultats sont les suivants :

$S_0 = 1950$ $\sigma = 20\ \%$ $r = 5{,}5\ \%$ $\mu = 7{,}5\ \%$

E = 1800	call = 245	P_E	=	77,5 %	$P_{E'}$	=	42,8 %
E = 1900	call = 176	P_E	=	64,4 %	$P_{E'}$	=	39,7 %
E = 2000	call = 120	P_E	=	50,1 %	$P_{E'}$	=	34,0 %
E = 2100	call = 78	P_E	=	36,5 %	$P_{E'}$	=	27,3 %
E = 2200	call = 48	P_E	=	24,9 %	$P_{E'}$	=	20,3 %

En général la valeur de $P_{E'}$ est relativement faible en dehors de la monnaie.

Mais la formule de Black et Scholes suppose que le cours moyen du sous-jacent suit une loi indexée sur le taux sans risque :

$$S\ \text{moyen}_{\ B.S.(t)} \quad = \quad S0\ e^{\,r\,t}$$

Pour des actifs du type action (μ supérieur à r), le prix des calls est donc sous-évalué par rapport à leur valeur mathématique.

7. Généralisation

La méthode proposée permet de ne pas tenir compte des variations intermédiaires des variables, et de tenir compte de la valeur du trend du sous-jacent. Ce faisant elle peut résoudre de nombreux cas particuliers.

Il nous suffit de définir principalement trois éléments .

- La loi de la moyenne de X(t) : M (t) ou M (t,x)

- La loi de la variance de X(t) : V (t) ou V (t,x)

- Le type de loi de densité de X(t).

M(t,x) pouvant être lié, par exemple, à la déformation de la courbure des taux. (cf. [3])

Un exemple intéressant de ce qui peut être obtenu par la méthode actuarielle est l'étude de Simon Rosenblatt et Ould Amar Yahya [11]

L'approche actuarielle probabiliste permet de se soustraire aux hypothèses trop contraignantes et même de pouvoir évaluer le prix de l'option en accord avec l'appréciation personnelle du risque de chaque opérateur. Nous verrons, par la suite, que la souplesse de cette formule rend possible l'évaluation d'options longues, ou d'options dans le cas d'avenir non-stable (déformation de la courbe des taux ...)

7.1. Cas des options longues : études des call-warrants

Comme nous l'avons remarqué la formule d'actualisation généralisée ne prend en compte que la loi du sous-jacent à l'échéance, et que, le cours coté à l'instant du calcul est celui qui, par continuité, sera la valeur pour cette loi pour t égale à zéro. Dans cette mesure, une généralisation est possible, pour les options longues, en considérant comme cours coté, la valeur actuelle de l'instrument long au taux considéré. Soit à retrancher du cours coté, les valeurs actuelles des dividendes et coupons intermédiaires.

D'autre part, il semble utile de préciser que, dans le cas des options longues, un phénomène particulier peut se produire. Il est possible d'obtenir des " valeurs temps " négatives. En effet, nous avons coutume de répartir le prix de l'option en deux parties; la valeur intrinsèque et son complément "la valeur temps", mais l'option est aussi, nous l'avons vu, la valeur actualisée du gain probable. Ce gain probable, calculé à l'échéance, est supérieur à la valeur intrinsèque, mais l'effet de l'actualisation, surtout pour des durées importantes, peut le ramener à une valeur inférieure. Ceci n'est vrai, que pour des options de type européen.

7.2 Analyse de la structure des taux

Autrefois, la gestion des institutionnels était plus inerte. Elle se composait principalement des souscriptions et d'amortissements. Aujourd'hui les gestions sont plus mobiles. Il est donc important d'apprécier les variations du cour de l'actif acheté au cours de la durée de vie de l'emprunt. Il semble logique de déterminer deux parties dans les prévisions du gestionnaire:

- Un horizon proche (par exemple 1 an) pour lequel le gestionnaire peut faire des hypothèses plus ou moins réalistes.
- Un horizon lointain pour lequel il semble difficile de supposer quoique ce soit.

Tout achat se résumera donc à la question; Quel sera la valeur de l'actif à la fin de la première période? Une approche probabiliste conduit alors à l'équation:

		valeur actuelle		Call warrant
Cours	=	du ou des coupons	+	Prix d'exercice = 0
		intermédiaires		Echéance 1 an

Cette méthode est très générale et permet de prendre en compte :

- La hiérarchie des taux à 1 an
- La volatilité des taux.
- La concavité des courbes des taux.

Nous pouvons analyser par cette équation les principaux types de courbes de structure des taux; comme les courbes inversées ou les courbes fortement pentues.

De plus il devient possible et facile de comparer des actif de taux avec des actions. Ceci détermine les primes de risque entre les marchés.

Bibliographie

[1] Fischer Black et Myron Scholes: "The pricing of options et corporate liabilities" Journal of political economy, mai-juin 1973

[2] Philippe Camus: "l'actualisation application au marché obligataire français" Bulletin trimestriel de l'I.A.F. déc. 1981

[3] Thomas S. Y. Ho et Sang-Bin Lee: "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims" The journal of finance december 1986

[4] Stéphane Manchet et Tanguy Dehapiot: "Les nouveaux produits financiers et leur modélisation mathématique" rapport de stage de l'Ecole Polytechnique à la Banque Paribas. juin 1988

[5] Christian Walter: "L'utilisation des lois Levy-stables en finance: une solution possible au problème posé par les discontinuités des trajectoires boursières". 1989

[6] Hua He: "Convergence from discrete to continuous time contingent claims prices" The review of financial studies 1990

[7] David Heath, Robert Jarrow, et Andrew Morton: "Bond pricing and the term structure of interest rates: a discrete time approximation" journal of financial and quantitative analysis december 1990

[8] Patrick Roger: "Les outils de la modélisation financière" PUF 1991

[9] Jean-claude Augros: "Evaluation des bons de souscription d'actions remboursables" Revue d'analyse financière - 2 trim 92

[10] Jean-Philippe Jousseaume: "Paradoxes sur le calcul des options - Extensions des modèles". revue Banque & Marchés n° 8 - 1993 et AFIR IV - Orlando avril 1994

[11] Simon Rosenblatt et Ould Amar Yahya ; "Modélisation du prix d'une option européenne par la fonction de densité des rendements à terme" AFIR IV - Orlando avril 1994