CONTRIBUTION N° 33

FLOATING RATE AND RENEGOTIABLE RATE INSTRUMENTS : ANALYSIS OF VALUATION AND INTEREST RATE RISK ON AN ARBITRAGE BASIS

PAR / BY

H. GEMAN, R PORTAIT, T. d'ARCHIMBAUD

France

EVALUATION ET RISQUE DE TAUX DES INSTRUMENTS A TAUX VARIABLE OU REVISABLE : UNE ANALYSE PAR ARBITRAGE

312 EVALUATION ET RISQUE DE TAUX DES INSTRUMENTS A TAUX VARIABLE OU REVISABLE OU REVISABLE : UNE ANALYSE PAR ARBITRAGE

THOMAS D'ARCHIMBAUD
Directeur des marchés francs au Crédit du Nord

HELYETTE GEMAN
Professeur associé de Finance à l'ESSEC Directeur de Caisse des Dépôts
- Recherche Développement

ROLAND PORTAIT
Professeur de Finance à l'ESSEC

ABSTRACT

The paper addresses the issues of valuation and risk analysis of the different types of floating-rates securities.

In its most general covenants, a floater is defined as

$\alpha I (t-k) + \beta_\alpha$

where a belongs to the interval (o,1), I is an index expressing either the ccurrent level of a market interest rate or a time-average value of market interet rates, k is a lag and $\beta\alpha$ a markup.

The paper raises and attempts to answer the following questions :

- What is the market value of such a floater ?
- What relation between β_α and a prevails in an arbitrage-free economy ?
- What is the sensitivity of a floater to market interest rates and markups ?

A distinction will be made between two kinds of instruments available on the French market, namely those whose coupon is predetermined (the most common in the U.S. market) and those whose coupon is postdetermined (frequently encountered in the French market)

INTRODUCTION

Nous nous intéressons au problème de l'évaluation et de la mesure du risque d'instruments à taux variable dont le coupon, pay6 en t, est de la forme :

$C_t = \alpha\, I(t\text{-}k) + \beta$

avec :

a Coefficient multiplicatif $\in$ (0.1)
I(t-k) un indice défini comme un taux de marché de vue moyenne arithmétique de taux sur un intervalle se terminant en t-k
k un paramètre de retard
β une marge

La méthode traditionnelle consiste à figer les conditions de march6 qui prévalent; ce faisant on se ramène au cas bien connu des instruments à taux fixe mais on évacue complètement ce qui fait la spécificité des instruments à taux variable.

Nous adoptons une aproche plus générale en procédant par arbitrage.

Nous montrons ainsi que tout instrument à taux variable dont le coupon est de la forme $\alpha I(t\text{-}k) + \beta$ peut être dupliqud au moyen d'instruments dont la valeur est connue (&m-coupons, FRA...). La valeur de l'instrument à taux variable, et la mesure de son risque, s'en déduisent. On montre ainsi que la marge β d'un instrument à taux variable "standard" à l'émission (a= 1) est uniquement définie par la structure des taux.

Nous explicitons donc la relation entre structure des taux et marge. Nous travaillons pour cela avec une gamme de taux donnée. Cela suppose des conditions de négociabilité, de signature et des caractéristiques contractuelles, homogènes, entre tous les instruments considérés.

Dans le cas contraire (ex. Swap non ndgociable par opposition à obligation à taux variable - négociable et plus sûre) il faut introduire des gammes de taux différentes avec des spreads entre gammes.

Cette approche permet de montrer que la marge d'un instrument à taux variable quelconque est fonction de a et de la structure des taux. Elle permet en outre, de situer les instruments à taux variable dans l'ensemble des instruments de marcjé inconditionnels (taux fixes, Swaps...). Des considérations sur le coût de la liquidité bancaire s'en déduisent.

SECTION 1 - DEFINITION

Nous nous plaçons à l'instant t et nous nous intéressons aux titres in fine d'échéance t + n donnant droit au paiement régulier d'un coupon déterminé par la relation

(1) $C_s = \alpha I(s\text{-}k,d) + \beta$ pour $s = \tau, \tau + 1, \ldots \tau + n$

où τ dénote la date de distribution du prochain coupon $(t<\tau<t+1)$.et $(n+t)$ coupons sont encore dûs.

C_s est le coupon relatif à la période (s - 1,s) et pay6 en s, I est un indice de référence, la période est définie comme l'intervalle séparant deux coupons succéssifs.

a et β sont respectivement un coefficient multiplicatif ≤ 1 et une marge (dite faciale) fixés lors de l'émission de titre.

Sur le march6 primaire, le prix d'émission est contraint d'être au pair et la marge β sur ces titres dépend des conditions du march6 en t et des caractéristiques a, n, k, et I. Lorsque nous porterons une attention particulière à la relation liant β et a sur le marché primaire et que les caractéristiques du titre (n, k, I) ne donnent lieu à aucune ambiguité, nous écrirons cette "marge de marché" $\beta(\alpha,t)$ avec $d\beta/d\alpha < 0$

Nous distinguerons sur le march6 primaire les titres pour lesquels a = 1 que nous qualifierons de "standard" et nous poserons $\beta(1,t) = \beta(t)$. Dès lors, un titre venant de distribuer un coupon et dont la marge est $\beta(t)$ est au pair.

$I(\tau-k, d)$ est un indice calculé sur la base d'une moyenne arithmétique de taux de march6 sur une durée d. On peut représenter cet indice sous la forme :

$$\bar{I}\ (\tau-k,\, d) = \frac{1}{d}\int_{\tau-k-d}^{\tau-k} i\ (x)\ dx$$

Lorsque d est nul, l'indicc, not6 $I(\tau - k)$ est dit "instantané". Dans ce cas :

$$I(\tau - k) = \lim_{d \to 0} I(\tau - k, d) = i(\tau - k)$$

k est la durée (mesurée en nombre de périodes) séparant la date $(\tau - k)$ de fixation du coupon de la date de paiement du coupon (τ). Le coupon C_τ payé en τ étant relatif à la période $(\tau - 1, \tau)$, il y aura lieu de distinguer le cas où $k \geq 1$ (taux "révisable" : la valeur du coupon est connue au moment où il commence à courir) du cas où $k<1$ (taux "variable" : la valeur du coupon n'est pas encore fixée lorsqu'il commence à courir).

Selon les valeurs de t-k-t (distance séparant la date de référence du prochain coupon t-k et l'instant courant t) 0 ou 1 coupon est prédéterminés dans le cas du taux variable, 1 ou 2 sont prédéterminé dans le cas révirsable

<u>Annexe : Nombre de coupon prédéterminés.</u>

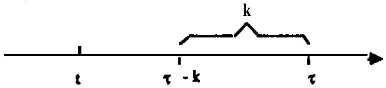
Nous noterons $\hat{\tau}$ l'instant auquel commence (ou a commencé) à courir le premier coupon $C_{\hat{\tau}+1}$ susceptible d'être affecté par une variation future des taux :

$$\hat{\tau} = \inf_{j \in N} \{\tau + j - 1 \text{ tel que } \tau + j - k \geq 0\}$$

Reprenons la distinction entre taux variable et taux révisable.

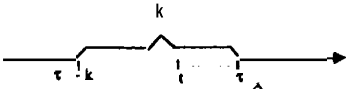
a) $k<1$ (taux variable) : deux configurations différentes sont à envisager,:

(i) $t<\tau - k$



Tous les coupons à venir sont susceptibles de révision ($\hat{\tau} = \tau - 1$)

(ii) $t \geq \tau - k$

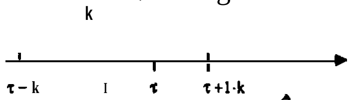


Le premier coupon C_τ est prédéterminé ($\hat{\tau} = \tau$ -1 ; c'est le cas où on est très proche du coupon à venir)

b) $k \geq 1$ (taux révisable)

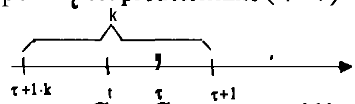
deux configurations sont encore à envisager :

(i) $\tau + 1 - k > t$



Seul le prochain coupon C_τ est prédéterminé ($\hat{\tau} = \tau$)

(ii) $\tau + 1 - k < t$



Les deux premiers coupons. C_τ et $C_{\tau+1}$, sont prédéterminés ($\hat{\tau} = \tau + 1$)

SECTION 2 : ANALYSE CLASSIQUE PAR CRISTALLISATION

Le principe de base de l'analyse classique des titres à coupons variables est de figer les conditions de taux prévalant sur le marché, en les "cristallisant". Ceci permet de définir toute la séquence des coupons futurs d'un instrument à taux variable et donc d'employer les formules classiques du calcul actuariel. On peut ainsi calculer pour chaque titre un taux de rendement et, en le comparant au niveau de l'indice cristallisé, définir par différence une "marque actuerielle cristallisée"; la comparaison des prix de différents instruments à taux variables est alors rendue possible.

On considèrera un titre à taux variable ou révisable, référencé sur l'index I, émis en 0, de $a = 1$, de marge faciale β_0 et de durée n à l'instant t (n + t à l'origine); t désignera l'instant courant, I_t la valeur de l'index en t, β_t la valeur de la marge faciale prévalant sur le marché des titres de durées n indexés sur I.

On appellera W_t la valeur d'un titre à revenus fixes, in fine, de durée n qui distribue un coupon, dont le taux nominal est $I_t + \beta_0$ (I_t est "cristallisé") alors que le taux de rendement de marché sur ce type de titres est $I_t + \beta_t$

$$(2) \quad W_t = (I_t + \beta_0) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+I_t+\beta_t)^j} + \frac{1}{(1+I_t+\beta_t)^n}$$

ou de manière équivalente,

$$W_t=\left[(I_t+\beta_t)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+I_t+\beta_t)^j}+\frac{1}{(1+I_t+\beta_t)^n}\right]+(\beta_0-\beta_t)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+I_t+\beta_t)^j}$$

$$(3)\quad W=1+(\beta_0-\beta_t)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+I_t+\beta_t)^j}$$

(puisque le terme entre crochets représente la valeur d'un titre en pair)

La variation à l'indice du titre s'écrit donc

$$(4)\quad \frac{-dW}{dI}=(\beta_0-\beta_t)\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{[1+I(t)+\beta(t)]^{(j+1)}}$$

La variation à la marge s'écrit :

$$\frac{-dW}{d\beta_t}=(\beta_0-\beta_t)\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{(1+I_t+\beta_t)^{(j+1)}}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+I_t+\beta_t)^j}$$

soit :

$$(5)\quad \frac{-dW}{d\beta_t}=\frac{-dW}{dI}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+I_t+\beta_t)^j}$$

(3) implique que la déviation de la valeur d'un titre à taux variable par rapport à la parité est proportionnelle à l'écart β_0 - β_t entre la marge faciale β_0 et la marge faciale β_t pratiquée à l'instant courant sur le marché. Outre l'effet habituel du coupon (non analysé ici), seul cct écart peut expliquer une déviation de la valeur de marché par rapport à la parité.

(4) implique que la valeur du titre est sensible à une variation de l'indice de référence si $\beta_0 \neq \beta_t$, c'est-à-dire si le titre n'est pas au pair. Cette sensibilité est en pratique très faible (quelques millièmes au maximum (1)).

(5) implique que la variation à la marge peut être approximée par le terme

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+I_t+\beta_t)^j}\quad \text{puisque le terme très faible}\quad -\frac{dW}{dI}\quad \text{peut être négligé}$$

Critique de la methode traditionnelle

La méthode traditionnelle de cristallisation procède en évacuant le caractère aléatoire des instruments considérés.

Ce faisant, elle permet de calculer un taux de rendement acturiel (ceteris paribus...) et de définir une marge acturielle. Cette dernière a le mérite de permettre la comparaison entre les instruments relativement proches et d'indexation identique.Mais, outre les limites bien connues d'une approche en taux de rendement acturiel, on peut s'interroger sur la rigueur de ce calcul qui suppose un environnement certain alors que les instruments à taux variables n'auraient pas licu d'être dans un tel contexte.

(1) Pour un écart β_t - β_0 = 0,3% et pour un titre de 10 ans de d I , cette sensibilité est de l'ordre de 0.01.

SECTION 3 - EVALUATION PAR ARBITRAGE

Considérations un indice I (par exemple TAM) et une formule d'indexation $\alpha I + \beta$ (par exemple 0,8 TAM + 2%)

A l'instant courant t, la marge additive β qui prévaut sur le marché primaire pour des titres au pair dépend de α, de I et de la durée n de l'instrument ; on l'écrira $\beta^I(t, \alpha, n)$ ou plus simplement $\beta(t, \alpha)$ quand on ne considère qu'un seul indice et une durée n.

On posera en outre $\beta(t) = \beta(t, 1)$

$\beta(t)$ désigne donc la marge additive prélevant sur les produits au pair parfaitement indexés ($\alpha = 1$) que nous appellerons standards et désignerons par y (par exemple TAM + 0,15).

On considèrera un instrument x du marché, primaire ou secondaire, indexé selon la formule $\alpha I + \hat{\beta}$.

Pour un instrument du march6 secondaire, on a, en général, $\hat{\beta} \neq \beta(t, \alpha)$

Nous allons étudier les arbitrages possibles faisant intervenir x, S, et des titres à revenus fixes.

La gamme des taux sera, dans la suite, souvent caractérisée par la gamme des zéro-coupons $(u_1, ..., u_T)$; u_i est défini comme un titre donnant 1 franc dans i périodes et dont le prix $U_i = \dfrac{1}{(1+r_i)^i}$

On considèrera aussi des titres donnant droit à des séquences constantes unitaires : z_n donnera n échéances de 1F et sa valeur $Z_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$

Pour ce qui concerne des instruments indexés, nous distinguerons l'instrument à taux révisable de l'instrument à taux variable.

I - Intruments a taux revisable

Considérons un instrument x à taux rdvisable, index6 selon la formule :

$$C_s = \alpha I(s-k) + \hat{\beta} \equiv \alpha I(s-1-h) + \hat{\beta} \quad (k > 1 \quad h > 0)$$

instrument in fine, ayant n échéances pleines à courir. En général, I désignera un taux instantané ou quasi instantané.

Dès lors, le prochain coupon $\hat{C}_{t+1}$ est prédéterminé alors que les suivants sont suceptibles de révision.

Le titre standard y distribuera $\begin{cases} C(t+1) = I(t) + \beta(r) & \text{en } t+i \quad ; \\ C(s) \quad = I(s-1-h) + \beta(r) & \text{en } t+2, ..., t+n \end{cases}$

il sera au pair en t. On remarquera que le premier coupon de y, C(t+1), est calculé à partir de I (t) et non de I (t-k) afin d'incorporer toute l'information disponible en t.

Proposition 3.1

L'instrument x est Cquivalent à un portefeuille composé de :

. α francs d'un titre standard y
. $\hat{\beta} - a\,\beta$ (t) francs d'un titre z_n donnant n échéances constantes de 1 F
.(1 - a) francs d'un zéro coupon u_n de valeur notée U_n.
. $\hat{C}_{t+1} - \alpha\, I(t) - \hat{\beta}$ francs d'un zéro coupon u, de valeur U_1

——> *Démonstration*

Le tableau dcs flux suivants montre l'équivalence :

	t+1	s= t +1, ... t+n-1	t+n
α francs de y	$\alpha[I(r) + \beta(t)]$	$\alpha[I(s-k) + \beta(t)]$	$\alpha[I(t+n-k) + \beta(t) + 1]$
$\hat{\beta} - \alpha\beta(t)$ francs de z_n	$\hat{\beta} - \alpha\beta(t)$	$\hat{\beta} - \alpha\beta(t)$	$\hat{\beta} - \alpha\beta(t)$
u_1, u_n	$\hat{C}_{t+1} - \alpha I(t) - \hat{\beta}$	0	$1-\alpha$
x	$\hat{C}_{t+1}$	$\alpha I(s-k) + \hat{\beta}$	$1 + \alpha I(t+n-k) + \hat{\beta}$

Corollaire 3.1

En l'absence d'arbitrage, l'instrument x à taux révisable considère a une valeur

$X(\hat{\beta}, \underset{\sim}{r})$ définie par :

$$(7)\quad X(\hat{\beta}, \underset{\sim}{r}) = \alpha + [\hat{\beta} - \alpha\,\beta(t)]\, Z_n + [\hat{C}_{t+1} - \alpha\, I(t) - \hat{\beta}]\, U_1 + (1-\alpha)\, U_n$$

où Z, U_1 et U_n ont la même signification que précédemment et désigne la gamme des taux spots

——> *Démonstration*

Le corollaire résulte directement de dla proposition 3.1 quand on remarque que y est au pair.

Commentaire

Supposons $\alpha = 1$

$$X = 1 + [\hat{\beta} - \beta(r)] Z_n + [\hat{C}_{t+1} - I(t) - \hat{\beta}] U_1$$

$$X = 1 - [\hat{\beta} - \beta(r)] Z_n + [I(t-h) - I(r)]\ U_1$$

L'écart de X par rapport à la parité peut donc s'expliquer par deux éléments :

. $\hat{\beta}$ diffère de la marge β (t) appliquée par le marché à l'instant considéré.

(Nous remarquons que la chronique des écarts $\hat{\beta} - \beta$ (t) doit être actualisée aux taux spots prévalant sur le march6 (coefficients d'actualisation) et non avec un taux cristallisé comme l'"indique la relation (3) section 2).

. Le prochain coupon $\hat{C}_{t+1}$ distribué par x est calculé à l'aide d'un indice I (t - h) reflètant des conditions passées si h>0

Propositions 3.2

En notant β (t, a) la marge appliquée sur le marché primaire aux instrumants au pair de marge multiplicative a , de premier coupon $\alpha\ I(t) + \beta\ (t,\alpha)$, de coupons suivants $\alpha I(t+j-k) + \beta(t,\alpha)$ (1), la relation suivante doit prévaloir en l'absence d'arbitrage

$$(8)\ \beta(t,\alpha) = \frac{(1-\alpha)(1-U_n)}{Z_n} + \alpha\,\beta(t)$$

——> *Démonstration*

Cette relation découle immédiatement du corollaire 3.1 puisque X (β (t, α), r)= I

Commentaires

$\frac{d\beta}{d\alpha} = \beta - \frac{1-U_n}{Z_n} < 0$ pour toutes valeurs "normales" de β et des taux.

• Sur un marché bien arbitré, on peut donc se limiter à considérer une seule marge de march6 β (t)

II - Taux variable

Considérons à l'instant t 1F de nominal d'un instrument x in fine, ayant n échéances pleines à courir, indexé selon la règle :

$$\hat{C}_{t+1} = \alpha\ I(t+1) + \hat{\beta}$$

$$C_s = a\ I(s-k) + \hat{\beta} \quad ; \quad k \in [0, 1[\quad \text{pour } s = t+2, \ldots, t+n$$

• Remarques :

- En général I (t) est défini comme une moyenne de taux instantanés dans la période (t-1, t) ;

(1) On suppose systématiquement que, sur le marché primaire, les instruments au pair ont un premier coupon $$$$ calculé sur la base de I (t) et non de I (t-k).

- La période de référence du premier coupon de l'instrument x considéré est supposée coïncider avec celle du coupon, seuls les coupons ultérieurs sont calculés avec un &a-lage k ; le cas où le premier coupon est également d&& par rapport à la période de référence sera examiné plus loin.

Proposition 3.3

x est équivalent au portefeuille composé de :

. a francs de nominal d'un titre standard y du marché primaire indxé selon la règle

$\hat{C}_{t+1} = I(t+1) + \beta(t)$

$C_s = I(s-k) + \beta(t)$ pour $s = t+2, \ldots, t+n$

(Pas de décalage k sur le 1er coupon de y afin que celui-ci ne soit pas calculé sur la base de taux "passés").

. $\hat{\beta} - \alpha\beta(t)$ francs de nominal d'un titre Zn donnant n échanges constantes de 1F.

. (1 - a) francs d'un zéro-coupon u_n donnant 1F en t+n

——> *Démonstration*

	$s = t+1$	$s = t+2, \ldots\ t+n-1$	$t+n$
α francs de y	$\alpha[I(t+1) + \beta(t)]$	$\alpha[I(s-k) + \beta(t)]$	$\alpha[I(t+n-k) + \beta(t)] + \alpha$
$[\hat{\beta} - \alpha\beta(t)]$ francs de z_n	$\hat{\beta} - \alpha\beta(r)$	$\hat{\beta} - \alpha\beta(t)$	$\hat{\beta} - \alpha\beta(t)$
$(1-\alpha)$ francs de u_n			$1-\alpha$
x	$\alpha I(t+1) + \beta(t)$	$\alpha I(s-k) + \hat{\beta}$	$\alpha I(t+n-k) + \hat{\beta} + 1$

Corollaire 3.3

En l'absence d'arbitrage et en notant $X(\hat{\beta}, \underset{\sim}{r})$ la valeur de x :

$$(9) \quad X(\hat{\beta}, \underset{\sim}{r}) = \alpha + [\hat{\beta} - \alpha\beta(t)]\, Z_n(\underset{\sim}{r}) + (1-\alpha)\, U_n(\underset{\sim}{r})$$

—> *Démonstration*

D'après la propositions 3.3, en l'absence d'arbiuage

$$X\left(\hat{\beta}, \underset{\sim}{r}\right) = \alpha Y + \left[\hat{\beta} - \alpha\,\beta(t)\right] Z_n(\tilde{r}) + (1-\alpha)\ U_n(\underset{\sim}{r})$$

comme y est par définition un titre au pair, sa valeur Y = 1 et le corollaire 3.3 est démontré.

Remarques

1. si $\alpha = 1$, $X\left(\hat{\beta}, \underset{\sim}{r}\right) = 1 + \left[\hat{\beta} - \beta(t)\right] Z_n(\underset{\sim}{r})$

L'écart de X par rapport au pair à un an est égal à la valeur présente de la différence entre sa marge β et celle, $\beta(t)$, qui prévaut sur le marché pour des instruments équivalents.

2. Si on compare toujours dans le cas $a = 1$ notre méthode avec la méthode classique (équation (3)). il apparait que A $\beta = \hat{\beta} -$ (t) est actualisé ici aux taux spots et non au taux cristallisé.

Cette résolution est plus rigouseuse en même temps que la problématique est plus générale.

3. Dans le cas d'un instrument x du marché secondaire dont le prochain coupon Ct+1 est calculé avec un décalage k ($C_{t+1} = \alpha 1 - k) + \hat{\beta}$) (contrairement au cas de l'instrument vendu sur le march6 primaire considéré en proposition 3.2) il y a lieu de procéder à l'ajustement de la valeur de X correspondant à la valeur présente de l'écart k $[\hat{I} - I(t)]$ se produisant en t + 1 (où $\hat{I}$ dénote la valeur moyenne de i dans l'intervalle [t-k, t] (*))

On aboutit donc au corollaire 3.3 généralisé :

$$(10)\quad X\left(\hat{\beta}, \underset{\sim}{r}\right) = \alpha + \left[\hat{\beta} - \alpha\,\beta(t)\right] Z_n \quad + \quad (1-\alpha)\,U_n + \left[\hat{I} - I(t)\right] k\, U_1$$

Proposition 3.4

En l'absence d'arbitrage sur le march6 primaire

$$(11)\quad \beta(t, \alpha) = (1-\alpha)\ \frac{1 - U_n(\underset{\sim}{r})}{Z_n(\underset{\sim}{r})} + \alpha\,\beta(t)$$

Cette relation est identique à celle qui prévaut sur le marché des taux révisables (Cf. proposition 3.2)

—> *Démonstration*

Sur le march6 primaire, l'intrument x index6 selon la règle a I + $\beta(t,\alpha)$ est par définition au pair. donc X ($\beta(t,\alpha)$, r) = *1* et la relation (9) implique la relation (11)

Commentaire

On en déduit donc $\beta(t,\alpha) = f(r, a, \beta(t))$ et par considération d'arbitrage, on pourra ne considérer qu'une seule marge β par couple (I,n) d'index et de maturité.

(*) En effet, le standard au pair verse un premier coupons en t+1 sur $I(t) = \int_t^{t+1} i(u)\ du$ et non sur $I'(t) = \int_{t-k}^{t+1-k} i(u)\ du$

Dès lors, si l'instrument considéré sur le marché secondaire verse I't, sa valeur doit être décalée de celle trouvé au corrolaire 3.3 de k ($\hat{I}$ - I(t)) U_1, en posant $\hat{I} = \frac{1}{k}\int_{t-k}^{t} i(x)\ dx$

SECTION 4 - EVALUATION DE β (t) A L'AIDE DE TAUX FOWARD.

I - Rappels et definitions

Un FRA d'échéance $T = t+n$, de référence i et de durée 1 (une période) est un instrument qui donne droit en T au flux $\varnothing_T$

$$\varnothing_T = \tilde{i}(T) - f^n(t)$$

où les taux - période i et f sont définis comme $i(T)$ = valeur de la reference i en T (inconnue en t), $f^n(t)$ = taux prévalant en t pour les FRA d'échéance $T = t+n$, de durée 1, $f^n(t)$ s'interprête aussi comme le taux forward (implicite dans la gamme des taux zéro-coupon en t), relatif à la période (T, T + 1). (1)

A l'origine t, la valeur du contrat FRA est nulle (2).

Considérons maintenant y, l'instrument standard à taux revisable sur la base d'un indice I supposé refléter un taux de marché instantané.

Proposition 4.1

L'instrument standard y à taux révisable peut être synthétisé par :

- une chaine de RFA de nominal 1 et de durée n

- une chaîne de n. zéro-coupons $u_1, u_2, \dots u_n$ de maturités respectives 1,2,... n , en quad-&

$\beta(t) + f^1(t)$ pour u1, $\beta(t) + f^j(t-k)$ pour u_j (j=2,...n - 1) . $\beta(t) + f^n(t-k) + 1$ pour u_n

——> *Démonstration*

Considérons les flux générés aux instants t + 1, t + 2,... t + n

	t + 1	t + j (j = 2, ... n - 1)	t + n
FRA S	I −	I − $^{j-k}(t)$	$I(t+n-k) - f^{n-k}(t)$
0 - coupons	$\beta(t) + f^1(t)$	$\beta(t) + f^{j-k}(t)$	$\beta(t) + f^{n-k}(t)$
Y	$I(t) + \beta(t)$	$I(t+j-k) + \beta(t)$	$I(t+n-k) + \beta(t) + 1$

Corollaire 4.1

En l'absence d'arbitrage, la marge $\beta(t)$ de l'instrument standard au pair s'écrit :

$$(12) \quad \beta(t) = \frac{1}{Z_n(t)} \left[1 - \sum_{j=1}^{n} f^{j-k}(t)\, U_j(t) - U_n(t) \right]$$

(1) Un FRA peut être synthétisé par une opération foward-foward associée A me opération ash à l'échéance.

(2) En effet, le taux d'un FRA est fixé de telle sorte que l'"achat" ou la "vente" du RFA ne donne pas lieu A un mouvement de fonds.

——> *Démonstration*

Puisque y est au pair et la valeur en t des FRA nulle, la valeur de y = Y s'écrit :

$$Y = 0 + \beta(t)\, Z_n(t) + \sum_{j=i}^{n} f^{j-k}(t)\, U_j(t) + U_n(t) \quad \text{d'où découle (12)}$$

Remarques

• Puisque les taux forward sont contenus dans la gamme des taux spot en t, la marge β (t) peut être explicitée en fonction de celle-ci.

• Pour ne pas alourdir les notaions, nous n'avons pas symbolisé la dépendance de β par rapport à la durée n ; en fait, le corollaire 4.1 donne la "gamme des marges" des produits standard en fonction de la gamme des taux spots.

• Pour préciser et comger une idée largement répandue selon laquelle les anticipations de taux déterminent les marges, nous remarquons que cette influence n'est en fait d'indirecte et ne se manifeste qu'à travers la gamme des taux foward (1).

• En remarquant que le taux acturial a_n (t) d'un titre à taux fixe in fine, de durée n, est donné par la relation d'arbitrage (2)

$$a_n(t) = \frac{1 - U_n(t)}{Z_n(t)}$$

on peut exprimer la marge β (t) sous la forme

$$(13)\quad \beta(t) = a_n(t) - \frac{1}{Z_n(t)} \sum_{j=i}^{n} f^{j-k}(t)\, U_j(t)$$

SECTION 5 - LES SWAPS

On ne traitera ici que les swaps permettant d'échanger un taux fixe contre un taux variable reflétant des conditions instantanées ou quasi instantanées.

1. _ Rappels et définitions

Un swap taux fixe - taux variable (ou swap emprunteur) d'échéance T = t + n, de référence i, est un instrument qui donne droit à la séquence de flux $\emptyset_S$ (s = t = 1, ... s = t+n = T

$$\hat{\emptyset}s = \hat{\imath}(s) - p(t)$$

i (s) est la valeur de la référence i en s

p (t) est le taux (ou "prix") du swap de durée n

p (t) est fixé lors de l'émission de swap, en t, de manière à ce que la valeur du contrat soit nulle.

(1) En associant le corollaire 4.1 à une théorie d'anticipations avec primes de liquidité, on pourrait écrire β (t) en fonction des taux spots anti*.

(2) Puisqu'un titre au pair doit avoir un coupon égal à an il vient 1 = an (t) Zn (t) + Un (t)

Proposition 5.1

En l'absence d'arbitrage

$$(14) \quad p(t) = a_n(t) - \beta(t) = \frac{1}{Z_n(t)} \sum_{j=1}^{n} f^{j-k}(t)\, U_j(t)$$

——> *Démonstration*

Un franc d'instrument à taux fixe de rendement a_n est équivalent à un franc de swap @-teur (au taux p) combiné à un franc de l'instrument à taux variable standard y.

Dès lors p (t) = a_n (t) - β (t), et par substitution de la valeur de β (t) obtenue en (13), on obtient la deuxième égalité.

Remarques

1. - Cette relation auraient pu être démontrée directement et est valable pour les swaps taux variable / taux fixe (swaps prêteurs)

2. - La stratégie consistant à emprunter à taux révisable (par exemple TMO) ou à emprunter à taux fixe puis à swapper le taux fixe contre une référence variable (TMO par exemple) revient à se procurer de la liquidité pure (sans supporter de risque de taux). Le coût de cette liquidité est donnée par la marge β (t) (1), laquelle s'interprète donc comme une prime de liquidité ; comme on l'a vu cette prime dépend uniquement (et de manière explicite) de la structure des taux en t. Dans un environnemant où la structure des taux est "normale", la liquidité a un coût plus élevé que dans celui où la structure des taux est plate, voire inversée.

3. - Un swaps de taux variable (échange de deux indices) s'interprétant comme la combinaison de deux instrument à taux variable 1 et 2, la marge $\beta = \beta 1 - \beta 2$ peut être calculée à partir de l'analyse précédente (appliquk à deux gammes de taux forward différentes).

SECTION 6 : RISQUE DE TAUX ET RISQUE DE MARGE

I - Marge considérée comme exogène

a) Taux révisable

Le corollaire 3.1 donnait :

$$X(\hat{\beta},r) = \alpha + [\hat{\beta} - \alpha\beta(t)]\, Z_n + [\hat{C}_{t+1} - \alpha I(t) - \hat{\beta}]\, U_1 + (1-\alpha)\, U_n$$

Des petites variation $dr_1, \dots, dr_n$ de la gamme et $d\beta$ de la marge se traduisant par des variations dZ_n, dI, dU_1, dU_n des grandeurs Z_n, I, U_1, U_n et, par différentiation, on obtient :

$$dX = -\alpha Z_n\, d\beta - U_1\, \alpha\, dI + \left[\hat{C}_{t+1} - \alpha I(t) - \hat{\beta}\right] dU_1 + (1-\alpha)\, dU_n + \left[\hat{\beta} - \alpha\beta(t)\right] dZ_n$$

(1) ou plus directement, en constituant un portefeuille de RFAs couvrant le swap et en écrivant que le portefeuille global a une valeur nulle.

$$\text{où } dU_1 = \frac{-dr_1}{(1+r_1)^2} \quad ; \quad dU_n = \frac{-n\, dr_n}{(1+r_n)^n} \quad ; \quad dZ_n = -\sum_{j=1}^{n} \frac{j\, dr_j}{(1+r_j)^{j+1}}$$

et où en général I est un taux instantané Cgal à r_1, ce qui donne :

$$dX = \underbrace{-\alpha Z\, d}_{\text{risque de marge}} - \underbrace{\frac{\left[\alpha + \hat{\beta} - \hat{C}_{t+1}\right] dr_1}{(1+r_1)^2} - n(1-\alpha) dr_n \left[\hat{\beta} - \alpha\beta(t)\right] dZ_n}_{\text{risque de taux}}$$

Nous allons supposer dans la suite du a) a = 1 pour faciliter l'interprétation. On obtient alors :

$$dX = -Z_n\, d\beta - \frac{\left[1 + \hat{\beta} - \hat{C}_{t+1}\right] dr_1}{(1+r_n)^2} - \left[\hat{\beta} - \beta(t)\right] d\, Z_n$$

A ce stade, il convient de préciser la représentation de dr_1 et dZ_n, nous allons nous placer dans deux configurations successives :

1er car : Nous supposerons un placement parallèle de la gamme des taux

$dr_1 = dr_2 = \quad = dr_n = dr$, on peut écrire

$$dX = -Z_n\, d\beta - \frac{\left[\alpha + \hat{\beta} - \hat{C}_{t+1}\right]}{(1+r_1)^2\, dr} + \left[\hat{\beta} - \beta(t)\right] Z_n \times \left[\text{Sens } Z_n\right] d_r$$

Le premier terme exprime la sensibilité à la marge, le deuxième reflète la petite difficulté posée par le premier coupon et discutée précédemment et le troisième terme est l'expression du risque de taux d'intérêt généré par la marge dès que $\beta \neq \beta(t)$ (Cf Yavitz - Kaufol et al - 1987)

Dans le cas particulier où $\hat{\beta} \neq \beta$ (t), ce troisième terme disparaît de dX se réduit aux deux premiers termes.

2ème car : de façon plus générale, supposons un modèle à deux facteurs 1, s de gamme des taux où 1 est le taux long et s le spread.

Alors pour tout j = 1.2 ... n, rj = dr_j =

Il en résulte que

$$dX = -\underbrace{\left[Z_n \frac{d\beta}{dl} + \left[\frac{\hat{\beta} - \beta(t) + 1}{(1+\varphi_1)^2}\right] \frac{d\varphi_1}{dl} + \left[\hat{\beta} - \beta(t)\right] \sum_{j=2}^{n-1} j \frac{d\varphi_j}{dl} + n \frac{\left[\hat{\beta} - \beta(t)\right]}{(1+\varphi_n)^{n+1}} \frac{d\varphi_n}{dl}\right] dl}_{\text{variation de X par rapport au taux long}}$$

$$-\underbrace{\left[Z\frac{d_\beta}{d_s}+\frac{\hat{\beta}-\beta(t)+1}{(1+\varphi_1)^2}\frac{d\varphi_1}{d_s}+\left[\hat{\beta}-\beta(t)\right]\sum_{j=2}^{n-1} j\frac{d\varphi_j}{d_s}\right.}\;\underbrace{\left.+\frac{n\left[\hat{\beta}-(t)\right]}{(1+\varphi_n)^{n+1}}\frac{d\varphi_n}{d_s}\right]}_{\text{variation de X par rapport au spread}}ds$$

3 - Taux variable

D'après le corollaire 3.3 généralisé, la valeur de lq'instrument x à taux variable s'écrit :

$$X(\hat{\beta}, r)=\alpha+[\hat{\beta}-\alpha\beta(t)]\,Z_n(\underset{\sim}{r})+(1-\alpha)\,U_n(\underset{\sim}{r})+k(\bar{\imath}-i(t)\,U_1(\underset{\sim}{r}))$$

On en déduit :

$$dX=\underbrace{-\alpha Z_n(\underset{\sim}{r})\,d\beta}_{\text{risque de marge}}+\underbrace{\left[\hat{\beta}-\alpha\beta(t)\right]d\,Z_n(\underset{\sim}{r})+(1-\alpha)\,dU_n(\underset{\sim}{r})+k(\bar{r}-i(t))\,dU_1(\underset{\sim}{r})}_{\text{risque de taux}}$$

et on refait la même analyse quc dans le cas des taux révisables.

2. Cas où la marge est exprimé en fonction de la gamme des taux (taux **révisables)**

Le corollaire 4.1 de la section 4 Ctablissait qu'en I'absence **d'arbitrage,** la marge $\beta(t)$ s'écrit :

$$\beta(t)=\frac{1}{Z_n(t)}\left[1-\sum_{j=1}^{n} f^{j-k}(t)\,U_j(t)-U_n(t)\right]$$

et dans cette expression, les f^{j-k} (t) sont contenus dans la gamme des taux prévalant à l''instant t puisqu'on a la relation fondamentale :

$$\left[1+r_s(t)\right]^s=\left[1+r_{s-1}(t)\right]^{s-1}\left[1+f^{s-1}(t)\right] \quad \text{pour tout } s\,;$$

En reprenant le modèle de gamme de taux à deux paramètres introduit en section 6 partie 1,

$$r_S(t)=\varphi_S(1,s,t)$$

$$U_S(t)=$$

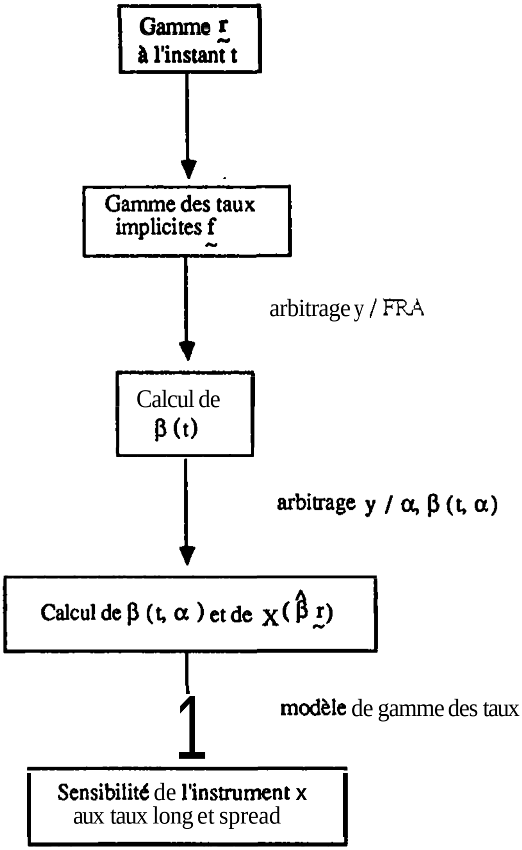
$$Z_n(t)=U_1(t)+\quad+U_n(t)$$

et $\beta(t)$ devient une fonction $\psi(l, s, t)$ dont on peut déduire

$$d\beta(t) = \underbrace{\frac{d\psi}{dl}dl}_{\substack{\text{sensibilité}\\ \text{de la marge}\\ \text{au taux long}}} + \underbrace{\frac{d\psi}{ds}ds}_{\substack{\text{sensibilité}\\ \text{de la marge}\\ \text{au spread}}} + [\;]\,dt$$

CONCLUSION

On peut remarquer qu'en associant les résultats mis en évidence dans cet article aux propriétés classiques de la structure par termes des taux d'intérêt, les analyses conduites dans cet article peuvent être articulées conformément à la représentation de l'organisme suivant :



Nous avons ainsi obtenu la valorisation de l'instrument à taux variable ou vérisdable x à partir de la gamme des taux et sa sensibilité aux paramètres du modèle de gamme des taux choisis.

"Evaluation et risque de taux des instruments à taux ou révisables : une analyse par arbitrage"