# CONTRIBUTION N° 46

# LEVY - STABLE DISRIBUTIONS AND FRACTAL STRUCTURE ON THE PARIS MARKET

PAR / BY

Christian **WALTER**

France

# MISE EN EVIDENCE DE DISTRIBUTIONS LEVY - STABLES ET D'UNE STRUCTURE FRACTABLE SUR LE MARCHE DE PARIS

# LEVY-STABLE DISTRIBUTION AND FRACTAL STUCTURE IN THE FRENCH MARKET

**CHRISTIAN WALTER**

Membre de l'Institut des Actuaires Français,
Fond6 de Pouvoirs à la Banque Stem

**Novembre 1989**

## ABSTRACT

In recent years, there has been a rebirth in the theory of Uvy-Stable process in stock prices. The theory states that successive, percentage, price changes for a given differencing interval are independant and identically distributed Levy-stable random variables. The Uvy-stable model has been suggested by MANDELBROT (1962, 1963b, 1967,1973) confirmed by FAMA (1965), MANDELBROT & TAYLOR (1967), TEICHMOLLER (1971), FIELITZ & SMITH (1972). CONRAD & JUTTNER (1973), BLATTBERG & GONEDES (1974). HSU et al. (1974), and more recently by CORNEW et al. (1984). on currency futures prices changes, BOOTHE & GLASSMAN (1987) on exchange rates, SO (1987) on currency futures, and BOULIER et al. (1988) on french stock market. The appropriateness of distributional model is important for theories of asset pricing under uncertainty, for the valuation of options, and for the estimation of the risk of the market position.

Actually, the problem posed by volatility instability can be by-passed by replacing diffusion second order processes by a stable fractal process, whose marginal laws are Uvy-stable random variables, with infinite variance. In this case, the volatility concept is no longer relevant because the variance of the instantaneous rate of return is assumed infiite.

'This paper conducts an empirical test to examine whether the observed distribution of price changes on the French MATIF notional contract and French CAC 40 index is generated by a non normal stable process. In general, we find that it is possible to accept this hypothesis : the Lévy-stable distribution adequately describes the price changes observed for the french market, and an underlying fractal structure can be detected over the period.

# MISE EN EVIDENCE DE DISTRIBUTIONS LEVY-STABLES ET D'UNE STRUCTURE FRACTALE SUR LE MARCHE DE PARIS

## 1 RAPPEL DU PROBLEME POSE- INTRODUCTION AUX LOIS LEVY-STABLES

Une modélisation fiable des comportements des marchés (id est : la plus proche possible de la réalité), peut apparaître utile pour au moins trois applications : 1) la gestion différentielle des positions prises sur les marchés, qui repose sur des formules issues de modèles; 2) la compréhension de la nature du risque pris sur ces positions, et donc sa bonne évaluation; 3) l'évaluation des options. La démarche habituellement usitée est la suivante : à partir du comportement observé du marché, on établit un modèle. Puis on remplace le marché par son modèle. Puis on travaille sur ce modèle. Se pose donc ici la question de la validité du modèle : il est nécessaire que ce modèle soit le plus fiable possible, puisque c'est à partir de ses descriptions (ou de ses prévisions) que l'on va effectuer des opérations sur le marché réel.

Il existe actuellement en finance, applique sur les marches financiers, sous la forme d'un certain nombre d'hypothèses, non confirmées par l'expérience empirique, un modèle de représentation mathématique des variations de cours. Ce modèle suppose que, *en première approximation, l'évolution du taux de rentabilitk instantant d'un actif financier peut être représentée mathématiquement par un processus aléatoire stable à accroissements indépendants et stationnaires, dont les lois marginales sont des variables aléatoires de carré intégrable.*

Dans ce modèle, dit "de Bachelier-Einstein" en référence à ses origines conceptuelles, sont implicitement faites trois hypothèses statistiques extrêmement fortes sur les variations successives des prix $(X_t)$'des actifs financiers, qui représentent les prémisses de tout formalisme mathématique du comportement des marchés financiers, et qui sont les suivantes :

1) Hypothèse de ***stricte stationnarité des accroissements du processus aléatoire*** régissant l'évolution temporelle des rendements.

2) Hypothèse ***d'indkpendance des accroissements*** du processus considéré : les accroissements successifs $\Delta_h(t)= X(t+h)-X(t)$ sont totalement indépendants : la série temporelle des changements de prix est un *processus sans mémoire.*

3) Hypothèse de ***l'existence du moment d'ordre 2 des lois marginales du processus*** : la loi de probabilité selon laqucllc $\Delta_h(t)$ est distribuée possède un moment d'ordre deux fini, donc une variance, que nous noterons $\sigma^2$. Elle est donc de ***carré intégrable.*** Cette hypothèse entraîne ipso facto la *validité du théorème central limite,* pivot de la théorie des probabilités, et de l'ensemble du cadre statistique auquel nous sommes habitues, qui conditionne notre intuition quotidienne (validité de la loi des grands nombres, convergence des fréquences empiriques successives d'un événement vers sa probabilité de survenance, normalité asymptotique des sommes partielles, universalité de la loi normale).

Ces hypothèses constituent le cadre théorique le plus largement utilisé encore aujourd'hui, bien que sous une forme un peu différente, puisque, depuis la modification de OSBORNE (1959), au lieu de considérer le processus des accroissements des prix, comme le faisait Bachclier, on s'intéresse généralement à la variation de la quantité $\delta_h(t)=LogX(t+h)-LogX(t)$, oh X(t) représente le prix de l'actif à l'instant t (voir FAMA (1965b)). Ce choix conduit finalement à des conclusions identiques sur le processus $\delta(t) = N(\mu,\sigma)$. On dira alors que les rendements sont distribués normalement, ou les prix lognormalement.

Tous les praticiens dcs marchés financiers se sont trouvés confrontés, à un moment donné de leur activité, à l'inadéquation de ce modèle à la réalité observée empiriquement sur un marché donné. Le plus frappant, ce qui s'observe avec le plus d'aisance, est l'existence de *sauts*, de discontinuités qui viennent perturber les trajectoires de cours, les rendant, de ce fait, non browniennes (le mouvement brownien est le processus de diffusion le plus simple que l'on utilise pour formaliser les variations de rendement dans les modèles d'évaluation des options). La manière la plus directe de mettre en evidence le caractère non brownien des trajectoires de rendements, est de construire l'histogramme de la distribution empirique des rendements observés, et de verifier qu'il ne peut pas être ajusté par une distribution de Laplace-Gauss (problème des valeurs centrales et des valeurs extrêmes). Si la trajectoire était brownienne, alors la distribution serait gaussienne. Comme ce n'est pas le cas, le mouvement des rendements n'est donc pas brownicn.

Il est donc apparu à l'usage que le bien fondé de l'utilisation d'un cadre statistique gaussien en finance pouvait être remis en question, puisque les marchés financiers ne possèdent pas le comportement statistique de base que suppose la densité gaussienne (phénomène comu sous le nom d'"instabilité de la volatilité" : voir AFTALION (1987)). D'autre part, et notamment sous l'influence de Mandelbrot, de nombreux travaux ont montré l'intérêt qu'il pouvait y avoir à utiliser les lois et processus stables non gaussiens à variance infinie de Paul Lévy pour la représentation mathématique du comportement des marchés (voir par exemple MANDELBROT (1962, 1963b, 1967, 1973), FAMA (1965b), MANDELBROT & TAYLOR (1967), TEICHMOLLER (1971), FIELITZ & SMITH (1972), CONRAD & JUTTNER (1973), BLATTBERG & GONEDES (1974). HSU et al. (1974), ISLAM (1982), CORNEW et al.(1984), BOOTHE & GLASSMAN (1987), SO (1987), BOULIER et al. (1988)). On trouvera une discussion du problème dans WALTER (1989).

Les lois de probabilité à variance infinie, appelées "lois stables", ont été inventées par Paul Lévy vers 1925. Elles permettent de fait une généralisation du théorème central limite sous des hypothèses moins restrictives. On peut en effet montrer (IBRAGIMOV (1975)) que si (Xi) $i=1,\dots,n$ sont des variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées, mais ne possédant pas obligatoirement une variance finie, il existe des réels $a_n$ et $b_n$ tels que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - a_n}{b_n} = S \qquad \text{(I)}$$

où S est une loi stable.

(par ailleurs, il est possible de remplacer l'hypothèse très forte d'indépendance des accroissements par une hypothbse d'indépendance "à long terme" moins restrictive, puisqu'elle suppose seulement une indépendance entre événements très éloignés. Le résultat énoncé en (I) est alors conservé).

Remarquons à cette occasion que la loi normale appartient à l'ensemble des lois stables : ces lois représentent de fait une généralisation de la loi normale (de Laplace-Gauss) lorsque le deuxibme moment n'existe pas ; de la même manière, les processus aléatoires stables non gaussiens généralisent la notion de mouvement brownien lorsque la variance est infinie.

Finalement, il semble désormais possible d'abandonner au moins une des trois hypothèses du modèle de Bachelier-Einstein : l'existence du deuxibme moment. Abandonner cette hypothèse revient à se donner la possibilité de reproduire avec un modèle l'existence de brusques variations des prix, et permet d'élaborer un modèle de representation de la réalité qui semble *plus fiable que les modèles utilisant les processus de second ordre.*

Les lois stables présentent donc un intérêt certain, en vertu précisément de cette généralisation qu'elles opèrent du théorème central limite, qui justifie leur utilisation en finance (discipline dans laquelle on se trouve souvent en présence de somme *de petits aléas trop dispersés pour être gaussiens*). On peut donc s'interroger sur les raisons du relatif manque d'intérêt dont ces lois ont fait l'objet en théorie financière depuis les travaux de Mandelbrot et de Fama. Il semble y avoir deux raisons principales, qui peuvent expliquer ce manque d'intérêt :

1) le caractère relativement récent de nombreux travaux réalisés en probabilités sur les lois de Lévy et les processus autosimilaires, qui n'existaient pas à l'époque à laquelle Mandelbrot et Fama ont publié leurs articles ;

*2) une difficulté d'utilisation* plus importante que pour la loi normale, qui provient du fait que, d'une manière générale, *ces lois ne sont connues explicitement que par leur fonction caractéristique* (transformée *de* Fourier de la densité). Un passage à l'espace transform6 des fonctions caractéristiques est donc nécessaire, mais ne permet pas d'obtenir l'allure de ces distributions (rappelons qu'une distribution de probabilité est déterminée dd'ne manière univoque par sa fonction caractéristique). Il est cependant possible d'utiliser les ddveloppements en série de BERGSTROM (1952), ou la représentation par intégrale de ZOLOTAREV (1966). Une autre difficulté, importante, provient de la non existence du deuxibme moment, nécessaire dans les calculs statistiques usuels. C'est la raison pour laquelle les lois stables non gaussiennes ont été, jusqu'à présent, peu utilisées pour la description de phénomènes naturels, à l'exception de l'étude des champs gravitationnels en astronomie (voir HOLTSMARK (1919) et CHANDRASEKHAR (1943)).

Notons par ailleurs que l'inexistence du deuxième moment peut permettre d'expliquer les résultats décevants de l'utilisation de l'analyse spectrale sur les marchés (identification de pics de la densité spectrale empirique pour la détermination des cycles). En effet, si $C(s) = E\, x(t)X\,(E+s)$ représente la covariance du processus aléatoire $X(t)$ formalisant l'évolution temporelle des prix relatifs, alors la densité spectrale (transformée de Fourier de $C(s)$) est infinie, du fait que $C(0)=E(x^2)$. La détection de pics représentant les cycles boursiers devient alors problématique (voir par exemple ADELMAN (1965) et GRANGER (1966)).

Cependant, depuis quelques années, l'étude des lois stables a fait l'objet de nombreux travaux en théorie des probabilités, et les techniques statistiques associées à ce type de lois sont devenues de plus en plus précises et fiables. Il est désormais possible de les utiliser de manière opérationnelle sur les marchés.

## 2 BREVE PRESENTATION DE LA FAMILLE DES LOIS LEVY-STABLES

### 2.1 CARACTERISATION DES DISTRIBUTIONS DE LEVY

Les lois stables (resp. les processus aléatoires stables) représentent une généralisation de la loi normale de Laplace-Gauss (resp. de la notion de processus de Gauss-Wiener - ou de mouvement brownien) lorsque le premier et/ou le deuxième moment n'existent pas (c'est-à-dire quand l'espérance mathématique et/ou la variance sont infinies). Ces lois de probabilitt forment une famille dont les membres possbdent tous une propriété d'invariance par rapport à l'addition des variables aléatoires indtpendantes. Plus précisément, si S, S', S'' sont des lois stables centrées et réduites (nous verrons plus loin ce que cela signifie), alors :

$x'S' + x''S'' = xS$, avec $x^{\alpha} = x'^{\alpha} + x''^{\alpha}$, $\alpha$ étant un paramètre compris entre 0 et 2

Remarquons que pour la loi normale N, on a :

$x'N' + x''N'' = xN$, avec $x^2 = x'^2 + x''^2$, ce qui montre que $\alpha = 2$ pour la loi de Gauss.

Une autre loi connue, la loi de CAUCHY, dont la fonction de densité est $f(x) = 1/\pi(1+x^2)$ possède également cette propriété :

$x'C + x''C = xC$, avec $x = x' + x''$, dans ce cas, on a $\alpha = 1$.

CAUCHY a défini une famille de distributions symétriques stables dépendant du paramètre $\alpha$. Paul LEVY a montré que $\alpha$ ne pouvait dépasser 2, et a complété cette famille en introduisant des lois stables non symétriques liées à un paramètre $\beta$.

De **manière générale,** une loi stable est entibrement **définie** par la connaissance de **quatre** paramètres :

- Un parambtre de **localisation** : 6 ∈ /R
- Un **paramètre d'échelle** : c ∈ /R$^+$
- Un **paramètre d'asymétrie** : ß ∈ [-1, +1]
- Une **mesure** du **poids** des queues de distribution, *l'exposant **caractéristique*** : a ∈ ]0,2].

**α** et ß sont **les paramètres les** plus importants. Par la suite, **nous noterons S(x; α,ß,c,δ),** où, plus **simplement, S(α,ß,c,δ),** la loi stable **dont** les **paramètres** sont **α,ß,c** et 6.

I1 existe une **infinité** de **lois** stables, **mais** quatre seulement sont exprimables **analytiquement** par leur fonction **de densité** : les **lois** de GAUSS (α=2), CAUCHY **(α=1), HOLTSMARK-LEVY-SMIRNOV, dite également "chi-deux-inversé" (α=1/2),** **et** MITTRA **(a= $2^{-n}$).** D'une **manière générale,** la **densité** de **S(α,ß,c,δ) n'a** pas de **forme analytique connue** et **s'exprime sous** la **forme d'une intégrale :**

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left[-xt + \delta t - (ct)^\alpha \beta w(t,\alpha)\right] e^{-(ct)^\alpha} dt$$

avec $w(t, a) = \mathrm{tg}\, \pi\alpha/2$ si $a \neq 1$
$w(t, a) = 2/\pi \log t$ si $\alpha=1$

**Cette** expression, **peu** maniable, rend **l'estimation** des **paramètres assez difficile. C'est** la raison pour laquelle on **définit** en **général** une distribution stable par sa fonction **caractéristique** $\phi(t)=E\{\exp(itX)\}$**, dont** le **logarithme népérien est :**

$$\mathrm{Log}\, \phi(t) = i\delta t - |ct|^{\alpha} [1 - i\beta(|t|/t)\, w(t,\alpha)]$$

La **forme** canonique de la fonction **caractéristique** ci-dessus, due **à LEVY-**KHINTCHINE, **définit** une classe de **lois** de **probabilités,** stables par produit de convolution, **à répartition indéfiniment** divisible.

Pour **α=2,** la **distribution est gaussienne,** de variance **$2c^2$** : on **retrouve** la **distribution** de Gauss **comme** cas particulier d'une distribution de **Lévy.** Pour **α<2,** le deuxibme moment est infini : Paul **Lévy** a **montré** que, pour **toute** loi stable **d'exposant, α<2,** les **moments d'ordre supérieurs** au premier n'existent pas. Pour **α≤1,** il **n'existe** plus de premier moment : **l'espérance mathématique** devient **infinie.** D'autre part, par **analogie** avec la loi **normale, (S-δ)/c = S(α,ß,1,0)** est **appelée** loi stable **centrée réduite.** On la note **souvent S(α,ß).**

**Remarquons que** S(2,0,1/√2,0) = S(2,0)/√2 = N(0,1) loi **normale centrée réduite.**

De **manière générale,** on **pourra** trouver **une présentation détaillée des propriétés** des **lois** stables **dans** LEVY **(1925,1954),** GNEDENKO & KOLMOGOROV (1968). LUKACS **(1970),** et FELLER (1971).

## 23. PROPRIETES FRACTALES DES LOIS LEVY-STABLES

La stabilité de Lévy exprime que la s o m e de variables aléatoires indépendantes est une variable aléatoire de même loi de répartition que les variables initiales : si X et Y sont deux variables aléatoires possédant la même fonction de distribution F(.), alors, si F(.) est stable, la somme X+Y a aussi la fonction de distribution F(.). Ce qui peut également s'énoncer de la manière suivante : soient $X_1$, X2, ..., $X_n$ une suite de variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées ; on considère les sommes partielles $S_i = X_1 + X_2 + ... X_i$ ; dans ce cas, une loi de probabilité $X=X_i$ est stable si, pour tout $n \geq 1$, il existe des coefficients $a_n > 0$ et $b_n$ tels que $(S_n - b_n)/a_n$ ait la même loi que X.

Ainsi, par exemple, sur les marchés financiers, si l'on considère les variations des cours boursiers (c'est-à-dire les prix relatifs), il est clair que les variations hebdomadaires sont égales à la somme algébrique des écarts quotidiem, que les variations mensuelles sont Cgalement obtenues par la somme algébrique des écarts hebdomadaires, etc... 11 est donc naturel de rechercher une même loi de probabilité qui s'applique aussi bien aux écarts de cours quotidiem, qu'hebdomadaires ou mensuels (plus généralement un pas de temps quelconque). Autrement dit, l'accroissement du pas de temps d'observation (ici l'intervalle de temps skparant deux cours cotés en bourse) va modifier l'échelle du phénomène, mais pas sa structure. Tout se passe comme si *on* avait seulement *dilaté* le phénomène observé dans le temps et dans l'espace, cette dilatation entraînant un grossissement de chacune de ses composantes. Il apparaît donc une *invariance par changement d'échelle* de la distribution étudiée, une propriété d'homothétie statistique interne, ou *autosimilitude statistique* (voir *SINAI* (1976)) du phénomène observé, qui possède ce que Mandelbrot a appelé (MANDELBROT (1975,1982)) une structure *fractale*. L'invariance par changement d'échelle est aussi caractkristique de la structure *fractale* d'un objet, que l'invariance par rotation est caractkristique d'une sphère.

De la même manière, si l'on considère un processus de variations des cours dont les lois marginales sont autosimilaires, on retrouve la propriété d'autosimilitude énoncée ci-dessus. En effet, soit W, le processus défini par :

$$w(n) = \sum_{i=1}^{i=n} S_i \text{ où } S_i$$

sont des variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées suivant une même loi stable S(α, ß, c, 0), alors, en vertu de ce qui précède, W(n) suit une loi stable de paramètres : a, ß, $n^{1/\alpha}$ c, O.

Soit $W(n) = S(\alpha, \beta, n^{\frac{1}{\alpha}}c, 0.)$ en terme de distribution.

Un raisonnement semblable conduit aux égalités de distributions suivantes :

$W(2n) = S(\alpha, \beta, (2n)^{1/\alpha}c, 0)$

et, plus généralement :

$$W(rn) = S(\alpha, \beta, (rn)^{\frac{1}{\alpha}} c, 0)$$

Il vient que :

$$2^{-\frac{1}{\alpha}} W(2n) = W(n)$$

et plus généralement : $r^{-\frac{1}{\alpha}} W(rn) = W(n)$.

Autrement dit, un processus aléatoire sera dit autosimilaire d'exposant H si et seulement si les processus W(t) et $W(rt)/r^H$ sont identiques en distribution (voir MAEJIMA (1983)). Cela signifie que, si l'on multiplie le pas de temps d'observation de l'évolution temporelle de la grandeur étudiée par r, tout en réduisant l'échelle de la distribution observée de $r^H$, on obtient deux processus *indiscernables*. On retrouve l'cxemple ci-dessus, d'écarts de cours mensuels comme somme d'écarts hebdomadaires, eux-mêmes sommes d'écarts quotidiens etc....

On peut remarquer que les définitions de la stabilité et de l'autosimilitude ne font pas intervenir de condition d'existence des moments de la variable (ou du vecteur) aléatoire considéré(e), par exemple de la variance : en particulier, la distribution de Gauss est stable au sens de Lévy, avec, dans ce cas, a $=\sqrt{V(x)}$ et b=nE(X). On retrouve bien la loi de Gauss comme cas particulier de loi stable. De la même manière, un processus gaussien est autosimilaire d'exposant H=1/2 : c'est un cas particulier de processus stable.

## 3 LA METHODE D'ESTIMATION DES PARAMETRES UTILISEE

Il s'agit de la méthode de **KOUTROUVELIS** (1980) La démarche théorique est la suivante. Partant de la fonction caractéristique :

$$\Phi(t) = \exp\left\{i\delta t - |ct|^{\alpha}[1 - i\beta\, t/|t|\, w(t,\alpha)]\right\}$$

on en déduit

1) $$|\Phi(t)|^2 = \exp[-2|ct|^{\alpha}]$$

ce qui conduit à

$$\mathrm{Log}\, |\Phi(t)|^2 = -2|ct|^{\alpha}$$

et, par suite à

$$\mathrm{Log}\,(-\mathrm{Log}\, |\Phi(t)|^2) = \mathrm{Log}\,(2c^{\alpha}) + \alpha \mathrm{Log}|t|$$

$\hat{a}$ et $\hat{c}$ sont donc obtenus en régressant Log $(-\mathrm{Log}|\hat{\phi}(t)|^2)$ sur Log $|t|$ pour t choisi convenablement.

2) D'autre part, quand a est différent de 1 :

$$\mathrm{Re}\ \Phi(t) = e^{-|ct|^{\alpha}} \cos\left(\delta t - |ct|^{\alpha} \beta\ t/|t|\ \mathrm{tg}\ \pi\alpha/2\right)$$

$$\mathrm{Im}\ \Phi(t) = e^{-|ct|^{\alpha}} \sin\left(\delta t - |ct|^{\alpha} \beta\ t/|t|\ \mathrm{tg}\ \pi\alpha/2\right)$$

d'où l'on obtient : $\mathrm{Arctg}\ \dfrac{\mathrm{Im}\ \phi(t)}{\mathrm{Re}\ \phi(t)} = \delta t - |ct|^{\alpha} \beta\ t/|t|\ \mathrm{tg}\ \pi\alpha/2$ à kn près.

$\hat{\beta}$ et $\hat{\delta}$ peuvent donc être obtenus en régressant Arctg $[\mathrm{Im}\ \hat{\phi}(t) / \mathrm{Re}\ \hat{\phi}(t)]$ sur t et $(-|ct|^{\alpha}\ \beta\ t/|t|\ \mathrm{tg}\ \pi\alpha/2)$.

Il s'agit là d'une régression multiple où $\hat{\beta}$ et $\hat{\delta}$ sont calculés par :

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y \quad \text{avec } X' \text{ transposée de } X$$

où X est une matrice (L,2) contenant les L valeurs des dew variables explicatives et Y est le vecteur colonne (L,1) des L réalisations de la variable à expliquer.

Chaque étape (ou itération) se déroule de la façon suivante : au départ de la p-ième itération, on a estimé $\alpha(p-1)$, $\beta(p-1)$, $c(p-1)$ et $\delta(p-1)$, paramètres de la série de départ $S^{(0)}$ et on a standardisé $S^{(0)}$ (p-1) fois pour obtenir la nouvelle série $S^{(p-1)}$.

On estime les paramètres $\hat{\alpha}_{(p-1)}$ et $\hat{c}_{(p-1)}$ de $S^{(p-1)}$ par la méthode exposée plus haut, et on remplace $S^{(p-1)}$ par $S^{(p-1)}/\hat{c}_{(p-1)}$.

On estime $\hat{\beta}_{(p-1)}$ et $\hat{\delta}_{(p-1)}$ sur cette nouvelle série et on obtient $S^{(p)}$ par :

$$S^{(p)} = S^{(p-1)}/\hat{c}_{(p-1)} - \hat{\delta}_{(p-1)}$$

$S^{(p)}$ est la série standardisée qui est alors utilisable pour la (p+1)ième itération.

Les nouveaux estimateurs à la fin de cette p-ième étape sont :

$$\begin{cases} \hat{\alpha}^{(p)} = \hat{\alpha}_{p-1} \\ \hat{\beta}^{(p)} = \hat{\beta}_{p-1} \\ \hat{c}^{(p)} = \hat{c}^{(p-1)} . \hat{c}_{p-1} \\ \hat{\delta}^{(p)} = \hat{\delta}^{(p-1)} + \hat{c}^{(p-1)} . \hat{c}_{p-1} . \hat{\delta}_{p-1} \end{cases}$$

Les estimateurs dc KOUTROUVELIS sont donc :

$$\boxed{\lim_{r \to +\infty} \hat{\alpha}^{(r)}, \quad \lim_{r \to +\infty} \hat{\beta}^{(r)}, \quad \lim_{r \to +\infty} \hat{c}^{(r)}, \quad \lim_{r \to +\infty} \hat{\delta}^{(r)}}$$

Le choix des points $t_k$ et $u_e$ nécessaires aux deux régressions est fait en s'appuyant sur des simulations portant sur des séries de paramètres connus. KOUTROUVELIS remarque qu'un bon choix peut être fait en prenant :

$$t_k = \pi k/25 \qquad \text{avec } K = 1,\dots,K$$

et

$$u_c = \pi l/50 \qquad \text{avec } l = 1,\dots,L$$

Les nombres K et L optimum étant donnés en fonction de a, A partir des simulations effectuées. La construction d'un simulateur de processus stables est réalisée au moyen des formules dc CHAMBERS, MALLOWS & STUCK (1976).

## 4 LES RESULTATS OBTENUS SUR LE MARCHE DE PARIS

Deux séries boursières ont été étudiées sur le march6 de Paris : le contrat sur emprunt d'Etat notionnel du March6 A Terme International de France (MATIF), et l'indice de capitalisation de la Bourse dc Paris CAC 40, qui repose sur un échantillon de 40 actions françaises, assimilable à un portefeuille de référence d'actions françaises (le "portefeuille du marché"). La série du MATIF comprend les cours de clôture de chaque séance entre le 1er avril 1986 et le 30 Juin 1989, soit un échantillon de 760 valeurs ; celle du CAC 40 part du 9 juillet 1987, jusqu'au 30 juin 1989, soit un échantillon de 461 valeurs. I1 est à noter que les valeurs de I'indice CAC 40 antérieures au 1er janvier 1988 ont été reconstituées ct sont disponibles dans la documentation fournie par la Société des Bourses Françaises.

Pour ces dcux séries dc cours, ont été examinés :

1) L'ajustement par une loi de Lévy, des dismbutions empiriques des variations quotidiennes observées.

2) L'autosimilitude du processus aléatoire régissant les variations de cours pour différents pas dc temps, c'est-à-dire le caractère fractal du marché.

Les résultats sont donnés dans les tableaux ci-dessous.

1) Distributions empiriques des variations quotidiennes des rendements.

On s'intéresse à la série des écarts quotidiens des logarithmes des cours, soit :

$$x_j = \text{Log } C_j - \text{Log } C_{j-1}$$

où $C_j$ représente la valeur du cours au jour j.

| Marché | a | ß | c | δ |
|---|---|---|---|---|
| MATIF notionnel | 1,59 | 0,16 | 0,0026 | -0,0003 |
| Indice CAC 40 | 1,65 | -0,11 | 0,0079 | 0,0005 |

2) **Autosimilitude** des **marchés.**

Il s'agit de vérifier le critère de stabilité au sens de Lévy. Pour cela, on multiplie le pas de temps d'observation par r, tout en réduisant l'échelle de la distribution de $r^H$, avec $H = 1/\alpha$, en prenant pour a la valeur obtenue dans l'estimation initiale. Nous avons test6 la propriété d'autosimilitude pour des pas de temps variant de 2 à 8 jours. Nous n'avons pas pu choisir des pas de temps plus grands en raison de la taille trop réduite des échantillons résultants. Il est construit, pour un pas de temps de n jours, la série

$$x'_j = \frac{\text{Log } C_j - \text{Log } C_{j-n}}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$$

En raison de l'imprécision possible des valeur de a, due à la méthode choisie (de la valeur initiale dc a dépendent les valeurs suivantes), et à la taille décroissante des échantillons successifs, seule la première décimale a été retenue pour ce paramètre. Cela donne :

| Marché | α | ß | c | δ | |
|---|---|---|---|---|---|
| MATIF notionnel | | | | | |
| Ecarts quotidiens | 1,6 | 0,16 | 0,0026 | -0,0003 | (760 valeurs) |
| Ecarts 2 jours | 1,7 | -0,14 | 0,0025 | 0 | (380 valeurs) |
| Ecarts 3 jours | 1,7 | 0,30 | 0,0024 | -0,0001 | (253 valeurs) |
| Ecarts 4 jours | 1,6 | -0,21 | 0,0024 | 0 | (190 valeurs) |
| Ecarts 5 jours | 1,6 | -0,10 | 0,0024 | 0 | (152 valeurs) |
| Ecarts 6 jours | 1,8 | 0,08 | 0,0025 | 0 | (126 valeurs) |
| Ecarts 7 jours | 1,7 | -0,16 | 0,0024 | 0,0001 | (108 valeurs) |
| Ecarts 8 jours | 1.8 | -0,34 | 0,0022 | 0,0001 | ( 95 valeurs) |
| Indice CAC 40 | | | | | |
| Ecarts quotidiens | 1,6 | -0,11 | 0,0079 | 0,0005 | (461 valeurs) |
| Ecarts 2 jours | 1,8 | 0,82 | 0,0085 | 0 | (230 valeurs) |
| Ecarts 3 jours | 1,8 | 1,22 | 0,0077 | -0,0001 | (159 valeurs) |
| Ecarts 4 jours | 1,8 | 1,15 | 0,0081 | -0,0003 | (115 valeurs) |
| Ecarts 5 jours | 1.6 | 0,73 | 0,0078 | -0,0007 | ( 92 valeurs) |

## INTERPRETATION DES RESULTATS OBTENUS

Il se dégage de ces résultats les deux points suivants :

1) ***La loi de probabilité théorique régissant les variations des rendements quotidiens des marchés considérés*** : il semble qu'une distribution de Lévy soit bien adaptée à l'ajustement des histogrammes empiriques, et donc qu'un processus aléatoire stable de Lévy soit bien approprié pour la représentation mathématique de l'évolution temporelle des rendements. Par ailleurs, les valeurs de a obtenues étant nettement inférieures à 2, nous pouvons en déduire que ***les lois marginales théoriques du processus ont une variance infinie,*** ce qui confirme l'hypothèse de Mandelbrot. Notons également qu'il semble suffisant, pour calibrer un marché de connaître la valeur de a avec une seule décimale, la seconde n'ajoutant pas de modification fondamentale au comportement erratique de la série boursière considérée. Ainsi, on peut considérer que, tant pour le MATIF notionnel que pour l'indice CAC 40, a est peu différent de 1.6. on retrouve une valeur très voisine, pour le CAC, de celle obtenue par BOULIER et al. (1988) sur une plus longue série.

D'autre part, ß étant peu différent de zéro, les distributions admettent donc une faible asymétrie. Enfin, comme a est supérieur à 1, le paramètre de localisation δ représente l'espérance mathématique de la loi marginale du processus, qui, ici, est pratiquement nulle : les distributions sont centrées.

2) *L'invariance par changement d'échelle, ou l'autosimilitude des marchés* : sur le MATIF notionnel, malgré les différences existant entre les valeurs de ß obtenues, qui proviennent vraisemblablement de la méthode choisie (voir KOUTROUVELIS (1980, page 921)) lorsque l'on répercute une erreur initiale en cascade dans la méthodologie du test adopté (division de l'écart par $n^{1/\alpha}$), on constate que les résultats sont très bons et concluants pour les paramètres c et δ, qui restent quasiment constants quelles que soient les différentes échelles considérées. Il apparait une légère fluctuation sur l'exposant caractéristique *a*, qui reste cependant voisin de 1,7, valeur qui semble apparaître assez fréquemment sur les marchés.

Sur un graphique bilogarithmique des queues de distribution empiriques anamorphosées (voir MANDELBROT (1936a)), cette quasi-stabilité de a se traduirait par un quasi-parallélisme des 8 droites de régression de pente *(-a)*.qui ajustent au mieux les queues de Pareto des distributions de Lévy représentant les variations des rendements sur 1 jour, 2 jours.... 8 jours. La courbe de distribution des rendements sur (n+1) jours s'obtenant à partir de celle de n jours par simple translation vers la droite. Autrement dit, on s'aperçoit bien, en réalisant ce test, que, en faisant varier l'échelle du phénomène. on ne modifie pas sa structure propre. Nous pouvons donc due que, ***pour la série étudiée, le MATIF notionnel possède une structure fractale.***

Sur l'indice CAC 40, on retrouve des résultats semblables, quoique la taille plus faible de l'échantillon ne permette pas de retrouver une telle stabilité sur les valeurs de ß.

## 5 IMPLICATIONS STATISTIQUES ET FINANCIERES DES RESULTATS

En guise de conclusion, nous voudrions presenter les conséquences pratiques des résultats obtenus, en retenant plus particulièrement cinq axes principaux vers lesquels, selon nous, devraicnt s'orienter les recherches ultérieures.

1) *Le rôle des grandes valeurs des distributions empiriques* : il est en général courant, lorsque l'on se trouve en présence de valeurs "grandes" en regard du reste de l'échantillon, de considérer ces valeurs comme "atypiques", ou "non représentatives" du caractère "normal" du processus considéré. Dans la pratique, les séries sont alors, soit tronquées, soit normalisées (voir par exemple GRANGER & ORR (1972)), tant il est vrai que la loi normale présente une attirance théorique particulièrement forte, en raison de son caractère quasi-universel dans les sciences de la nature. Mais, précisément, dans les sciences humaines, en konomie, et en particulier sur les marches, l'expérience a montré que, étant donne que les anticipations des opérateurs peuvent se modifier *instantanément*, il est possible de voir apparaître des écarts *arbitrairement grands* entre deux journées dc bourse, cn sorte que l'écart moyen à la moyenne peut prendre alors des valeurs très grandes. Dc là l'importance du rôle des grandes valeurs dans les lois stables de Lévy (ANOW & BOBNOV (1960), et DARLING & DONALD (1952), qu'il ne faut pas négliger, car elles sont porteuses d'informations essentielles sur le comportement de la variable étudiée. Il apparait donc nécessaire de construire un cadre conceptuel théorique qui incorpore totalcmcnt la probabilité d'apparition d'événements de ce type, que la loi normale sous-évalue fortement.

2) Lié au cadre statistiquc parétien des lois stables. se pose le problème de *l'utilisation des techniques de régression* : si les *résidus* de la série étudiée sont non normaux, mais Lévy-stables à variance infinie, cornmcnt doit-on considérer les résultats ? On pourra trouver un commcncemcnt dc réponse dans BLATTBERG & SARGENT (1971) et KADIYALA (1972), mais il scmble clair qu'il est nécessaire de s'intéresser de près à cette question.

3) *L'existence d'une structure fractale sur les marchés*, et de mouvements browniens fractionnaires sous-jacents au comportement apparemment chaotique des cours, qui se traduit notamment par l'existence des tendances qui s'inversent de manière quasi-instantanée sur différentes échclles considérécs, laisserait supposer que des modèles de type "chaos déterministe" seraient bien adaptés pour rendre compte du cornportement global des marches (voir par exemple une synthèse de la question dans BERGE, POMEAU & VIDAL (1988)). On disposerait alors d'un cadre conceptuel complet et ngoureux pour l'cnscmble des phénomènes économiques et financiers.

4) L'application à la théorie financière semble incidente, à travers la notion de *risque* : il s'agit de construire un modèle d'évaluation des actifs financiers qui inclue la possibilité de I'existence d'une variance infinie sur les variations des rendements des actifs considérés. En particulier le *choix des portefeuilles* devrait être analysé dans une perspective, *non plus gaussienne, mais parétienne*. Des travaux ont déjà été réalisés dans ce sens par FAMA (1965a), SAMUELSON (1967). et LEITCH & PAULSON (1975).

5) Enfin, *l'évaluation des options* : il apparaît nécessaire de prendre en compte la possibilité de changements de prix arbitrairement grands, en particulier dans la tarification des options longues, en utilisant comme processus aléatoire pour la formalisation de l'évolution temporelle de l'actif sous-jacent un processus stable de Lévy. Une première tentative a été réalisée par Mc CULLOCH (1985). Il semble qu'il y ait en ce domaine un enjeu particulièrement important, en raison du développement des marchés d'options, et de la gestion des positions et des couvertures réalisées par les établissements financiers, qui repose, pour l'essentiel, sur une modélisation utilisant des processus de second ordre, qui sous-évaluent fortement le risque global de la position prise.

## REFERENCES

Le nom de chaque auteur est suivi de l'année de la publication citée, du titre de l'article ou de l'ouvrage, du nom de la revue et des références précises du volume, du numéro, ou, quand cela n'a pas été possible, des numéros des pages dans lesquelles se trouve l'article. Lorsqu'il s'agit d'une communication ayant eu lieu au cours d'un wlloque, le nom du colloque est mentionné.


ADELMAN (1965) Long cycles : fact or arterfact ?, AMER, ECONOMIC REVIEW, vol. 60, pp 444-463.

AFTALION (1987) Instabilité de la volatilité et prix des options, Entretiens de la Finance, décembre.

ANOW & BOBNOV (1960) The extreme members of samples and their role in the sum of indepcndant variables THEORY OF PROBABILITY AND ITS APPLICATIONS, vol. 5, pp 415-435

BACHELIER (1900) Théorie de la spéculation (Thèse pour le doctorat és sciences mathématiques) ANNALES DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE, 3ème série, Tome XVII, pp 21-86.

BERGE, POMEAU & VIDAL (1988) L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence. Paris, Hermann, deuxième edition revue et corrigée.

BERGSTROM (1952) On some expansions of stable distributions, ARKIV FOR MATEMATIK. vol.2, n°18, pp 375-378.

BLATTBERG & GONEDES (1971) A comparison of the stable and Student distributions as statistical models for stock prices JOURNAL OF BUSINESS, vol.47, avril pp 244-280

BLATTBERG & SARGENT (1971) Regression with non-gaussian stable disturbance : some sampling results ECONOMETRICA, vol.39 mai pp 501-510

BOOTHE & GLASSMAN (1987) The statistical distribution of exchange rates JOURNAL OF INTERNATIONAL ECONOMICS, vol. 22, pp 297-319

BOULIER, DROUAS, VITRY (1988) Lois stables et cours boursiers, Entretiens de la Finance, décembre.

CHAMBERS, MALLOWS & STUCK (1976) A method for simulating stable random variables, J. OF THE AM. STAT. ASSOCIATION, vol.71, n°354, pp 340-344.

CHANDRASEKHAR (1943) Stochastic problems in physics and astronomy, REV. MODERN PHYSICS, vol. 15, pp 1-89.

CONRAD & JUTTNER (1973) Recent behavior of stock market prices in Germany and the random walk hypothesis, KYKLOS, vol. 26, pp 576-599.

CORNEW, RONALD, TOWN, CROWSON (1984) Stable distributions, futures prices, and the measurement of trading performance. J. OF FUTURES MARKETS, vol.4, pp 531-557.

DARLING & DONALD (1952) The influence of the maximum term in the addition of independant variables TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, vol.73 pp 95-107.

DEKKING (1987) Construclion dc fractals et problèmes de dim ... r, in "Fractals : dimensions non entières et applications", Comptes rendus des séminaires Hausdorff, Paris 7, Ed. Masson, pp 132-150.

DuMOUCHEL (1973) Stable distributions in statistical inference : 1. symmetric stable distributions compared to other symmetric long-tailcd distributions, J. AMER. STAT. ASS., vol.68, n°342, pp 469477.

DuMOUCHEL (1975) Stable distributions in statistical inference : 2. information from stably distributed samples, J. AMER. STAT. ASS., vol.70, n°350, pp 386-393.

FAMA (1965a) Portfolio analysis in a stable paretian market MANAGEMENT SCIENCE, vol.11 (janvier) pp 404-419

FAMA (1965b) The bchaviour of stock market prices JOURNAL OF BUSINESS, vol.38 pp 34-105

FELLER (1971) An introduction to probability theory and its applications, vol.2, New York, John Wilcy and sons, 2ème édition.

FEUEVERGER & McDUNNOUGH (1981) On the efficiency of empirical characteristic function procedurcs, J. ROY. STATIST. SOC. SER. B, vol.43, pp 20-27.

FIELITZ & SMITH (1972) Asymmetric stable distributions of stock price changes JOURNAL OF THE AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION, vol. 67 (décembre) pp 813-814

GNEDENKO & KOLMOGOROV (1968) Limit distributions for sums of independant random variables, deuxième édition, reading, Mass., Addison-Wesley.

GRANGER (1966) The typical spectral shape of an economic variable. TRANS. AMER. MATH. SOC., vol.71, pp 38-69. ECONOMETRICA, vol.34, pp 150-161.

GRANGER & ORR (1972) Infinite variance and research strategy in time series analysis JOURNAL OF THE AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION, vol. 67, n°338, juin pp 275-285

HALL (1981) A comedy of errors : the canonical form for a stable characteristic function, BULL. LONDON MATH. SOC., vol.13, pp 23-27.

HOLTSMARK (1919) Uber die verbreiterung von spektrallinien, ANN. D. PHYSIK, vol.58, pp 577-600.

HSU,DER-ANN,MILLER,WICKERN (1974) On the stable paretian behavior of stock market prices, J. AMER. STAT. ASS., vol.69, pp 108-113.

IBRAGIMOV (1975) A note on the central limlit theorem for dependant random variables, THEORY OF PROBABILITY AND ITS APPLICATIONS, vol.20, pp 135-140.

ISLAM (1982) Statistical distribution of short-term exchange rate variations, Federal Reserve Bank of New York, Research paper n°8215.

KADIYALA (1972) Regression with non-gaussian stable disturbance : some sampling results ECONOMETRICA, vol. 40 (juillet)

KOUTROUVELIS (1980) Regression-type estimation of the parameters of stable laws JOURNAL OF THE AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION, vol. 75 pp 918-928.

LEITCH & PAULSON (1975) Estimation of stable law parameters : stock price behavior application JOURNAL OF THE AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION, vol.70 pp 670-677

LEVY (1925) Calcul des probabilités, Paris, Gauthier-Villars.

LEVY (1948) Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris, Gauthier Villars.

LEVY (1954) Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, Gauthier-Villars.

LUCACKS (1970) Caracteristic functions, London, Griffin.

McCULLOCH (1985) THe value of european options with Log-stable uncertainty Working paper, Department of Economics, The Ohio State University, Columbus. Juillet.

MAEJIMA (1983) On a class of self-similar processes ZEITSCHRIFT FUR WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND VERWANDTE GEBIETE, vol. 62, pp 235-245.

MANDELBROT (1962) Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Levy CRAS, vol. 254, juin, pp 3968-3970

MANDELBROT (1963a) New methods in statistical economy JOURNAL OF POLITICAL ECONOMY, vol. 79 pp 421-440

MANDELBROT (1963b) The variation of certain speculative prices JOURNAL OF

BUSINESS, vol. 36 pp 394-419

MANDELBROT (1967) The variation of some others speculative prices JOURNAL OF BUSINESS, vol. 40 (octobre) pp 393-413

MANDELBROT (1973) Le syndrome de la variance infinie et ses rapports avec la discontinuité des prix ECONOMIE APPLIQUEE, vol.26 pp 321-348

MANDELBROT (1975) Les objets fractals : forme, hasard, et dimension. Paris, Flammarion, Collection "Nouvelle bibliothèque scientifique". Troisième édition, 1989. Dans cette réédition se trouve une bibliographie exhaustive sur les problèmes liés aux fractals. On pourra aussi se référer à une autre version dc cet ouvrage, en anglais :

MANDELBROT (1982) The fractal geometry of nature, San Francisco, W.H. Freeman and company.

MANDELBROT (1985) Self-affine fractals and the fractal dimension, PHYSICA SCRIPTA, vol. 32, pp 257-260.

MANDELBROT & TAYLOR (1967) On the distribution of stock price differences OPERATIONS RESEARCH, vol. 15 pp 1057-1062

MITRA (1981) Distribution of symmetric stable laws of index $2^{-n}$, ANN. PROBABILITY, vol.9, pp 710-711.

OSBORNE (1959) Brownian motion in the stock market, OPERATION RESEARCH, vol.7 (mars-avril) pp 145-173

SAMUELSON (1967) Efficient portfolio selection for Pareto-Levy investments JOURNAL OF FINANCIAL AND QUANTITATIVE ANALYSIS, II (juin) pp 107-122

SINAI (1976) Self-similar probability distributions, THEORY OF PROBABILITY AND ITS APPLICATIONS, vol. 21, n°1, pp 64-80.

SO (1987) The sub-gaussian distribution of currency futures : stable paretian or nonstationnary ? THE REVIEW OF ECONOMICS AND STATISTICS, pp 100-107

TEICHMOELLER (1971) A note on the distribution of stock price changes JOURNAL OF THE AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION, vol.66, n°334, juin, pp 282-284

WALTER (1989) Les risques de marché et les distributions de Lévy, ANALYSE FINANCIERE, n°78, 3ème trimestre, pp 40-50.

ZOLOTAREV (1966) On representation of stable laws by integrals, SELECTED TRANSLATIONS IN MATHEMATICAL STATISTIC AND PROBABILITY, vol.6, Providence, R.I. : American Mathematical Society, pp 84-88.