

SOLVENCY II ET SELECTION DU PORTEFEUILLE D'ACTIFS : APPROCHE THEORIQUE

Marcin FEDOR
Université Paris Dauphine

Université Paris Dauphine
Centre de Recherche en Economie de l' Assurance
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny
75775 Paris Cedex 16
Adresse e-mail : marcin.fedor@gmail.com

RESUME

Solvency II va changer l'environnement prudentiel en Europe. Certains universitaires et analystes du marché ont laissé entendre que la réforme incitera les assureurs à basculer leurs portefeuilles d'investissement vers des instruments sans risque. Nous démontrons dans cet article - par un modèle basé sur la théorie moderne de portefeuille et sur RAROC - que cette analyse a un fondement théorique. Nous étudions la politique financière en assurance sous deux approches : le niveau opérationnel de la direction financière (approche « bottom-up »), et le niveau stratégique de la direction générale (approche « top-down »). Bien évidemment, le niveau stratégique est supérieur et primordial pour l'allocation d'actifs des assureurs. Notre modèle démontre que l'assureur, qui optimise son RAROC, choisit un portefeuille composé entièrement d'instruments sans risque. Nous expliquerons aussi, en nous basant sur le même modèle, pourquoi les assureurs américains détiennent des actions. Cet article a pour objectif de contribuer aux travaux actuels sur des éléments précis de Solvency II, notamment sur le module de risque de marché du SCR.

Mots clefs : Solvency II, module de risque de marché du SCR, choix du portefeuille d'actifs, optimisation des fonds propres économiques, Risque-Ajusté au Retour sur Capital (RAROC), investissements en actions

Nous voudrions remercier Anne Tracol pour ses corrections, indications précieuses et son encore plus grande patience.

1. INTRODUCTION

Une réflexion menée autour de la réforme Solvency II mettait au point la définition des règles déterminant les exigences des capitaux propres des sociétés d'assurances, notamment la problématique du module « risque de marché ». Certains participants aux travaux sur *Solvency II* ont souligné que la construction du SCR, inspirée par les règles actuellement en vigueur aux Etats-Unis (RBC), pourrait avoir des conséquences négatives pour les investissements des assureurs. Ils relevaient que les normes de solvabilité américaines - introduites par la NAIC en 1993 en assurance vie et en 1994 en assurance IARD - déterminent aussi le choix du portefeuille des assureurs aux Etats-Unis. Leurs inquiétudes visaient notamment les investissements risqués. Le système de solvabilité actuel aux Etats-Unis et les futures régulations prudentielles en Europe chargent des investissements plus risqués avec des fonds propres plus élevés, imposant une sorte d'impôt prudentiel aux actifs reliés aux poids de risque supérieurs. Ainsi, certains universitaires, entre autres Fedor (2006), ont réclamé que Solvency II puisse encourager la substitution des investissements risqués par des classes d'actifs qui chargent moins les fonds propres.

La problématique de l'impact des normes RBC sur les investissements des assureurs américains n'a pas été analysée en profondeur. Les universitaires américains se sont focalisés plutôt sur le degré de sécurité du nouveau système de solvabilité ou sur la prédictibilité des formules de RBC, ex. Cummins at al. (1993, 1994, 1995,1996) or Grace at al. (1993).

Le sujet des investissements des assureurs a rarement été évoqué. Parmi les quelques articles existant, nous citerons celui de Froot (2007) qui a démontré qu'une sélection optimale des risques financiers (du point de vue de la valeur pour l'actionnaire) exclut les actifs risqués des portefeuilles d'investissement des assureurs. Madsen (2002) illustre, avec un raisonnement moins théorique, que les assureurs satisfaisant aux exigences du RBC sacrifient une part de rendement pour les actionnaires. L'impact du RBC sur les placements des sociétés d'assurances aux Etats-Unis a été, à la connaissance de l'auteur, étudié seulement par deux auteurs - Petroni at al. (1996) et Baranoff (2004) - qui concluent que les règles RBC n'ont pas influencé les comportements financiers des sociétés d'assurances aux Etats-Unis. Néanmoins, même si ces deux études mènent une recherche économétrique pointue, elles n'analysent pas profondément (ni théoriquement) les sources et les causes de ces pratiques illogiques.

Ces questions sont très importantes aujourd'hui puisqu'un manque de réallocation aux Etats-Unis à la suite de l'introduction des normes RBC a modéré les angoisses de nombreux participants aux travaux sur Solvency II, notamment de la Commission Européenne qui semble être confiante dans les nouvelles solutions prudentielles et leur neutralité pour les placements des assureurs. L'exemple de Bâle II qui est accusé d'avoir causé un « craquement de crédit » (*credit crunch*) aux Etats-Unis est omis (ex. Haubrich at al. (1993) or Paterson at al. (1995)). De plus, une simple comparaison des deux marchés suffit pour constater que les assureurs américains détiennent moins d'actions (environ 5%) que leurs homologues européens. Cette différence s'explique partiellement par les comportements historiques aux Etats-Unis où ces classes d'actifs n'ont jamais été appréciées par les contrôleurs mais nous ne pouvons pas expliciter le manque de réaction aux opportunités de rendements offertes par la bourse dans les années 90.

Dans cet article, nous analysons de façon théorique la problématique du choix de portefeuille d'investissement dans le cadre du système prudentiel Solvency II (et RBC) et nous

développons un modèle (basé sur RAROC) qui démontre que les assureurs gérant leurs actifs efficacement sont incités à éliminer la totalité des investissements risqués. Nous expliquons également pourquoi les assureurs américains n'ont pas réagi aux nouvelles normes prudentielles et sont toujours en possession d'actions. Dans cet objectif, cet article est construit comme suit. Nous exposerons en premier lieu l'optimisation du portefeuille d'investissement dans le cadre du système prudentiel Solvency II où les assureurs sont obligés de calculer la SCR et de garder ce niveau de capital comme garantie contre le risque de marché. Cette section traite de la vision « bottom-up » de la gestion de portefeuille. Dans un second temps, nous nous intéresserons au choix du portefeuille d'investissement à travers le concept de l'optimisation des fonds propres économiques de l'assureur (l'approche « top-down »). Nous déplaçons ainsi l'analyse du choix de portefeuille au niveau décisionnel de la société d'assurance pour étudier les conséquences des nouvelles régulations prudentielles en Europe et pour démontrer les nouvelles orientations d'investissements après le passage à Solvency II. La dernière partie inclut l'examen de la situation aux Etats-Unis où, malgré les chargements excessifs en capital des normes RBC, les assureurs détiennent des actions et n'optimisent pas le rendement pour leurs actionnaires. Les éléments du cadre théorique de la gestion de portefeuille, nécessaires pour notre analyse théorique, sont présentés dans les annexes.

2. SOLVENCY II ET L'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE D'ACTIFS DE LA SOCIETE D'ASSURANCES : L'APPROCHE « BOTTOM-UP »

Le nouveau système de solvabilité en Europe change totalement la vision de la politique financière en assurance. Sous Solvency II, l'assureur devra immobiliser un montant de capital dans ses fonds propres, servant à couvrir le risque de placement. Le niveau obligatoire du capital sera estimé via les modèles de la VaR et dépendra du niveau du risque de portefeuille : plus le portefeuille est risqué, plus l'assureur devra posséder de capitaux. Cette méthode de couverture du risque de marché modifie les objectifs selon lesquels l'assureur guidera sa politique de placement : il devra prendre en compte un nouveau critère d'allocation d'actifs. Dès lors, il optimisera son portefeuille non seulement par rapport aux facteurs décrits dans l'annexe mais aussi par rapport au montant du capital immobilisé dans ses fonds propres.

Sous l'ancienne réglementation de solvabilité en Europe, les décisions d'investissement ont été prises essentiellement au niveau de la direction financière (à la base de l'ALM). La gestion financière s'effectuait donc uniquement par l'approche « bottom-up » (le choix du portefeuille se décidait dans la direction financière et les résultats étaient ultérieurement remontés au niveau hiérarchique supérieur). Dans le régime de Solvency II, la gestion d'actifs doit être analysée sous deux perspectives : « bottom-up » (vision de la direction financière qui gère le portefeuille par rapport aux contraintes des passifs et ceux décrites dans l'annexe et en fonction du capital alloué par la direction générale pour la couverture du risque de placement) ou « top-down » (vision de la direction générale qui fixe un pourcentage des fonds propres dédié à la couverture du risque de marché et établit une nouvelle contrainte de la gestion d'actifs en déterminant indirectement le portefeuille d'investissement).

Pour rendre notre analyse adaptée à l'univers de *Solvency II*, nous présentons notre raisonnement sous deux approches : l'approche moyenne-variance, qui est la technique scientifique la plus utilisée dans le domaine universitaire et dans le monde professionnel en matière de construction d'un portefeuille, et l'approche moyenne-VaR, qui prend en compte, dans la sélection des investissements, le niveau de la Value at Risk – fondement du nouveau système prudentiel en Europe.

2.1. SOLVENCY II ET LA SÉLECTION DU PORTEFEUILLE OPTIMAL DANS LE CADRE MOYENNE-VARIANCE

La gestion de portefeuille dans le cadre de *Solvency II* exigera donc une nouvelle contrainte - la *Value at Risk*. Dans cette approche, nous maximisons l'espérance de rendement par rapport à la contrainte que la probabilité de ruine est égale à $1 - q$ (ou moins que $1 - q$).

Nous supposons que l'investisseur possède un capital C_t (en effet, l'assureur dispose de fonds propres dédiés aux activités financières – destinés à assurer le risque de placement). Ce capital est alloué par la direction générale et anticipé dans le budget. Comme *Solvency II* (et la recherche et les professionnels) identifie le capital économique (ici C_t) avec la Value at Risk, nous supposons que C_t peut être estimé par la VaR. Nous rappelons que la SCR est définie comme la VaR. Ainsi, l'investisseur doit optimiser son portefeuille en prenant en compte le capital C_t (équivalent de la VaR_q).

Le montant C_t est dédié par la direction générale à assurer le risque de gestion financière (il est donc dédié à couvrir les pertes éventuelles venant d'une mauvaise gestion de portefeuille ou du risque de volatilité). En conséquence, le gestionnaire ne peut pas dépasser le risque – estimé comme la VaR – égal à C_t . Ainsi, $C_t = VaR_q$.

Rappelons que la VaR – est un montant, noté VaR_q , tel que la variation des prix du portefeuille ΔV observée durant l'intervalle h ne sera inférieure au montant VaR_q qu'avec une probabilité de $(1-q)$. Dans la formule, ceci devient $P(\Delta V \leq -VaR_q) = 1 - q \Leftrightarrow P(\Delta V \leq -C_t) = 1 - q \Leftrightarrow P(C_t + \Delta V \leq 0) = 1 - q$. Si nous remplaçons la VaR par le capital alloué aux activités financières, nous avons $P(C_t + \Delta V \leq 0) = 1 - q$. Nous pouvons ainsi reformuler le problème de l'optimisation, qui est redéfini de la façon suivante : $Max \{E(C_t + \Delta V) \mid P(C_t + \Delta V \leq 0) \leq 1 - q\}$. Si nous employons $E(C_t + \Delta V) = E(C_t) + E(\Delta V) = V_t + \mu_v$ et si nous ajoutons la contrainte nécessaire que la somme des montants investis dans chaque instrument financier (titre) $\theta_i, i = 1, \dots, N$ doit être égale à la valeur globale du portefeuille d'investissement à la date t , et que $\mu_v = \mu^T \theta$, alors l'ensemble d'équations devient :

$$Max \left\{ \mu_v \left| \begin{array}{l} P(\Delta V \leq -C_t) \leq 1 - q \\ \mathbf{1}^T \theta = V_t \\ \mu_v = \mu^T \theta \end{array} \right. \right\} \quad (2.1)$$

Ensuite, nous faisons l'hypothèse que des rendements sont elliptiquement distribués. Quand l'hypothèse la distribution elliptique est posée, la VaR peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} P[\Delta V \leq -C_t] \leq 1-q &\Leftrightarrow P\left[\frac{\Delta V - \mu_V}{\omega_V} \leq \frac{-C_t - \mu_V}{\omega_V}\right] \leq 1-q \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-C_t - \mu_V}{\omega_V} = k_{1-q} \Leftrightarrow \mu_V \geq -C_t - k_{1-q} \omega_V \end{aligned}$$

où k_{1-q} est le quantile d'ordre q et ω_V est la fonction de distribution d'une loi connue (distribution elliptique). Ainsi,

$$\mu_V \geq -C_t - z_{1-q} \sigma_V \quad (2.2)$$

avec $z_{1-q} \equiv \frac{k_{1-q} \omega_V}{\sigma_V}$, où z_{1-q} est le quantile d'ordre q de la loi normale centrée réduite et σ_V est l'écart type. Évidemment, nous considérons la moitié supérieure de la droite $\mu_V = -C_t - z_{1-q} \sigma_V$ (dans le plan « espérance de rendement - écart type ») à travers $(0, -V_t)$ avec la pente z_{1-q} (puisque la valeur de z_{1-q} reste toujours négative). Nous retrouvons la droite de ruine, définie en annexe.

En changeant la contrainte de la VaR (de la ruine) en contrainte de l'espérance de rendement μ_V et de l'écart type σ_V , nous devons ajouter la contrainte pour l'écart type (la variance) suivante $\sigma_V^2 = \theta^T \Sigma \theta$. Ainsi le système d'optimisation (2.1) devient :

$$\text{Max} \left\{ \mu_V \left\{ \begin{array}{l} \mu_V \geq -C_t - z_{1-q} \sigma_V \\ \bar{1}^T \theta = V_t \\ \mu_V = \mu^T \theta \\ \sigma_V^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right. \right\} \quad (2.3)$$

Intuitivement, les trois dernières contraintes donnent l'ensemble des portefeuilles efficients - toutes les combinaisons possibles des actifs risqués quand le montant total V_t est investi dans les actifs risqués. La première contrainte de (2.3) marque ces portefeuilles efficients, en les bornant par la ligne $\mu_V = -C_t - z_{1-q} \sigma_V$. L'objectif de (2.3) est de maximiser l'espérance de rendement. Ainsi, nous devons trouver la valeur maximale de μ_V dans le secteur de champ pointillé. Elle est atteinte au point d'intersection de la frontière efficiente et de la droite de ruine. Ce point peut être facilement calculé, en utilisant les formules pour la frontière efficiente et la droite de perte, définies en (6.3) et (6.25) : $\sigma_V^2 = \frac{1}{d} (c\mu_V^2 - 2bV_t\mu_V + aV_t^2)$ et

$\sigma_V^2 = \left(\frac{-C_t - \mu_V}{z_{1-q}} \right)^2$. Calculer le point d'intersection signifie égaliser les deux formules et les résoudre pour μ_V :

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{d} (c\mu_V^2 - 2bV_t\mu_V + aV_t^2) = \sigma_V^2 = \left(\frac{-C_t - \mu_V}{z_{1-q}} \right)^2. \text{ Cette équation résulte en}$$

$$\mu_{VaRopt} = \frac{b z_{1-q}^2 V_t + d C_t + z_{1-q} \sqrt{(a - z_{1-q}^2) d V^2 + 2 b d C_t V_t + c d C_t^2}}{c z_{1-q}^2 - d} \quad (2.4)$$

Ainsi, la variance peut être calculée :

$$\sigma_{VaRopt} = \left(\frac{-C_t - \mu_V}{z_{1-q}} \right) = \frac{b z_{1-q} V_t + c z_{1-q} C_t + \sqrt{(a - z_{1-q}^2) d V^2 + 2 b d C_t V_t + c d C_t^2}}{d - c z_{1-q}^2}$$

Le vecteur de θ_{opt} , regroupant les valeurs investies dans chaque titre (instrument financier) au point optimal, peut être calculé en employant la formule antérieure pour les portefeuilles sur la frontière efficiente

$$\theta_{VaRopt} = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} \left((a\bar{1} - b\mu) V_t + (c\mu - b\bar{1}) \mu_{opt} \right)$$

Si nous ajoutons des actifs sans risque, la frontière efficiente dévient en partie la DMC - la droite qui montre des combinaisons linéaires des actifs sans risque et du portefeuille de marché. Nous avons donc un nouveau système d'optimisation avec des actifs sans risque

$$Max \left\{ \mu_V \left| \begin{array}{l} P(\Delta V \leq -C_t) \leq 1 - q \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = V_t \\ \mu_V = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \end{array} \right. \right\} \quad (2.5)$$

et ensuite

$$Max \left\{ \mu_V \left| \begin{array}{l} \mu_V \geq -C_t - z_{1-q} \sigma_V \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = V_t \\ \mu_V = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \\ \sigma_V^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right. \right\}$$

La solution du système (2.5) signifie de trouver la valeur maximale pour μ_V dans le champ au-dessous de la DMC et au-dessus de la droite de ruine (le champ pointillé). Cette valeur maximale est le point d'intersection de la ligne de ruine avec la DMC (défini en annexe). Pour calculer ce point d'intersection, nous égalisons les formules des deux droites : $(\sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a})\sigma_V + \mu_f V_t = -C_t - z_{1-q}\sigma_V$, ainsi

$$\sigma_{VaRopta} = \frac{-C_t - \mu_f V_t}{z_{1-q} + \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}} \equiv \frac{-(C_t + \mu_f V_t)}{s + z_{1-q}} \quad (2.6)$$

où nous avons défini $s = \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$, la pente de la DMC. La moyenne correspondante peut être trouvée en employant la formule d'une des deux droites (c'est la droite de ruine qui est employée ici) :

$$\mu_{VaRopta} = -C_t - z_{1-q} \sigma_{opta} = -C_t - z_{1-q} \frac{-(C_t + \mu_f V_t)}{s + z_{1-q}} = \frac{\mu_f V_t z_{1-q} - C_t s}{s + z_{1-q}} \quad (2.7)$$

Nous voulons calculer maintenant les valeurs correspondantes pour θ_{opta} . Puisque nous ne sommes pas sur la frontière efficiente (comme dans le cas des actifs risqués) nous ne pouvons pas employer la même formule. Rappelons que chaque portefeuille sur la DMC est une combinaison linéaire du portefeuille de marché et des actifs sans risque. Supposons donc que nous investissons une proportion Θ_{pm} dans le portefeuille de marché et Θ_f dans des actifs sans risque. Comme la variance des actifs sans risque est égale à zéro et la covariance entre les actifs sans risque et le portefeuille de marché est aussi égal à zéro, nous avons :

$$\mu_{VaRopta} = \Theta_f \mu_f V_t + \Theta_{pm} \mu_{pm} \text{ et } \sigma_{VaRopta} = \Theta_{pm} \sigma_{pm} \quad (2.8)$$

Les formules pour μ_{pm} et σ_{pm} peuvent être retrouvées dans (6.7) et (6.8). De (2.8) nous

voyons que $\Theta_{pm} = \frac{\sigma_{VaRopta}}{\sigma_{pm}}$. Comme nous avons des expressions pour $\sigma_{VaRopta}$ et σ_{pm} , nous

pouvons calculer les fractions Θ_{pm} et Θ_f : $\Theta_{pm} = \frac{(C_t + \mu_f V_t)(c\mu_f - b)}{V_t s (s + z_{1-q})}$. Si nous employons

l'autre équation de (3.2.31), nous pouvons calculer la proportion investie dans les actifs sans

risque : $\Theta_f = \frac{\mu_{VaRopta} - \Theta_{pm} \mu_{pm}}{V_t \mu_f}$. Nous avons des expressions pour $\mu_{VaRopta}$, Θ_{pm} , μ_{pm}

ainsi nous pouvons calculer cette proportion. Nous arrivons au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \Theta_f &= \frac{\frac{\mu_f V_t z_{1-q} - C_t s}{s + z_{1-q}} - \left(\frac{(C_t + \mu_f V_t)(c\mu_f - b)}{V_t s (s + z_{1-q})} \right) \left(\frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} V_t \right)}{V_t \mu_f} = \\ &= \frac{\mu_f V_t z_{1-q} s + \mu_f V_t a + C_t a - C_t s^2 - C_t b \mu_f - V_t b \mu_f^2}{V_t \mu_f s (s + z_{1-q})} = \\ &= \frac{V_t (\mu_f z_{1-q} s + \mu_f a - b \mu_f^2) + C_t (a - b \mu_f - s^2)}{V_t \mu_f s (s + z_{1-q})} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Alors, les montants totaux investis dans chaque portefeuille sont :

$$\theta_{VaRopta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \\ \theta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_{pm} \theta_{pm} \\ \Theta_f V_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(C_t + \mu_f V_t)}{V_t s (s + z_{1-q})} \Sigma^{-1} (\mu_f \bar{1} - \mu) V_t \\ \frac{V_t (\mu_f z_{1-q} s + \mu_f a - b \mu_f^2) + C_t (a - b \mu_f - s^2)}{\mu_f s (s + z_{1-q})} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

La formule (2.9) nous permet d'estimer le niveau de C_t en adéquation avec le risque de l'assureur. En effet, dans l'approche « bottom-up » chaque assureur choisit sa propre allocation d'actifs (avec la proportion Θ_f dédiée aux obligations qui immunise les passifs) et détermine de cette manière son portefeuille optimal. Naturellement, nous supposons que l'assureur est un investisseur rationnel et qu'il optimise ses investissements, en choisissant le

portefeuille sur la DMC. Nous pouvons donc retrouver la valeur de $C_{t,CE}$ qui permet à la droite de ruine (avec la formule $\mu_V = -C_t - z_{1-q}\sigma_V$) de croiser la DMC (avec la formule $\mu_V = \left(\sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}\right)\sigma_V + \mu_f V_t$) dans le point $(\mu_{opta}, \sigma_{opta})$ - ainsi, $C_{t,CE} = VaR_{q,opta}$. Ceci nous donne le niveau du Capital Economique de chaque assureur - pour que sa gestion financière soit optimale, le niveau du capital dédié à la gestion financière C_t devrait être proche du niveau du Capital Economique $C_{t,CE}$ ($C_t \approx C_{t,CE}$):

$$C_{t,CE} = \frac{V_t (\Theta_f \mu_f s^2 + b \mu_f^2 + \Theta_f \mu_f s z_{1-q} - \mu_f z_{1-q} s - \mu_f a)}{(a - b \mu_f - s^2)} \quad (2.11)$$

Si l'assureur fixe le niveau de C_t au-dessous du montant $C_{t,CE}$, il ne pourra pas couvrir le risque d'investissements en q pour cent (le montant de C_t ne sera pas suffisant pour assurer le niveau de VaR_q). Au contraire, si la société d'assurance établit le montant de C_t au dessus de $C_{t,CE}$, le portefeuille d'investissement de l'assureur va être toujours sous-optimal (l'assureur ne va pas employer la totalité des fonds propres, égale à C_t , pour couvrir le risque de marché).

Nous rappelons que - dans l'approche « top-down » - le montant C_t (dans le cadre de Solvency II appelé la SCR) est établi (par la direction générale) au début de chaque exercice (comptable). Pour que le portefeuille optimal fixé par rapport à la contrainte de la VaR ne diverge pas du portefeuille optimal lié aux autres critères d'optimisation (ex. critérium de Markowitz présenté en annexe), l'assureur doit fixer le niveau de C_t en liaison avec les prévisions de ces critères d'optimisation. Par exemple, l'assureur doit prévoir (grâce au modèle ALM) le niveau nécessaire de Θ_f pour immuniser les provisions techniques (envisageable). En conséquence, le système ALM prévoit le niveau de Θ_f nécessaire et nous permet d'employer la formule (2.11). Cette formule du Capital Economique $C_{t,CE}$ est une transformation des objectifs de la politique d'investissement sous le régime de Solvency I aux principes de Solvency II puisque le montant de $C_{t,CE} = C_t$ (qui sert à trouver le portefeuille optimal dans Solvency II) est établi par rapport aux critères de Markowitz (utilisés dans Solvency I).

En pratique, comme le montant C_t - fixé au niveau de la direction générale au début de chaque exercice - est établi indépendamment de la gestion quotidienne des investissements, sa valeur ne peut pas être égale à la valeur future et inconnue de la VaR. Il doit être un peu plus élevé pour absorber les changements non prévus par la modélisation, mais il ne peut pas être plus bas puisque le capital C_t ne couvrirait pas la totalité du risque de marché. Ainsi, $C_t \geq C_{t,CE}$.

La deuxième contrainte sur C_t est fixée par la réglementation. Définissons $C_{t,CR}$ comme le niveau de capital pour lequel la droite de ruine croise la DMC dans le point où $\Theta_f = \Theta_{fCR}$. Le régulateur limite le pourcentage des actifs risqués dans les portefeuilles des assureurs. Notons ce pourcentage minimal des actifs sans risque (puisque $\Theta_f = 1 - \Theta_{pm}$) comme Θ_{fCR} - $\Theta_{fCR} \leq \Theta_f < 1$. Ainsi,

$$C_{t,CR} = \frac{V_t (\Theta_{fCR} \mu_f s^2 + b \mu_f^2 + \Theta_{fCR} \mu_f s z_{1-q} - \mu_f z_{1-q} s - \mu_f a)}{(a - b \mu_f - s^2)} \quad (2.12)$$

Nous avons donc la formule pour le niveau des fonds propres $C_t = C_{t,CR}$ qui protège le portefeuille le plus risqué (accepté par la réglementation pour les sociétés d'assurances). L'assureur ne doit pas établir le montant de C_t plus élevé que $C_{t,CR}$ puisque son portefeuille d'investissement, limité par la réglementation, ne génère pas de risque de marché plus haut. Un montant des fonds propres plus importante que $C_{t,CR}$ produirait automatiquement la sous-optimalité de l'allocation d'actifs (du portefeuille d'investissement) par rapport la contrainte de la VaR.

2.2. SOLVENCY II ET LA SELECTION DU PORTEFEUILLE OPTIMAL DANS LE CADRE MOYENNE-VAR

Dans ce paragraphe, nous recherchons le portefeuille qui maximise l'espérance de rendement, en satisfaisant les contraintes de la VaR, dans le plan moyenne-VaR. Nous avons démontré en section 2.1 que l'investisseur optimise son portefeuille par rapport au montant du capital C_t , correspondant au niveau des fonds propres destinés à couvrir l'aléa venant du caractère risqué des activités financières. Nous avons souligné que C_t est un équivalent de la VaR_q . Dans ce paragraphe, nous définissons $VaR_{q,C} = C_t$ où $VaR_{q,C}$ est le niveau de la VaR maximal accepté par la réglementation (le montant minimal de la VaR) pour le portefeuille d'investissement si l'investisseur dépose le capital C_t . Notre problème de l'optimisation devient :

$$Max \left\{ \mu_v \left| \begin{array}{l} VaR_q \leq VaR_{q,C} \\ \bar{1}^T \theta = V_t \\ \mu_v = \mu^T \theta \end{array} \right. \right\} \quad (2.13)$$

Si nous reprenons l'hypothèse que les rendements sont distribués elliptiquement, la première contrainte de (2.13) peut être réécrite comme :

$$VaR_q \leq VaR_{q,C} \Leftrightarrow VaR_{q,C} \geq VaR_q = -\mu_v - z_{1-q} \sigma_v \Leftrightarrow \mu_v \geq -VaR_{q,C} - z_{1-q} \sigma_v$$

Ainsi, le problème d'optimisation se transforme en :

$$Max \left\{ \mu_v \left| \begin{array}{l} \mu_v \geq -VaR_{q,C} - z_{1-q} \sigma_v \\ \bar{1}^T \theta = V_t \\ \mu_v = \mu^T \theta \\ \sigma_v^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right. \right\} \quad (2.14)$$

Comme nous traitons la VaR maximale acceptée par la réglementation (notée $VaR_{q,C}$) comme l'équivalent du capital au début de l'exercice C_t (ainsi $VaR_{q,C} = C_t$), le système d'optimisation défini en (2.14) est un équivalent du problème d'optimisation de (2.13).

Il est facile de trouver le point optimal sur le plan moyenne-VaR puisque $VaR_{q,VaRopt} = VaR_{q,C} = C_t$. Nous reprenons aussi les valeurs de μ_{VaRopt} et de θ_{VaRopt} . Nous devons seulement retrouver la valeur minimale de C_t qui est la même que celle du portefeuille sur la frontière efficiente avec la valeur de la VaR minimale. Comme nous avons établi la formule pour la frontière efficiente en (6.16), il nous suffit de placer le dérivé de cette fonction à zéro et de le résoudre pour μ_V . Nous obtenons :

$$\frac{\partial VaR_q}{\partial \mu_V} = -1 - \frac{z_{1-q}(c\mu_V - bV_t)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_V^2 - 2bV_t\mu_V + aV_t^2)}} = 0$$

La solution de ceci pour μ_V nous donne l'espérance de rendement de la VaR minimale :

$\mu_{VaR \min} = \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{c\sqrt{cz_{1-q}^2 - d}} \right) V_t$. La valeur correspondante de la VaR est calculée en employant (6.16) :

$$VaR_{VaR \min} = -\mu_{VaR \min} - z_{1-q}\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{VaR \min}^2 - 2bV_t\mu_{VaR \min} + aV_t^2)} = \left(-\frac{b}{c} + \frac{\sqrt{cz_{1-q}^2 - d}}{c} \right) V_t$$

L'écart type de la VaR minimale est donné par

$$\sigma_{VaR \min} = \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{VaR \min}^2 - 2bV_t\mu_{VaR \min} + aV_t^2)} = \frac{-z_{1-q}V_t}{\sqrt{cz_{1-q}^2 - d}}$$

du portefeuille avec la VaR minimale est calculée en utilisant (6.4), se résout en

$$\theta_{VaR \min} = \frac{1}{c\sqrt{cz_{1-q}^2 - d}} \Sigma^{-1} \left(\left(\sqrt{cz_{1-q}^2 - d} - b \right) \bar{1} + c\mu \right) V_t$$

Nous avons des contraintes sur le montant de C_t , et nous pouvons définir le portefeuille optimal dans le cadre moyenne-VaR.

Comme présenté en annexe, la frontière efficiente modifie la DMC quand des actifs sans risque sont introduits. Nous reprenons (2.13) qui devient le nouveau système d'optimisation de l'assureur

$$Max \left\{ \mu_V \left\{ \begin{array}{l} VaR_q \leq VaR_{q,C} \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = V_t \\ \mu_V = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \end{array} \right. \right\} \quad (2.15)$$

Si nous reprenons l'hypothèse que les rendements sont distribués elliptiquement, la première contrainte de (2.15) peut être réécrite comme:

$$VaR_q \leq VaR_{q,C} \Leftrightarrow VaR_{q,C} \geq VaR_q = -\mu_V - z_{1-q} \sigma_V \Leftrightarrow \mu_V \geq -VaR_{q,C} - z_{1-q} \sigma_V$$

Ainsi, le problème d'optimisation se transforme en :

$$\text{Max} \left\{ \mu_V \left| \begin{array}{l} \mu_V \geq -\text{VaR}_{q,C} - z_{1-q} \sigma_V \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = V_t \\ \mu_V = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \\ \sigma_V^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right. \right\} \quad (2.16)$$

Nous cherchons donc à représenter mathématiquement le portefeuille optimal de l'assureur qui détient des actifs sans risque, en transposant le plan moyenne-variance dans le cadre moyenne-VaR. Les valeurs de μ_{VaRopta} , θ_{VaRopta} , $C_{t,CE}$ et $C_{t,CR}$ restent inchangées. Nous devons seulement transformer la formule de σ_{VaRopta} . Nous avons donc $\text{VaR}_q = -\mu_V - z_{1-q} \sigma_V$ et $\sigma_{\text{VaRopta}} = \frac{-(C_t + \mu_f V_t)}{s + z_{1-q}}$, qui se résout en $\text{VaR}_{q,\text{VaRopta}} = -\mu_{\text{VaRopta}} + \frac{z_{1-q}(C_t + \mu_f V_t)}{s + z_{1-q}}$.

Nous pouvons, finalement, encadrer les formules mathématiques (dans le plan moyenne-variance) pour le portefeuille optimal de l'assureur qui établit un montant de capital C_t (borné de deux côtés), dédié à la couverture des risques liés à la gestion financière.

Encadré 1: portefeuille optimal de l'assureur dans l'approche « bottom-up »

$$\mu_{\text{VaRopta}} = \frac{\mu_f V_t z_{1-q} - C_t s}{s + z_{1-q}}$$

$$\sigma_{\text{VaRopta}} = \frac{-(C_t + \mu_f V_t)}{s + z_{1-q}}$$

$$\text{VaR}_{q,\text{VaRopta}} = -\mu_{\text{VaRopta}} + \frac{z_{1-q}(C_t + \mu_f V_t)}{s + z_{1-q}}$$

$$\theta_{\text{VaRopta}} = \left(\frac{\frac{(C_t + \mu_f V_t)}{V_t s (s + z_{1-q})} \Sigma^{-1} (\mu_f \bar{1} - \mu) V_t}{\frac{V_t (\mu_f z_{1-q} s + \mu_f a - b \mu_f^2) + C_t (a - b \mu_f - s^2)}{\mu_f s (s + z_{1-q})}} \right)$$

$$\text{et } C_{t,CE} \leq C_t \leq C_{t,CR}$$

$$\text{et } C_{t,CE} = \frac{V_t (\Theta_f \mu_f s^2 + b \mu_f^2 + \Theta_f \mu_f s z_{1-q} - \mu_f z_{1-q} s - \mu_f a)}{(a - b \mu_f - s^2)}$$

$$\text{et } C_{t,CR} = \frac{V_t (\Theta_{fCR} \mu_f s^2 + b \mu_f^2 + \Theta_{fCR} \mu_f s z_{1-q} - \mu_f z_{1-q} s - \mu_f a)}{(a - b \mu_f - s^2)}$$

$$\text{et } s = \sqrt{c \mu_f^2 - 2b \mu_f + a} \text{ et } a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu \text{ et } b = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu$$

3. SOLVENCY II ET L'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE D'ACTIFS DE LA SOCIÉTÉ D'ASSURANCES : L'APPROCHE « TOP-DOWN »

L'approche « top-down » cherche à établir le montant de C_t (une partie des fonds propres dédiée à la couverture du risque de marché) qui sera optimal pour l'assureur (et ensuite, le gestionnaire d'actifs à la direction financière optimisera le portefeuille d'investissement par rapport à C_t). Comme nous changeons la vision de la politique d'investissement en passant à un niveau hiérarchique supérieur qui se caractérise par d'autres types d'objectifs, nous devons aussi employer des fonctions d'utilités de l'assureur différentes. Au niveau de la direction générale, l'assureur raisonne en fonction de la richesse de l'actionnaire – le rendement des fonds propres. Nous analysons au contraire dans ce paragraphe le choix de portefeuille d'investissement quand l'investisseur raisonne en fonction de ses capitaux propres. Si l'investisseur gère son portefeuille en optimisant des fonds propres économiques, il maximise une autre fonction d'utilité. Nous choisissons une fonction objective fondée sur le Rendement Ajusté au Risque sur le Capital (RAROC). Nous rappelons sa définition est:

$$RAROC = \frac{\mu_v}{VaR_q} \quad (3.1)$$

Comme cette mesure de performance est basée sur des formules différentes, elle ne donne pas les mêmes résultats d'optimisation de portefeuille. Plus la valeur de RAROC est élevée, plus la performance d'investissement est bonne. La valeur maximum de RAROC donne l'espérance de rendement la plus élevée, par rapport au montant du capital, ainsi RAROC est une mesure relative de risque. Sous ancien régime prudentiel, les assureurs européens devaient posséder un certain montant des fonds propres C_t qui était fixes et indépendants de la VaR. Les assureurs étaient obligés de posséder un certain montant du capital sous la forme des provisions (techniques) financières ou la marge de solvabilité. Néanmoins, le niveau de ce capital C_t était fixé indépendamment de la structure du portefeuille d'investissement et dépendait d'autres facteurs (ex. la marge de solvabilité est calculée par rapport aux sinistres observés ou aux primes encaissées, donc isolément au risque de marché). Sous Solvency II, les assureurs devront optimiser leurs investissements avec RAROC comme des fonctions objectives. Le montant obligatoire des fonds propres C_t , calculés via VaR_q , dépendront de la structure du portefeuille – de la VaR.

Nous allons donc présenter le comportement rationnel d'investissement de l'assureur, qui optimise son portefeuille par rapport à l'utilité des fonds propres dans un régime de Solvency II. Cela nous permettra d'illustrer l'impact de Solvency II sur la politique de placements des assureurs. Pour ne pas assombrir la démonstration, nous présentons l'optimisation de portefeuille par rapport des fonds propres économiques dans le cadre moyenne-VaR. Le raisonnement peut être transformé sur le plan moyenne-variance, en utilisant les procédures des sections précédentes, employées au changement du cadre de moyenne-variance au plan moyenne-VaR.

3.1. LA SELECTION DU PORTEFEUILLE D'INVESTISSEMENTS PAR RAPPORT A L'OPTIMISATION DES FONDS PROPRES ECONOMIQUES

Nous passons maintenant à la présentation de l'approche « top-down » de la politique financière de l'assureur qui travaille dans le cadre du régime prudentiel Solvency II. Nous rappelons que la société d'assurance sera obligée de fixer un montant des fonds propres C_t dépendant à la fois de la structure et du risque de son portefeuille d'investissement. Le niveau de C_t sera estimé via la VaR. Le problème d'optimisation de RAROC se définit

$$\text{Max} \left\{ \frac{\mu_V}{\text{VaR}_q} \left| \begin{array}{l} \mu_V = \mu^T \theta \\ \text{VaR}_q \leq \text{VaR}_{q,C} \\ \bar{1}^T \theta = V_t \end{array} \right. \right\}$$

Nous reprenons (3.1) et nous définissons la fonction objective

$$u_3 = \frac{\mu_V}{\text{VaR}_q} \quad (3.2)$$

Elle peut être écrit comme la droite de RAROC $\mu_V = u_3 \text{VaR}_q$, ainsi la maximisation du RAROC correspond à trouver la pente maximum u_3 de la ligne par l'origine, qui toujours chevauche avec le secteur pointillé.

Nous voyons que, dans le cadre moyenne-VaR, l'optimum se retrouve au point de tangence entre la droite de RAROC $\mu_V = u_3 \text{VaR}_q$ et la frontière efficiente. Pour calculer le portefeuille tangent - dans le point $(\mu_{u_{3opt}}, \text{VaR}_{q,u_{3opt}})$ - nous devons égaliser les pentes de la frontière efficiente et de la droite de RAROC.

La formule de la frontière efficiente est donnée en (6.16) :

$\text{VaR}_q = -\mu_V - z_{1-q} \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_V^2 - 2bV_t\mu_V - aV_t^2)}$. La pente (inversé) de la ligne tangente est

$$\frac{\Delta \text{VaR}_{q,u_{3opt}}}{\Delta \mu_{u_{3opt}}} = \frac{-\mu_{u_{3opt}} - z_{1-q} \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{u_{3opt}}^2 - 2bV_t\mu_{u_{3opt}} - aV_t^2)} - 0}{\mu_{u_{3opt}} - 0} . \text{ La pente de la frontière}$$

efficiente dans le point de tangence est simplement la dérivé de la frontière efficiente sur ce point :

$$\frac{\partial \text{VaR}_q}{\partial \mu_V} = -1 - z_{1-q} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d}(c\mu_V^2 - 2bV_t\mu_V - aV_t^2) \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{d} (2c\mu_V - 2bV_t) \Big|_{\mu_V = \mu_{u_{3opt}}}$$

donc

$$\frac{\partial VaR_q}{\partial \mu_V} = -1 - \frac{z_{1-q}(c\mu_V - bV_t)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_V^2 - 2bV_t\mu_V - aV_t^2)}} \Bigg|_{\mu_V = \mu_{u_3opt}} . \text{ Comme } \frac{\Delta VaR_{q,u_3opt}}{\Delta \mu_{u_3opt}} = \frac{\partial VaR_q}{\partial \mu_V} \Bigg|_{\mu_V = \mu_{u_3opt}} ,$$

$$\frac{-\mu_{u_3opt} - z_{1-q}\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{u_3opt}^2 - 2bV_t\mu_{u_3opt} - aV_t^2)} - 0}{\mu_{u_3opt} - 0} = -1 - \frac{z_{1-q}(c\mu_{u_3opt} - bV_t)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{u_3opt}^2 - 2bV_t\mu_{u_3opt} - aV_t^2)}} .$$

Ceci donne $\mu_{u_3opt} = \frac{a}{b}V_t$ ou $a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$ et $b = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu$. De plus, c'est le même point de tangence que dans le plan moyenne-variance parce que :

$$\text{Max} \left\{ \frac{\mu_V}{VaR_q} \right\} = \text{Max} \left\{ \frac{\mu_V}{-\mu_V - z_{1-q} \sigma_V} \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{-\mu_V - z_{1-q} \sigma_V}{\mu_V} \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{-z_{1-q} \sigma_V}{\mu_V} \right\} = \text{Max} \left\{ \frac{\mu_V}{\sigma_V} \right\}$$

Nous obtenons σ_{u_3opt} par $\sigma_{u_3opt} = \sqrt{\frac{1}{d} \left(c \frac{a^2}{c^2} V_t^2 - \frac{2ab}{b} V_t^2 - a V_t^2 \right)} = \frac{\sqrt{a}}{b} V_t$ et VaR_{q,u_3opt} par

$VaR_{q,u_3opt} = -\mu_{u_3opt} - z_{1-q} \sigma_{u_3opt} = -\frac{\sqrt{a}}{b} (\sqrt{a} + z_{1-q}) V_t$. Nous reprenons (6.4) et nous avons

$$\theta_{u_3opt} = \frac{c \frac{a}{b} V_t - b V_t}{d} \Sigma^{-1} \mu + \frac{a V_t - b \frac{a}{b} V_t}{d} \Sigma^{-1} \bar{1} = \Sigma^{-1} \mu \frac{V_t}{b} .$$

Notons que le portefeuille optimal (les valeurs de μ_{u_3opt} et VaR_{q,u_3opt}) est limité par la droite de ruine $VaR_{q,C}$. Si VaR_{q,u_3opt} dépasse $VaR_{q,C}$, nous devons réduire la pente u_3 jusqu'à ce que la droite de RAROC touche le point $(\mu_{VaRopt}, VaR_{q,VaRopt})$.

Si nous traitons le problème de maximisation du RAROC avec les actifs sans risques (le contexte assurantiel), nous maximisons le rapport

$$\text{Max} \left\{ \frac{\mu_V}{VaR_q} \left| \begin{array}{l} \mu_V = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \\ VaR_q \leq VaR_{q,CR} \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = V_t \end{array} \right. \right\}$$

Nous trouvons la pente la plus verticale possible de la droite de RAROC $\mu_V = u_3 VaR_q$ (maximisant ainsi u_3) qui se situe dans le secteur admissible par la réglementation prudentielle : $0 < VaR_{q,u_3opt} \leq VaR_{q,CR}$ et $\mu_f < \mu_{u_3opt} \leq \mu_{u_1opt}$. Pourtant, nous pouvons tourner la droite de RAROC jusqu'à ce qu'elle atteigne le point proche du portefeuille sans risque $(\mu_f, 0)$. Notons qu'elle ne s'arrête pas au point de tangence, comme c'était le cas dans la situation des actifs risqués. La valeur de la VaR tend vers zéro en se déplaçant vers le point sans risque, et le rapport de RAROC tend à l'infini (nous maximisons u_3). L'investisseur ne peut pas investir tout le capital aux actifs sans risque puisque le RAROC (avec le capitaconsommé) ne peut pas aller à l'infini ($VaR_q > 0$). Le portefeuille d'investissement doit

avoir un petit pourcentage (proche de zéro) des actifs risqués pour que cette mesure de performance soit réaliste.

De point de vue mathématique, nous devons donc égaliser la DMC avec la droite de RAROC.

Ainsi, $\mu_V = \frac{-s}{z_{1-q} + s} VaR_q + \frac{z_{1-q} \mu_f}{z_{1-q} + s} V_t$ et $\mu_V = u_3 VaR_q$, ce qui signifie que

$u_3 VaR_q = \frac{-s}{z_{1-q} + s} VaR_q + \frac{z_{1-q} \mu_f}{z_{1-q} + s} V_t$. Si $u_3 = \frac{-s}{z_{1-q} + s} + \frac{z_{1-q} \mu_f}{VaR_q (z_{1-q} + s)} V_t$, alors

$\lim_{VaR_q \rightarrow 0} u_3 = +\infty$. Autrement, si $VaR_q = \frac{z_{1-q} \mu_f V_t}{u_3 + \frac{s}{z_{1-q} + s}}$, en conséquence $\lim_{u_3 \rightarrow +\infty} VaR_q = 0$.

Nous pouvons encadrer le portefeuille optimal de l'assureur optimisant son portefeuille d'investissement par rapport RAROC.

Encadré 2: portefeuille optimal de l'assureur dans l'approche « top-down »

$$\mu_{u3opta} \approx \frac{z_{1-q} \mu_f}{z_{1-q} + s} V_t$$

$$\sigma_{u3opta} \approx 0$$

$$VaR_{q,u3opta} \approx 0$$

$$\theta_{u3opta} \approx V_t$$

$$\text{et } \Theta_f \approx 1$$

3.2. L'EXTENSION DE L'APPROCHE « TOP-DOWN » AU RATIO DE CAPITAL

Dans les parties précédentes, nous avons analysé la politique de placement des assureurs par rapport des différentes fonctions d'utilité (optimisation) et nous avons assumé implicitement que le ratio de capital est unitaire. Nous définissons ce ratio RC en tant que

$$RC = \frac{C_{r,t}}{C_t} \quad (3.3)$$

où C_t est un montant obligatoire des fonds propres (calculés via VaR_q dans le cadre de Solvency II) et $C_{r,t}$ est un montant des capitaux réellement possédés par l'assureur (en passifs) à la date t .

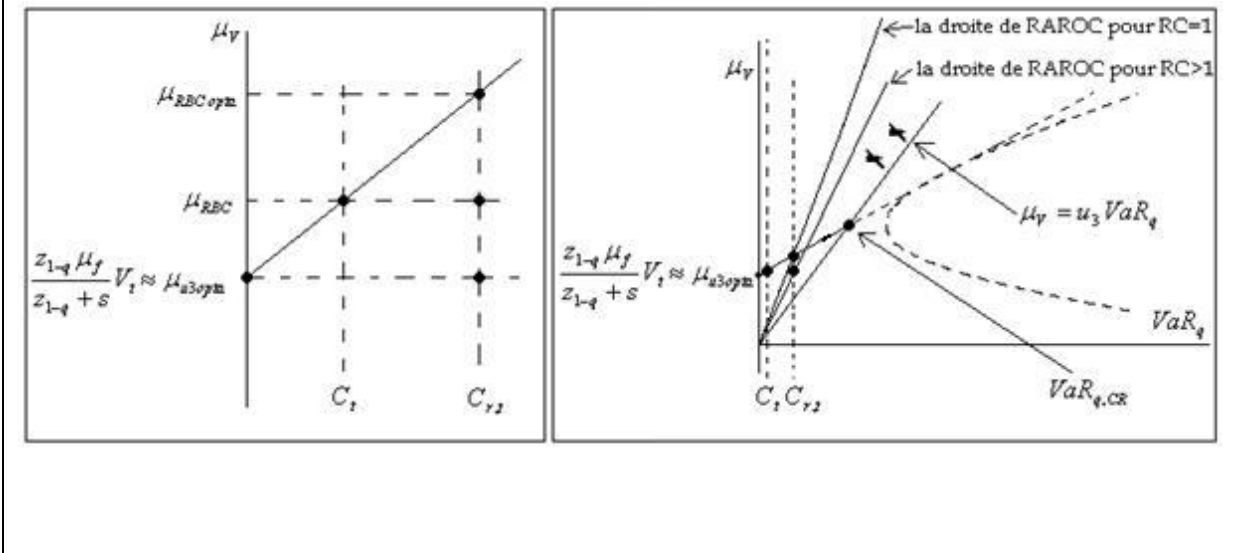
Dans cette sous-section, nous expliquons comment ce ratio est à la source des décisions financières des sociétés d'assurances. L'analyse d'impact de ratio de capital sur les décisions financières des assureurs clôture notre examen de la gestion d'actifs en assurance.

L'hypothèse que le ratio de capital est égal à un n'est pas toujours satisfaite. Plus les assureurs sont dotés aux instruments permettant de bien estimer le risque de marché, plus leur ratio de capital est proche d'un. Notamment, l'introduction des modèles internes par Solvency II stimulera les assureurs européens à approcher leurs RC autour de un (nous rappelons que les objectifs de Solvency II assument la détention des fonds propres au niveau de Capital Economique). Nous disposons aujourd'hui des instruments actuariellement sophistiqués (VaR) capables de bien calculer et pronostiquer le capital nécessaire à couvrir le risque de marche. Ainsi, les régulateurs et contrôleurs auront plus de confiance aux calculs du SCR et ils vont stimuler les sociétés d'assurances à garder leurs ratios de capital proche de la valeur unitaire. Par contre, aux Etats-Unis, NAIC incite les assureurs à tenir leurs ratios de capital aux niveaux supérieurs de un parce que les sociétés d'assurances américaines ne peuvent pas utiliser les modèles internes, et des estimations des montants des fonds propres nécessaires à couvrir le risque de marché sont biaisées. NAIC n'a pas de confiance pour la fiabilité du RBC et exige (implicitement) que des capitaux réellement possédés par les assureurs excèdent des montants obligatoires des fonds propres. Les assureurs aux Etats-Unis n'ont pas de problème de tenir le numérateur de la formule (3.3) élevé parce que, depuis des années, on observe la hausse des prix des valeurs des sociétés d'assurances américaines. Une forte capitalisation boursier des assureurs américaine permet de tenir des ratios de capital supérieurs a un.

Dans ces cas, C_t diverge de $C_{r,t}$ et la sélection de portefeuille par rapport aux fonctions objectives RAROC doit être revue en prenant en compte ce surplus de capital. Deux montants du capital C_t et $C_{r,t}$ peuvent être représentés (estimés) par la VaR. (nous assumons que ces montants sont calculés correctement avec la probabilité de ruine $(1-q)$). Le supplément du capital de l'assureur (soit l'excédent de fonds propres dépassant le Capital Economique) est une différence entre deux valeurs. L'expression de C_t et de $C_{r,t}$ par la VaR nous permettra de démontrer, dans le plan moyenne-VaR, comment les régulations prudentiels aux Etats-Unis impactent l'utilité des assureurs et pourquoi les assureurs américaines - possédant un supplément de fonds propres et utilisant les fonctions objectives RAROC - gardent les actions dans leurs portefeuilles d'investissement. En effet, la VaR du portefeuille est établi par $C_{r,t}$ tandis que le rendement du portefeuille est lié à C_t - ce valeur précise le montant des fonds propres nécessaires pour couvrir le risque du portefeuille qui offre un rendement μ_V . Comme l'assureur doit garder son ratio de capital au dessus des exigences explicites de la commission de contrôle et du marché, il ne peut pas, en optimisant sa fonction objective RAROC, diminuer la différence entre C_t et de $C_{r,t}$ au dessous de certain valeur, attachée à RC (valeur du RBC implicitement exigé par NAIC et le marché). Le montant des fonds propres réel est déterminé par rapport aux projections à long terme et en fonction des perceptions du risque par l'assureur. Plus ses plans demandent le capital supplémentaire (ex. projet d'expansion commerciale ou de rachat d'un concurrent) ou plus le management estime le risque d'ajustement imparfait du ratio de capital d'être élevé (ex. à cause de la volatilité extensive des prix des actions des assureurs), plus $C_{r,t}$ augmente. Son niveau est assez stable dans le temps puisque le management ne demande pas souvent les actionnaires d'augmenter le capital, donc il préfère de fixer $C_{r,t}$ au dessus du niveau garantissant le RC implicitement exigé (quasi assurance contre le risque d'ajustement inappropriée du ratio de capital).

Si l'assureur constate que son RC est au-dessus des exigences implicites du marché et du contrôleur, il peut corriger ce ratio de capital par diminutions de fonds propres (action irrationnel puisque la situation peut se renverser) ou par l'augmentation de C_t (incorporation a son portefeuille d'investissement des instruments risqués et augmentation de μ_V). Ainsi, des assureurs américaines diminuent leurs RC trop élevés, en acquérant des actions, et donc en déplaçant leurs portefeuilles sur le plan moyenne-VaR de $(\mu_f, C_{r,t})$ à $(\mu_{RBC}, C_{r,t})$ - nous définissons μ_{RBC} comme un rendement de l'assureur (américaine) qui déteint des actions dans son portefeuille. Le RC est réduit à la différence entre C_t et $C_{r,t}$ (jusqu'au niveau implicitement exigé), et le rendement du portefeuille augmente de μ_f à μ_{RBC} . L'utilité de l'assureur monte aussi puisque la droite de RAROC devient plus verticale et sa tangente (u_3) monte. La partie gauche du graphique 1 présente les détails de déplacement du portefeuille du point $(\mu_f, C_{r,t})$ vers le point $(\mu_{RBC}, C_{r,t})$ et explique les liaisons entre μ_{RBC} (calculé pour C_t) et $C_{r,t}$. Nous voyons que tous les allocations pour RC supérieurs d'un (quand C_t diverge de $C_{r,t}$) sont inefficaces - les portefeuilles ne résident pas sur la DMC et leurs rendements n'atteignent pas l'espérance de rendement $\mu_{RBCopta} = \mu_{VaROpta}$ (prévue pour le ratio de capital unitaire). La partie droite du graphique 1 montre la vision plus globale du problème d'optimisation de RAROC dans le plan moyenne-VaR.

Graphique 1 : ajustement du portefeuille de l'assureur (américaine) dans le plan moyenne-VaR - quand l'assureur possède le niveau des fonds propres réels $C_{r,t}$ et son ratio de capital est supérieur a un



Nous pouvons ainsi expliquer la détention des actions par les assureurs américaines. Ils optimisent leurs RAROC dans le cadre réglementaire restreint par NAIC. La possession des actions renforce la sécurité puisque, si le phénomène de rupture des marchés financiers se produit, les assureurs peuvent vendre rapidement ces actifs liquides (en obtenant immédiatement du cash) et remonter le ratio RBC (stabilisant la diminution de la valeur de

$C_{r,t}$ par la baisse de C_t). Evidemment, la sécurité supplémentaire a son prix sous la forme du coût en capital. Ainsi, les assureurs aux Etats-Unis remportent continuellement des ROE et ROA très bas en comparaison avec d'autres industries.

Encadré 3: portefeuille de l'assureur dans l'approche « top-down » - quand l'assureur possède le niveau des fonds propres réels $C_{r,t}$ et son ratio de capital est égal à RC

$$\mu_{RBC} = \frac{\mu_f V_t z_{1-q} RC - C_{r,t} s}{RC (s + z_{1-q})}$$

$$VaR_{q,RBC} = C_{r,t}$$

$$\theta_{RBC} = \left(\begin{array}{c} \frac{(C_{r,t} + RC \mu_f V_t)}{RC V_t s (s + z_{1-q})} \Sigma^{-1} (\mu_f \bar{1} - \mu) V_t \\ \frac{C_{r,t} (a - b \mu_f - s^2) + RC V_t (\mu_f z_{1-q} s + \mu_f a - b \mu_f^2)}{RC \mu_f s (s + z_{1-q})} \end{array} \right)$$

$$\text{et } RC \geq 1$$

$$\text{et } \frac{C_{r,t}}{RC} \leq C_{t,CR}$$

$$\text{et } C_{t,CR} = \frac{V_t (\Theta_{fCR} \mu_f s^2 + b \mu_f^2 + \Theta_{fCR} \mu_f s z_{1-q} - \mu_f z_{1-q} s - \mu_f a)}{(a - b \mu_f - s^2)}$$

$$\text{et } s = \sqrt{c \mu_f^2 - 2b \mu_f + a} \text{ et } a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu \text{ et } b = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu$$

4. CONCLUSION

Nous avons démontré théoriquement que l'assureur optimisant le rendement pour son actionnaire vise l'exclusion des instruments risqués de son portefeuille d'investissement. Nous avons aussi explicité pourquoi aux Etats-Unis les assureurs sont indifférents quant aux chargements des normes RBC et gardent des actions, ce qui sous-optimise leurs RAROC. Nous soulignons que les analyses empiriques approuvent notre modèle théorique (ex. le ROE des assureurs américains est continuellement très bas en comparaison avec d'autres industries). En Europe, les QIS démontrent qu'une partie des sociétés d'assurances n'est pas suffisamment capitalisée. En prenant en compte le modèle théorique présenté dans cet article, nous pouvons prédire que ces assureurs vont être davantage incités, d'abord, à restituer leurs ratios de capital (via la vente des actions) et, ensuite, à optimiser leurs fonds propres économiques (donc à détenir des instruments financiers sans risque). Cette conclusion ainsi que ses conséquences devront être examinées en détail lors de travaux futurs sur des éléments précis de Solvency II.

5. BIBLIOGRAPHIE

- Baranoff, E, Sager, T.W., What's running life insurers' asset allocation decisions? Regulation, Financial rating, owners/manager conflicts or other determinants?, working paper, 2004
- Baranoff, Etti G. and Thomas W. Sager "The Relationship between Asset Risk, Product Risk, and Capital in the Life Insurance Industry," *Journal of Banking and Finance*, 26 (2000): 1181-1197
- Baranoff, Etti G., And Thomas W. Sager "The Interrelationship Among Organizational And Distribution Forms And Capital And Asset Risk Structures In The Life Insurance Industry" *Journal Of Risk and Insurance*, Sept. 2003, v70 i3 p375(26)
- Cummins, J. David, "Allocation of Capital in the Insurance Industry" *Risk Management and Insurance Review*, 3 (2000), 1: 7-27
- Cummins, J. David, and Sommer, David W., "Capital and Risk in Property-Liability Insurance Markets," *Journal of Banking & Finance*, 20 (1996): 1069-1092
- Cummins, J.D., Harrington S. E. , Klein, R., Insolvency experience, risk-based capital, and prompt corrective action in property-liability insurance, *Journal of Banking and Finance*, 19 (1995), 511-527
- Cummins, J.D., S. Harrington, and G. Niehaus, 1993, An economic overview of risk-based capital requirements in the property-liability insurance industry, *Journal of Insurance Regulation* 11, 427-447.
- Cummins, J.D., S. Harrington, and G. Niehaus, 1994, Risk-based capital requirements for property-liability insurers: A financial analysis, in: E. Altman and I. Vanderhoof, eds., *The financial dynamics of the insurance industry* (Irwin Professional Publishers, Homewood, IL).
- Fedor, M., Solvabilité II ne doit pas pénaliser l'investissement en actions, *Revue Risques*, no. 66, Juin 2006
- Froot, K. A. "Risk Management, Capital Budgeting and Capital Structure Policy for Insurers and Reinsurers." *Journal of Risk and Insurance* 74, no. 2 (June 2007): 273-299
- Grace, M., S. Harrington, and R. Klein, 1993, Risk-based capital standards and insurer insolvency risk: an empirical analysis, paper presented at the 1993 Annual Meeting of the American Risk and Insurance Association
- Haubrich, J. G., and P. Wachtel. 1993. "Capital Requirements and Shifts in Commercial Bank Portfolios." *Federal Reserve Bank of Cleveland ECoNoMIC REVIEW* 29 (third quarter): 2-15.
- Madsen, Ch., Does the NAIC Risk Based Capital suffice and are Property&Casualty Insurance Company asset allocation rational?, May 2002
- Petroni, K., Shackelford, D., The Effect of Risk Based Capital on Life Insurers' Investment Portfolios, The Wharton School, Working Paper 96-21
- Wall, L.D. and D.R. Peterson. 1995a. "The effect of capital adequacy guidelines on large bank holding companies." *Journal of Banking and Finance* 11: 581-600.
- Wall, L.D. and D.R. Peterson. 1995b. "Bank holding company capital targets in the early 1990s: The regulators versus the markets." *Journal of Banking and Finance* 19: 563-574

6. ANNEXES

6.1. LES ELEMENTS DU CADRE THEORIQUE DE LA SELECTION DU PORTEFEUILLE OPTIMAL

Pour pronostiquer les changements des préférences d'investissements des assureurs, nous devons nous référer au modèle principal du choix de portefeuille. La méthode dite de Markowitz est bien connue dans le milieu de la finance. Elle sert quotidiennement aux investisseurs sur les marchés ainsi qu'aux chercheurs construisant leurs réflexions théoriques. Nous reprenons seulement les éléments essentiels de MEDAF pour notre réflexion qui a comme objectif de démontrer comment Solvency II influencera le choix de portefeuille d'investissement des assureurs.

6.1.1. LA FRONTIÈRE EFFICIENTE, LA DROITE DU MARCHE DES CAPITAUX ET LE PORTEFEUILLE DE MARCHE DANS LE CADRE MOYENNE-VARIANCE

Tout investisseur rationnel tendra à investir dans un portefeuille efficient. Le portefeuille efficient est défini comme un portefeuille maximisant l'espérance de rendement pour un niveau de risque donné (l'écart type), ou un portefeuille qui minimise le risque (la variance) par rapport à l'espérance de rendement donné. La fonction objective (la fonction minimisée) est la fonction de l'écart type. Cependant, nous prenons la variance (l'écart type au carré) comme la fonction objective, ce qui est acceptable puisque l'écart type ne peut être que positif. La fonction objective est donc

$$\begin{aligned}\sigma^2(V_{t+h}) &= \sigma^2(V_t + \Delta V) = \sigma^2(\Delta V) = \sigma^2(\Delta v^T \theta) = \theta^T \Sigma \theta \\ (\sigma^2(C_{t+h})) &= \sigma^2(C_t + \Delta V) = \sigma^2(\Delta V) = \sigma^2(\Delta v^T \theta) = \theta^T \Sigma \theta\end{aligned}$$

Pour minimiser cette fonction objective, deux contraintes doivent être satisfaites – et une troisième qui est caractéristique du secteur de l'assurance. Premièrement, l'espérance de rendement doit être fixée parce que nous minimisons le risque avec le rendement donné. Cette moyenne de portefeuille est donnée par μ_v . Ainsi, $\mu^T \theta = \mu_v$. Deuxièmement, l'assureur investit le montant qu'il détient au moment de l'achat des titres. Ainsi, les montants que l'assureur investit dans chaque instrument financier doivent s'ajouter jusqu'à la quantité fixée, noté V_t . Donc, $\bar{1}^T \theta = V_t$. Troisièmement, dans le secteur de l'assurance la vente à découvert est interdite par la réglementation - $\theta_i \geq 0$. Nous cherchons à trouver une allocation d'actifs avec la variance minimale, donc nous devons résoudre le problème suivant :

$$\text{Min} \{ \theta^T \Sigma \theta \mid A^T \theta = B \}$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} \mu & \bar{1} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \mu_v \\ V_t \end{pmatrix}$$

Nous employons la méthode de Lagrange pour résoudre ce système. Nous obtenons les conditions suivantes, où λ_0 est un multiplicateur de Lagrange :

$$\begin{cases} 2\Sigma\theta + A\lambda_0 = 0 \\ A^T\theta = B \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

La solution de l'équation (6.1) pour θ donné, avec la redéfinition du vecteur $\lambda = -\frac{1}{2\lambda_0}$ donne $\theta = \Sigma^{-1}A\lambda$. Ainsi, la deuxième équation de (6.1) devient $A^T\Sigma^{-1}A\lambda = B \Rightarrow \lambda = (A^T\Sigma^{-1}A)^{-1}B \equiv H^{-1}B$ ou $H = (A^T\Sigma^{-1}A)$ et $H^T = (A^T\Sigma^{-1}A)^T = A^T(\Sigma^{-1})^T A = A^T\Sigma^{-1}A = H$ donc H est une matrice symétrique (2×2). Complétant ces expressions dans la formule de la variance, nous obtenons

$\sigma^2(\Delta V) = \theta^T \Sigma \theta = \theta^T \Sigma \Sigma^{-1} A \lambda = \theta^T A \lambda = (A^T \theta)^T H^{-1} B = B^T H^{-1} B$. Nous avons vu que H est une matrice symétrique (2×2), ainsi supposons que

$$H \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1} = \frac{1}{ac-b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Définissons $d \equiv \det(H) = ac - b^2$. Comme $H = (A^T \Sigma^{-1} A)$, nous constatons que

$$\begin{aligned} a &= \mu^T \Sigma^{-1} \mu \\ b &= \mu^T \Sigma^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu \\ c &= \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1} \\ d &= ac - b^2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Nous démontrons que les paramètres a , c et d sont positifs : puisque nous avons supposé que la matrice de variance-covariance Σ est définie positive, la matrice inverse Σ^{-1} est aussi définie positive. Cela signifie que $x^T \Sigma^{-1} x > 0$ pour tous non-zéro vecteurs x ($N \times 1$), donc $a > 0$ et $c > 0$. Mais également, $(b\mu - a\bar{1})^T \Sigma^{-1} (b\mu - a\bar{1}) = bba - 2abb + aac = a(ac - b^2) = ad > 0$, et parce que $a > 0$, nous savons que $d > 0$. Avec la définition de H l'expression pour la variance devient $\sigma^2(\Delta V) = \frac{1}{d} (\mu_V \quad V_t) \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_V \\ V_t \end{pmatrix} = \frac{1}{d} (c\mu_V^2 - 2bV_t\mu_V + aV_t^2)$. Ceci donne l'expression pour la frontière efficiente dans le plan moyenne-variance. La formule de la frontière efficiente est donnée par

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{d} (c\mu_V^2 - 2bV_t\mu_V + aV_t^2) \quad (6.3)$$

Nous transformons une parabole dans un cadre (σ_V^2, μ_V) à l'hyperbole dans un plan (σ_V, μ_V) . Ceci est facilement démontrable en notant ce qui suit :

$$\sigma_V^2 = \frac{c\mu_V^2 - 2bV_t\mu_V + aV_t^2}{d} = \frac{c\mu_V^2 - 2bV_t\mu_V}{d} + \frac{dV_t^2}{c} + \frac{b^2V_t^2}{c}$$

côté gauche par $\frac{1}{c}$ et le côté droit par $\frac{c}{c^2}$,

$$\frac{\sigma_V^2}{\frac{1}{c}} = \frac{\mu_V^2 - \frac{2bV_t}{c\mu_V} + \frac{dV_t^2}{c^2} + \frac{b^2V_t^2}{c^2}}{\frac{d}{c^2}} = \frac{\left(\mu_V - \frac{bV_t}{c}\right)^2}{\frac{d}{c^2}} + V_t^2, \text{ ce qui est la formule de l'hyperbole}$$

$$\frac{\sigma_V^2}{V_t^2} - \frac{\left(\mu_V^2 - \frac{bV_t}{c}\right)^2}{\frac{dV_t^2}{c^2}} = 1. \text{ Les pentes des deux asymptotes sont données par } \pm \sqrt{\frac{\frac{dV_t^2}{c^2}}{\frac{V_t^2}{c}}} = \pm \sqrt{\frac{d}{c}}$$

et le centre de l'hyperbole est au $\left(0, \frac{b}{c}V_t\right)$, ainsi les asymptotes sont données par

$$\mu_V = \frac{b}{c}V_t \pm \sqrt{\frac{d}{c}}\sigma_V.$$

Nous nous sommes particulièrement intéressés aux allocations d'actifs θ_{FE} des portefeuilles efficients. Ceci donne les montants qu'un investisseur doit investir dans chaque instrument financier (titre) pour réaliser l'espérance de rendement et le risque (l'écart type) appartenant à la frontière efficiente. Nous avons

$$\theta_{FE} = \Sigma^{-1}A\lambda = \Sigma^{-1}AH^{-1}B = \frac{c\mu_V - bV_t}{d}\Sigma^{-1}\mu + \frac{aV_t - b\mu_V}{d}\Sigma^{-1}\bar{1} \text{ donc}$$

$$\theta_{FE} = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}\left((a\bar{1} - b\mu)V_t + (c\mu - b\bar{1})\mu_V\right) \quad (6.4)$$

Ainsi, en employant les formules (6.3) et (6.4), pour chaque valeur de l'espérance de rendement de portefeuille, nous pouvons calculer l'écart type minimum et l'attribution (les montants investis dans chaque titre) correspondants.

Nous allons supposer qu'un investisseur peut également choisir d'investir dans des actifs sans risque. Un actif sans risque x_f est un actif avec une espérance de rendement peu élevée dont l'écart type est égal à zéro, donc $\sigma_f = 0$. Ceci signifie que l'espérance de rendement est certaine. En outre, ces actifs ne sont pas corrélés avec les actifs risqués, ainsi $\rho_{i,f} = \text{cov}(x_i, x_f) = 0$ pour tous les actifs risqués i .

Dans le cas de l'assurance, les actifs sans risque peuvent être représentés par les obligations à taux fixe (ex. les OAT)). Par ailleurs, elles ne sont pas totalement exonérées de risque, mais, effectivement, leur rendement est proche d'être constant. Nous faisons l'hypothèse que l'assureur ne peut que prêter (acheter les obligations) au taux sans risque : les emprunts des assureurs (les émissions des obligations ou la vente à découvert) sont interdits par la réglementation et par le principe de la gestion financière prudente (qui est omniprésente en assurance). Le prêt signifie que le montant (la quantité) positif est investi dans des actifs sans risque $\theta_f > 0$. Si $\theta_f = 0$, le portefeuille d'investissement ne contient pas d'actifs sans risque. Nous rappelons que les assureurs achètent des instruments financiers à taux fixe pour immuniser les provisions techniques dans les passifs. Cette spécificité de la gestion financière en assurance fait que les assureurs possèdent toujours une certaine quantité d'actifs sans risque (donc $\theta_f > 0$).

La frontière efficiente change quand des actifs sans risque sont inclus. La théorie de Markowitz constate que nous pouvons tracer une droite - appelée la droite de marché des capitaux (la DMC) - à partir du point de l'actif sans risque et tangente à la frontière efficiente. Cette droite constitue la nouvelle frontière efficiente pour des portefeuilles incluant des actifs sans risque. En d'autres termes, l'introduction d'un actif sans risque rend linéaire la bordure

de la frontière efficiente pour les portefeuilles contenant les actifs sans risque, c'est-à-dire, entre le point $(0, \mu_f)$ et le point où la droite du marché est tangente à l'ancienne frontière efficiente (σ_{pm}, μ_{pm}) . Les portefeuilles situés sur cette droite représentent les différentes répartitions possibles de la richesse de l'investisseur entre les actifs risqués et les actifs sans risque. Pour les portefeuilles incluant seulement des actifs risqués, c'est-à-dire, pour $\mu_v > \mu_{pm}$ (ou $\sigma_v > \sigma_{pm}$), la frontière efficiente reste inchangée – elle prend la forme définie en sous-section 6.1.1 (puisque l'assureur ne peut pas emprunter). Le point (σ_{pm}, μ_{pm}) représente le meilleur portefeuille risqué (donc $\theta_f = 0$). Ce portefeuille domine tous les autres portefeuilles et est appelé le « portefeuille de marché ».

Nous allons calculer la DMC et prouver qu'elle constitue la ligne droite. Nous supposons que la quantité (le montant) θ_f est investie dans des actifs sans risque et que l'espérance de rendement de ces actifs sans risque est μ_f . Comme les actifs sans risque ne sont pas corrélés avec les actifs risqués, nous retrouvons les relations $\sigma_v^2 = \theta^T \Sigma \theta$ et $\mu_v = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f$. Les contraintes budgétaires changent aux $\bar{1}^T \theta + \theta_f = V_t$ et $\theta_f \geq 0$. La frontière efficiente (la DMC) est définie soit comme une minimisation si nous recherchons la variance par rapport à la moyenne établie soit comme une maximisation de l'espérance de rendement par rapport à la variance donnée. Les résultats des deux définitions sont identiques. Comme nous avons utilisé la minimisation de la variance pour dériver la frontière efficiente, nous allons inversement utiliser la maximisation de l'espérance de rendement pour définir la DMC. En conséquence, le problème de maximisation est défini de façon suivante :

$$\text{Max} \left\{ \begin{array}{l} \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = V_t \\ \sigma_v^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right.$$

Après avoir noté que la maximisation de $\mu^T \theta + \mu_f \theta_f$ est identique à la minimisation de $-\mu^T \theta - \mu_f \theta_f$, l'utilisation de Lagrange pour résoudre ce système donne

$$\begin{cases} -\mu + \lambda_1 \bar{1} + 2\lambda_2 \Sigma \theta = 0 & (a) \\ -\mu_f + \lambda_1 = 0 & (b) \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = V_t & (c) \\ \sigma_v^2 = \theta^T \Sigma \theta & (d) \end{cases}$$

L'équation (b) donne $\lambda_1 = \mu_f$, qui est substituée en (a) :

$$-\mu + \lambda_1 \bar{1} + 2\lambda_2 \Sigma \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{2\lambda_2} \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) \quad (6.5)$$

En utilisant ceci en (d), une expression pour λ_2 peut être calculée. Nous obtenons

$$\sigma_v^2 = \theta^T \Sigma \theta = \frac{1}{4\lambda_2^2} (\mu - \mu_f \bar{1})^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) = \frac{1}{4\lambda_2^2} (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a)$$

donc $\lambda_2 = \sqrt{\frac{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}{4\sigma_v^2}} = \frac{1}{2\sigma_v} \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$. Nous n'avons pas utilisé (c) jusqu'ici.

Ceci nous donne une expression pour θ_f :
 $\theta_f = V_t - \bar{1}^T \theta = V_t - \frac{1}{2\lambda_2} \bar{1}^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) = V_t - \frac{1}{2\lambda_2} (b - c\mu_f)$. Ensuite, nous obtenons une expression suivante pour l'espérance de rendement de portefeuille μ_v :

$$\begin{aligned} \mu_v &= \mu^T \theta + \mu_f \theta_f = \frac{1}{2\lambda_2} \mu^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) + \mu_f V_t - \frac{1}{2\lambda_2} (b - c\mu_f) \mu_f = \\ &= \frac{1}{2\lambda_2} (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a) + \mu_f V_t = \frac{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}{\sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}} \sigma_v + \mu_f V_t = \\ &= \left(\sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a} \right) \sigma_v + \mu_f V_t \equiv s \sigma_v + \mu_f V_t \end{aligned} \quad (6.6)$$

C'est la frontière efficiente pour les portefeuilles contenant des actifs sans risques – la Droite de Marché des Capitaux (la DMC). C'est une ligne droite dans le plan moyenne-écart type avec la pente $s \equiv \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$, et coupant avec l'axe de l'espérance de rendement (l'axe ordonné) à la hauteur de $\mu_f V_t$. En même temps, cette valeur indique le rendement quand le portefeuille entier est investi dans des actifs sans risque. L'allocation optimale sur la DMC est donnée par $\theta_{DMC} = \frac{\mu_v - \mu_f V_t}{s^2} \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1})$. Ce résultat est réalisé par l'utilisation de (3.2.5), l'expression pour λ_2 et l'expression pour σ_v en termes de μ_v . La quantité correspondante investie dans les actifs sans risque est la quantité « non-utilisée » :

$$\theta_{f,DMC} = V_t - \bar{1}^T \theta_{DMC} = V_t - \frac{\mu_v - \mu_f V_t}{s^2} (b - c\mu_f).$$

Le portefeuille de marché devrait être le portefeuille qui est le point de tangence entre la frontière efficiente et la DMC (ce point se situe sur la DMC quand rien n'est investi dans les actifs sans risque). Il est calculé en égalisant la frontière efficiente avec la DMC. D'abord, nous récrivons la DMC du (6.6) comme $\sigma_v \frac{\mu_v - \mu_f V_t}{s}$. Ensuite, l'égalisation de la frontière

efficiente et de la DMC donne $\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_v^2 - 2b\mu_v V_t + aV_t^2)} = \frac{\mu_v - \mu_f V_t}{s}$. Elle a une solution unique, ainsi le portefeuille de marché est en effet le point de tangence entre la frontière efficiente et la DMC :

$$\mu_{pm} = \frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} V_t \quad (6.7)$$

$$\text{et } \sigma_{pm} = \frac{s}{b - c\mu_f} V_t \quad (6.8)$$

avec $s = \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$. Puisque nous connaissons les valeurs pour la moyenne et la variance du portefeuille du marché, nous pouvons calculer, en utilisant (6.4), la valeur de θ pour le portefeuille de marché

$$\theta_{pm} = \frac{c \left(\frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} V_t \right) - bV_t}{d} \Sigma^{-1} \mu + \frac{aV_t - b \left(\frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} V_t \right)}{d} \Sigma^{-1} \bar{1} = \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) \frac{V_t}{b - c\mu_f}$$

Un simple calcul indique qu'un investisseur – caractérisé par un paramètre d'aversion absolue au risque $\gamma = \frac{b - c\mu_f}{V_t}$ – qui aimerait investir dans le portefeuille optimal, maximisant sa fonction d'utilité, investira dans le portefeuille de marché.

6.1.2 LA FRONTIERE EFFICIENTE, LA DROITE DU MARCHE DES CAPITAUX ET LE PORTEFEUILLE DU MARCHE DANS LE CADRE MOYENNE-VAR

Nous avons présenté le choix du portefeuille d'investissement dans le plan moyenne-variance. Dans les paragraphes suivants, nous allons montrer comment représenter les mêmes procédures de choix du portefeuille dans le cadre moyenne-Value at Risk.

Comparativement à la méthode moyenne-variance, plus la valeur de VaR_q est importante (avec le même niveau de q), plus le portefeuille est risqué. Ainsi, un investisseur qui est extrêmement averse au risque préférera une valeur de VaR_q très basse. Comme la VaR est notre nouvelle mesure de risque remplaçant l'écart type, nous allons calculer une nouvelle frontière efficiente, de la même manière que dans sous-section 6.1.1. Rappelons que la frontière efficiente regroupe des portefeuilles avec l'espérance de rendement les plus élevés pour un niveau de VaR_q donnée. Autrement, la frontière efficiente rassemble les montants minimums de la VaR pour chaque espérance de rendement.

Dans cette section, nous supposons que les rendements sont elliptiquement distribués. Quand l'hypothèse de la distribution elliptique est posée, la VaR peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} P[\Delta V \leq -VaR_q] &= 1 - q \Leftrightarrow P\left[\frac{\Delta V - \mu_V}{\omega_V} \leq \frac{-VaR_q - \mu_V}{\omega_V}\right] = 1 - q \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-VaR_q - \mu_V}{\omega_V} &= k_{1-q} \Leftrightarrow VaR_q = -\mu_V - k_{1-q} \omega_V \end{aligned}$$

Nous pouvons présenter la VaR en termes de moyenne (espérance de rendement) et d'écart type :

$$VaR_q = -\mu_V - z_{1-q} \sigma_V \quad (6.9)$$

avec $z_{1-q} \equiv \frac{k_{1-q} \omega_V}{\sigma_V}$. La valeur de z_{1-q} reste évidemment négative et $z_{1-q} = z_q$ si la distribution est symétrique.

La frontière efficiente comprend les points sur le plan (μ_V, σ_V) où la VaR est minimisée avec la moyenne donnée. Ces points définissent également les espérances de rendement maximales pour les tous les niveaux de VaR_q . Nous développons cette deuxième définition, représentée par les formules :

$$\text{Max} \left\{ \mu_V \left| \begin{array}{l} \text{VaR}_q = -\mu_V - z_{1-q} \sigma_V \\ \mu_V = \mu^T \theta \\ \sigma_V^2 = \theta^T \Sigma \theta \\ \bar{1}^T \theta = V_t \end{array} \right. \right\} \quad (6.10)$$

La première contrainte de (6.10) peut être transformée en :

$$(\text{VaR}_q + \mu_V)^2 = (-z_{1-q} \sigma_V)^2 \Leftrightarrow \text{VaR}_q^2 + 2\text{VaR}_q \mu_V + \mu_V^2 - z_{1-q}^2 \sigma_V^2 = 0$$

et en reprenant les autres contraintes, nous avons

$$\text{VaR}_q^2 + 2\text{VaR}_q \mu^T \theta + \theta \mu \mu^T \theta - z_{1-q}^2 \theta^T \Sigma \theta = 0 \Leftrightarrow \text{VaR}_q^2 + 2\text{VaR}_q \mu^T \theta + \theta^T \Psi \theta = 0$$

où la matrice Ψ est défini comme $\Psi = \mu \mu^T - z_{1-q}^2 \Sigma$. Ainsi, le problème de maximisation de (6.10) devient plus court :

$$\text{Max} \left\{ \mu^T \theta \left| \begin{array}{l} \text{VaR}_q^2 + 2\text{VaR}_q \mu^T \theta + \theta^T \Psi \theta = 0 \\ \bar{1}^T \theta = V_t \end{array} \right. \right\} \quad (6.11)$$

et la matrice Ψ est symétrique parce que :

$$\Psi^T = (\mu \mu^T - z_{1-q}^2 \Sigma)^T = (\mu \mu^T)^T - z_{1-q}^2 \Sigma^T = \mu \mu^T - z_{1-q}^2 \Sigma = \Psi$$

Ensuite, nous définissons les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \mu^T \Psi^{-1} \mu \\ \hat{b} &= \mu^T \Psi^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \Psi^{-1} \mu \\ \hat{c} &= \bar{1}^T \Psi^{-1} \bar{1} \\ \hat{d} &= \hat{a} \hat{c} - \hat{b}^2 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Le rapport entre les constantes $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ et les constantes a, b, c, d de (6.2) peuvent être facilement dérivé. Ceci est valable pour la matrice de covariance inversée

$$\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} \Psi \Psi^{-1} = \Sigma^{-1} (\mu \mu^T - z_{1-q}^2 \Sigma) \Psi^{-1} = \Sigma^{-1} \mu \mu^T \Psi^{-1} - z_{1-q}^2 \Psi^{-1}$$

Application de cette expression pour Σ^{-1} donne :

$$\begin{cases} a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu = \mu^T \Sigma^{-1} \mu \mu^T \Psi^{-1} \mu - z_{1-q}^2 \mu^T \Psi^{-1} \mu = a \hat{a} - z_{1-q}^2 \hat{a} = \hat{a} (a - z_{1-q}^2) \\ b = \mu^T \Sigma^{-1} \bar{1} = \mu^T \Sigma^{-1} \mu \mu^T \Psi^{-1} \bar{1} - z_{1-q}^2 \mu^T \Psi^{-1} \bar{1} = a \hat{b} - z_{1-q}^2 \hat{b} = \hat{b} (a - z_{1-q}^2) \\ c = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu \mu^T \Psi^{-1} \bar{1} - z_{1-q}^2 \bar{1}^T \Psi^{-1} \bar{1} = b \hat{b} - z_{1-q}^2 \hat{c} \end{cases}$$

Nous résolvons cette relation pour obtenir les formules désirées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a} = \frac{a}{a - z_{1-q}^2} \\ \hat{b} = \frac{b}{a - z_{1-q}^2} \\ \hat{c} = \frac{c z_{1-q}^2 - d}{z_{1-q}^2 (a - z_{1-q}^2)} \\ \hat{d} = \hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2 = \frac{-d}{z_{1-q}^2 (a - z_{1-q}^2)} \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Nous allons utiliser ces résultats ultérieurement. Nous résolvons le problème de (6.11) en utilisant la méthode de Lagrange. Ceci donne l'ensemble des équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu + 2\lambda_1 VaR_q \mu + 2\lambda_1 \Psi \theta + \lambda_2 \bar{1} = 0 & (a) \\ VaR_q^2 + 2VaR_q \mu^T \theta + \theta^T \Psi \theta = 0 & (b) \\ \bar{1}^T \theta = V_t & (c) \end{array} \right.$$

La solution de l'équation (a) pour θ donne, avec $\lambda_3 = \frac{1}{-2\lambda_1}$ et $\lambda_4 = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1}$:

$$\theta = (\lambda_3 - VaR_q) \Psi^{-1} \mu + \lambda_4 \Psi^{-1} \bar{1} \quad (6.14)$$

En utilisant θ en (c), nous obtenons une expression pour λ_4 :

$$\bar{1}^T \theta = (\lambda_3 - VaR_q) \hat{b} + \lambda_4 \hat{c} = V_t \Leftrightarrow \lambda_4 = \frac{V_t + \hat{b} VaR_q - \lambda_3 \hat{b}}{\hat{c}}$$

L'évaluation de λ_3 vient de (b). Après les calculs, nous obtenons

$$\lambda_3^2 = \frac{1}{\hat{d}} (VaR_q^2 (\hat{d} - \hat{c}) - 2V_t \hat{b} VaR_q - V_t^2) \quad \text{donc}$$

$$\lambda_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{\hat{d}} (VaR_q^2 (\hat{d} - \hat{c}) - 2V_t \hat{b} VaR_q - V_t^2)} \equiv \pm \sqrt{W}. \text{ Dès que nous avons les valeurs de } \lambda_3 \text{ et}$$

λ_4 , nous calculons θ , en utilisant (6.14). Ainsi

$\theta = (\pm \sqrt{W} - VaR_q) \Psi^{-1} \mu + \frac{1}{\hat{c}} (V_t + VaR_q \hat{b} \mp \sqrt{W}) \Psi^{-1} \bar{1}$. La formule de l'espérance de rendement en fonction de la VaR peut s'écrire comme :

$$\mu_v = \mu^T \theta = (\pm \sqrt{W} - VaR_q) \hat{a} + \frac{1}{\hat{c}} (V_t + VaR_q \hat{b} \mp \sqrt{W}) \hat{b} = \frac{\hat{d}}{\hat{c}} \left(\pm \sqrt{W} - VaR_q + \frac{\hat{b}}{\hat{d}} V_t \right) \quad (6.15)$$

L'utilisation du signe négatif dans cette expression donne la frontière efficiente dans le plan moyenne-VaR. Pour comparer cette frontière avec la frontière efficiente du plan moyenne-variance (l'écart type), premièrement nous inversons la fonction précédente (nous définissons

la VaR_q en fonction de μ_v). Nous isolons en (6.15) \sqrt{W} , ensuite nous prenons au carré deux côtés de l'équation et nous résolvons la fonction quadratique pour VaR_q . Ceci donne :

$$VaR_q = -\mu_v + \sqrt{\frac{1}{\hat{d}} \left((\hat{d} - \hat{c})\mu_v^2 + 2\hat{b}V_t\mu_v - \hat{a}V_t^2 \right)}$$
. Deuxièmement, nous remplaçons les constantes constantes a, b, c, d par $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$. Pour cela, nous utilisons (6.13) :

$$VaR_q = -\mu_v - z_{1-q} \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_v^2 - 2bV_t\mu_v - aV_t^2)} \quad (6.16)$$

En dernier lieu, nous transformons cette équation sur le plan « espérance de rendement - écart type ». Nous utilisons le remplacement (6.9) pour VaR_q et nous obtenons :

$$-\mu_v - z_{1-q} \sigma_v = -\mu_v - z_{1-q} \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_v^2 - 2bV_t\mu_v - aV_t^2)}$$

où z_{1-q} est supposé être négatif. Ainsi, la frontière efficiente de moyenne-VaR sur le plan de moyenne-variance est donnée par :

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_v^2 - 2bV_t\mu_v - aV_t^2)} \quad (6.17)$$

ce que nous identifions comme une frontière efficiente de moyenne-variance. Puisque les deux frontières efficientes sont identiques, l'allocation d'actifs à la frontière est toujours donnée (en terme de μ_v) par (6.4).

Comme présenté en sous-section 6.1, dans le cadre moyenne-variance la frontière efficiente devient la DMC quand des actifs sans risque sont introduits. Un investisseur peut être intéressé par une combinaison du portefeuille de marché et des actifs sans risque. Rappelons que la DMC est donnée en (6.6) par $\mu_v = s\sigma_v + V_t\mu_f$ et $s = \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$ où la constante s est une pente de la DMC. La représentation de la DMC sur le plan de moyenne-variance peut être dérivée en utilisant (6.9) comme expression pour σ_v et substituant ce σ_v dans (6.6). Ceci donne

$$\mu_v = s\sigma_v + V_t\mu_f = s \left(\frac{-VaR_q - \mu_v}{z_{1-q}} \right) + V_t\mu_f$$
, ce qui résulte de la DMC dans le cadre de la moyenne-VaR :

$$\mu_v = \frac{-s}{z_{1-q} + s} VaR_q + \frac{z_{1-q}\mu_f}{z_{1-q} + s} V_t \quad (6.18)$$

Évidemment, le point de tangence entre la DMC et la frontière efficiente est le portefeuille de marché. Nous avons vu en sous-section 6.1 que le rendement moyen du portefeuille de marché est $\mu_{pm} = \frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} V_t$. Pour trouver la valeur de la VaR appartenant au portefeuille de

marché, nous égalisons μ_{pm} avec (6.18) et nous obtenons

$\frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} V_t = \frac{-s}{z_{1-q} + s} VaR_q + \frac{z_{1-q}\mu_f}{z_{1-q} + s} V_t$, ce qui donne la résultat suivant

$$VaR_{q,pm} = \frac{b\mu_f - a - z_{1-q}s}{b - c\mu_f} V_t, \text{ où nous avons utilisé le remplacement } s = \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a} .$$

Ainsi, le point $(\mu_{pm}, VaR_{q,pm})$ est le portefeuille de marché dans le plan moyenne-VaR. L'allocation d'actifs θ_{pm} reste la même que celle calculée dans le cadre de moyenne-variance.

Premièrement, nous redéfinissons la frontière efficiente de l'investisseur qui peut investir dans les actifs sans risque (mais qui ne peut pas emprunter : ni émettre des obligations, ni vendre à découvert). Ainsi, la frontière efficiente globale est décomposée de la DMC et de la frontière efficiente pour les portefeuilles qui ne contiennent pas d'actifs sans risque.