CONTRIBUTION N° 37

VALUATION OF LONG - TERM INTEREST RATE OPTIONS : THE HO AND LEE APPROACH

PAR / BY

Christian DU PAYRAT

France

EVALUATION DES ACTIFS OPTIONNELS DE TAUX DE LONGUE DUREE - METHODE DE HO ET LEE

VALUATION OF LONG - TERM INTEREST RATE OPTIONS: THE HO AND LEE APPROACH

CHRISTIAN DU PAYRAT

ABSTRACT

Assets including options on interest rates beyond two years are extremely common on financial markets. Examples include bonds with windows or floors, exchangeable or convertible bands and bond warrants. The present market valuation of such instruments is questionable.

While traditional models such as Black and Scholes are reliable for the appraisal of short - term options, they cannot be applied in this context since the lognormality of the underlying asset is not even approximately maintained in the long term.

Endogenous models of theoretical rate structure generally require estimations covering from three to ten different parameters of doubtful stability, and this makes their use problematic.

In contrast, valuation based on Ho and Lee type exogenous models offers the following advantages:

- consistency, since they are based on empirical observation of rate structures
- simplicity of use, with only two parameters to be estimated
- flexibility, since a binomial approach permits valuation of of optional assets including complex, interlocking and multiple clauses.

This paper sets out both the theoretical basis and the practical steps involved in the application of the Ho and Lee model to optional assets. Thus it demonstrates the construction of a tree model of changes in rates as it results from successive distortion of the present rate structure due to volatility and the passage of time. This is based on a demonstration that a binomial model and the hypothesis of distortion independent of the universe and time adequately describe the process in conditions of arbitrage neutrality.

It further sets out a method for assessing the extremes within which the value of an optional asset is known, both at maturity and any other time. Finally, recursive definition of the current value of the optional asset is explained

EVALUATION DES ACTIFS OPTIONNELS[1] DE TAUX DE LONGUE DUREE - METHODE DE HO & LEE[2]

PAR C. DU PAYRAT

RESUME

Les actifs **comportant** des options **longues à** plus de 2 ans **sur** des taux sont trbs **fréquents sur** les marches. On **peut citer** par exemple sur **le marché obligataire** les obligations **à fenêtre** ou **à** plancher, **les** obligations **échangeables** ou convertibles, les **bons de souscription d'obligation.**

Leur **valorisation actuelle** par le **marché** pose de **sérieux problèmes.**

L'évaluation par **les modèles classiques** de **type** BLACK & **SCHOLES,** qui donne de **bow résultats dans** le cas des options **courtes, n'est** pas possible. En effet la **condition** de **lognormalité** de l'actif **sous - jacent** n'est **absolument** pas **respectée** sur **longue durée, même** approximativement.

L'évaluation par **les modèles endogènes qui modélisent** une **structure** de taux **théorique** exige **généralement l'estimation** de 3 à 10 parambtres **à** la **stabilité douteuse,** ce **qui** la rend **difficile à** mettre en oeuvre.

L'dvaluation par un **modèle** exogkne type HO & LEE **offre** au **contraire** les **avantages suivants :**

- **cohérence,** par **l'utilisation** de la structure des taux **réellement observée,**

- **simplicité** de mise en oeuvre, 2 parambtres **seulement devant être estimés,**

- souplesse, due au **caractère** binomial du modkle, **permettant d'évaluer** les actifs optionnels à clauses **complexes, imbriquées** et multiples.

L'article **décrit** les fondements **théoriques** et la **démarche** pratique **pour** appliquer le **modèle** de HO & LEE aux **actifs** optionnels

Il détaille donc successivement comment :

- **construire l'arbre d'évolution** des taux, **engendré** par **les déformations successives** de la **structure** actuelle des taux due **aux aléas** et au temps,

A cet effet on montre que **le** caractkre binomial et **l'hypothèse** de **déformation indépendante** de **l'état** de la nature et du temps **définissent parfaitement le processus** au **travers** de 2 **conditions d'arbitrage** et de **neutralité.**

- **définir les** conditions **limites** à **l'échéance** et à chaque instant, pour **lesquelles** la **valeur** de l'actif **optionnel** est **connue,**

- **càlculer récursivement jusqu'à obtenir** la **valeur présente** de l'actif **optionnel.**

---

[1] *On appellera actifs optionnels les actifs comportant des clauses optionnelles.*

[2] *"Term structure Movements and pricing interest rate contingent claims" - JOURNAL OF FINANCE. VOL XLL N°5. DECEMBER 1986*

ARTICLE

Les actifs comportant des options longues à plus de 2 ans sur des taux d'intérêt sont très fréquents sur les marchés. Citons quelques exemples :

> L'émetteur d'obligations se réserve souvent le droit d'amortir par anticipation son émission ("emprunts à fenêtres") ou de restreindre les possibilités pour l'obligataire d'être tiré au sort (SEA 50 % ...).
>
> L'acheteur d'un cap T4M/taux fixe 5 ans s'assure contre la hausse des taux via des options mensuelles durant les 5 ans.

Evaluer les multiples actifs optionnels longs de taux est donc indispensable. Pourquoi ne pas utiliser un des modèles dérivés de celui de BLACK & SCHOLES, vu leurs bons résultats dans l'évaluation des options courtes ?

Invalidité des modèles type BLACK & SCHOLES

En effet le modèle d'évaluation de BLACK & SCHOLES[3] est le plus célèbre par sa robustesse et sa simplicité d'emploi.

BLACK & SCHOLES ont déduit par arbitrage la valeur théorique d'une option sur action sous les hypothèses suivantes :

- marché sans frais de transaction ou d'information,
- titres indéfiniment divisibles,
- emprunt & prêt à taux fixe sans limitation, vente à découvert possible,
- taux d'intérêt court terme connu et constant,
- option de type européen (exerçable uniquement à l'échéance)
- absence de dividende
- cours de l'action suivant un processus continu de GAUSS - WIENER : $dS/S = \mu\, dt + V\, dz$, oil μ représente une tendance et V une volatilité constantes (cows lognormal).

Ce modèle concernait les actions. Moyennant certains ajustements, il a été étendu aux futures d'actions et de taux (contrats MATIF) et la plupart de ses hypothèses restrictives ont pu être relaxées.

Toutefois, il ne semble pas réaliste de l'étendre aux options longues de taux :

- le taux d'intérêt jusqu'à l'échéance de l'option n'est pas constant il avait peu d'influence dans le cas des options courtes
- le cours d'une obligation n'est assurément pas lognormal sur longue période, car il converge vers sa valeur de remboursement. La volatilité n'est pas *stable* mais décroissante, l'approximation était acceptable dans le cas des *options* de taux courtes.

Devant l'impossibilité d'obtenir des prix réalistes par les modèles de type BLACK & SCHOLES pour les options de taux longues, de nombreux modèles malheureusement plus complexes ont été développés.

---

[3] *cf références en fin d'article.*

Défauts des modèles endogènes dévaluation d'option longue

Les premiers modèles développés étaient des modèles endogènes car ils modélisaient la structure des taux, par opposition aux modèles exogènes qui partent de la structure des taux réellement observée à un moment donné.

Parmi ceux-ci on peut citer les modèles endogènes suivants :

COX, INGERSOLL et ROSS[4] posent que le taux court terme suit un processus autorégressif. Cette hypothèse suffit à valoriser les actifs de taw. Ils en déduisent alors par arbitrage le prix des actifs optionnels.

BRENNAN et SCHWARZ[4] ont étendu le modèle ci-dessus en posant que la structure de taux découle de l'évolution simultanée d'un taux court et d'un taux long suivant chacun un processus autorégressif.

SCHAEFFER et SCHWARZ[4] considèrent que le prix de l'obligation suit un processus à volatilité proportionnelle à la duration.

Dans les 3 cas il faut estimer les paramètres[5] des processus et le prix du risque, pour pouvoir évaluer les actifs optionnels.

Estimer au minimum 3 jusqu'à une dizaine (!) de paramètres, tâche inevitable des utilisateurs des modèles endogènes sauf exception, est quasi impraticable d'autant plus que la stabilité dans le temps de ces paramètres est douteuse.

Simplicité d'emploi du modèle exogène de HO & LEE

Les modèles exogènes partent de la structure des taux telle qu'elle est observée à un instant donné. Ils utilisent donc la totalité de l'information qu'elle contient.

Le modèle de HO & LEE est l'un des premiers modèles exogènes. Ses paramètres en nombre restreint (2, voire 1) peuvent être estimés implicitement via les cours des actifs conditionnels côtés sur le marché.

Etant un modèle binomial comme celui de COX, ROSS & RUBINSTEIN pour les actions, il possède la souplesse idéale pour l'évaluation des actifs optionnels à clauses complexes, imbriquées et multiples.

Des extensions de ce modèle ont été récemment proposés par KISHIMOTO[4] et BLISS & RONN[4].

Demarche pour l'évaluation pratique selon HO & LEE

D'une manière similaire à COS, ROSS & RUBINSTEIN4 pour les options sur actions la démarche consiste à :

- construire l'arbre d'évolution des taux dans le temps, c.a.d. décrire comment les aléas et le temps peuvent déformer la structure actuelle des taux d'intérêt,

---

[4] *cf références en fin d'article*

[5] *supposés stables sur la période d'estimation*

- définir les conditions limites à l'échéance et à chaque instant, pour lesquelles la valew de l'actif optionnel est connue,

- calculer récursivement jusqu'à obtenir la valeur présente de l'actif optionnel.

1 - CONSTRUIRE L'ARBRE D'EVOLUTION DES TAUX

1 - 1 Représenter les taux en STRUCTURES

Les instruments de taux ont une valeur dépendant de la structure des taux.

A partir des taux observés par échéance on peut construire une structure des taux zéro-coupons[6], à partir de laquelle on peut évaluer tout instrument simple. Par exemple la valeur d'une obligation in fine, sera obtenue en actualisant coupons et capital selon leurs taux zéro - coupon.

HO & LEE préfèrent raisonner sur les prix des zéro - coupons, plutôt que *sur* les taux actuariels, sachant qu'il y a correspondance univoque entre les uns et les autres.

> On appelle PRIX ZERO - COUPON P (t, T) le prix à l'instant t d'une obligation zéro - coupon unitaire de durée résiduelle T.
>
> La STRUCTURE DES PRIX ZERO - COUPON (P (t, T)) définit parfaitement la STRUCTURE DES TAUX ZERO - COUPON (r (t, T)) à l'instant t, en effet :
>
> $$r(t,T) = -\mathrm{LOGn}\,(P(t,T))/T \qquad (1)$$
>
> Par exemple la STRUCTURE DES PRIX ZERO - COUPON et la STRUCTURE DES TAUX ZERO - COUPON aujourd'hui sont (P (O, T)) et (r (O, T)).

HO & LEE posent en outre qu'à chaque date t il n'existera qu'un nombre fini d'états possibles de la nature pour parler comme les statisticiens, d'états de l'économie pour parler comme les économistes, ou de structures de taux pour parler comme les financiers. On peut montrer que "discrétiser" ainsi l'univers des possibles n'est pas réducteur dès lors que ce nombre fini peut être arbitrairement choisi.

Si l'état i se réalise en t la STRUCTURE DES PRIX ZERO - COUPON prévalente sera alors {Pi (t,T)}.

1 - 2 Déformer en binomial la STRUCTURE DES PRIX ZERO-COUPON

Evolution binomiale des états de la nature

Le processus d'évolution des états de la nature est supposé binomial : à partir de l'état i existant en t, on ne peut passer en t + δt que dans les états i[7] ou i + 1 :

---

[6] *le taux zéro - coupon est le taux actuariel correspondant à une obligation ne comportant qu'un flux (capital + intérêt) à son échéance.*

[7] *Les états i en t et i en t + δt ne sont pas identiques. Leur indice i ne représente que leur rang dans une classification des états possibles à la dare retenue.*

$$i < \begin{matrix} i+1 \\ i \end{matrix}$$

L'évolution des STRUCTURES DES PRIX **ZERO** - COUPON suit **celle des états** de la nature.

$$\{ P_i(t,T) \} < \begin{matrix} \{ P_{i+1}(t,T) \} \\ \{ P_i(t,T) \} \end{matrix} \qquad (2)$$

Si on **raisonne désormais** sur un prix **zéro** - coupon particulier au lieu d'une STRUCTURE DE TAUX ZERO - COUPON, sur 3 périodes **les évolutions possibles seront donc les suivantes :**

$$P_i(t,T+\delta t) < \begin{matrix} P_{i+1}(t+\delta t,T) < \begin{matrix} P_{i+2}(t+2\delta t,T-\delta t) < \begin{matrix} P_{i+3}(t+3\delta t,T-2\delta t) \\ P_{i+2}(t+3\delta t,T-2\delta t) \end{matrix} \\ P_{i+1}(t+2\delta t,T-\delta t) < \begin{matrix} P_{i+2}(t+3\delta t,T-2\delta t) \\ P_{i+1}(t+3\delta t,T-2\delta t) \end{matrix} \end{matrix} \\ P_i(t+\delta t,T) < \begin{matrix} P_{i+1}(t+2\delta t,T-\delta t) < \begin{matrix} P_{i+2}(t+3\delta t,T-2\delta t) \\ P_{i+1}(t+3\delta t,T-2\delta t) \end{matrix} \\ P_i(t+2\delta t,T-\delta t) < \begin{matrix} P_{i+1}(t+3\delta t,T-2\delta t) \\ P_i(t+3\delta t,T-2\delta t) \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

Evolution binomiale des STRUCTURES DES PRIX ZERO - COUPON

HO & LEE **posent** que le passage de **l'état** i *en* **l'état** t **aux états** i ou i + 1 *en* t + δt **s'accompagnera** de la **déformation** de la **STRUCTURE DES** PRIX vers le haut ou vers le bas via 2 **fonctions** de perturbation h (T) et h* (T) &pendant uniquement de la **durée résiduelle** T et non de **l'état i** ou de la date t :

$$P_{i+1}(t+\delta t,T) = \frac{P_i(t,T+\delta t)}{P_i(t,\delta t)} * h(T) \quad \text{avec } h(T)>1 \qquad (3)$$

$$P_i(t+\delta t,T) = \frac{P_i(t,T+\delta t)}{P_i(t,\delta t)} * h^*(T) \quad \text{avec } h^*(T)<1 \qquad (4)$$

On retrouve le prix **"terme/terme"** en certitude, **multiplié** par **une fonction légèrement supérieure** ou **inférieure à** 1, ou **si** *on* **préfère** *on* retrouve le taux "terme / terme" en certitude. accru d'une **déformation** vers le bas ou vers le haut.

Cela signifie que les taux obtenus pour chaque **état** i en date t sont les taux "terme/terme" **obtenus directement à partir** de la structure **actuelle** des taux, **accrus d'un biais représentant les** aléas **successifs** ayant conduit **l'état** 0 *en* t = 0 **à devenir** I'ttat **i** *en* t.

Les **hypothèses essentielles** du **modèle** de HO & **LEE** (processus **d'évolution** binomial **d'états** de la nature, existence de 2 **fonctions** de **perturbation** fonction **uniquement** de T **durée résiduelle) sont** donc **exposées** ci - dessus.

Sous ces 2 hypothèses **simples**[8] on **peut identifier** par une **condition d'arbitrage** et **une** condition de **neutralité les** 2 **fonctions** de **perturbation.**

---

[8] *Auxquelles s'ajoutent les hypothèses classiques : marché sans frais de transaction ou d'information, titres indéfiniment divisibles.*

1- 3 Identifier les paramètres d'évolution de l'arbre des taux

Les conditions **d'arbitrage** et de **neutralité** sont issues du **processus binomial.**

Condition d'arbitrage

On peut montrer[9] par arbitrage que **les fonctions** de perturbations doivent **satisfaire** les relations **suivantes** :

$$\pi\ h(T) + (1-\pi)\ h^*(T) = 1 \qquad (5)$$

oil π est **appelé probabilité binomiale** implicite, **Cette dernière formule signifie que** la valeur d'un zéro - coupon en **date** t vaut la valeur **actualisée** de **l'espérance** en **probabilité binomiale implicite π** de la **valeur** du zéro - **coupon** en date **suivante** $t + \delta t$.

$$Pi(t,T) = [\pi * P_{i+1}(t+\delta t, T-\delta t) + (1-\pi) * P_i(t+\delta t, T-\delta t)] * P_i(t,\delta t) \qquad (5\ bis)$$

Condition de neutralité

Le **processus** binomial **exige** de **pouvoir atteindre** l'dtat $i + 1$ en $t + \delta t$ aussi bien de **l'état** i **que** de **l'état i** + 1 **existant** en t.

2 **chemins** sont **possibles** pour **aller** de l'dtat **i** en **à l'état i + 1 en t + 2** :

$$i,t \dashrightarrow i+1,t+\delta t \dashrightarrow i+1,t+2\delta t$$

ou

$$i,t \dashrightarrow i,t+\delta t \dashrightarrow i+1,t+2\delta t$$

En **utilisant les relations** (3) et (4), on trouve **alors**

$$h(\delta t) * h^*(T+\delta t) * h(T) = h^*(\delta t) * h(T+\delta t) * h^*(T)$$

En **utilisant** la relation (5), on en **déduit finalement après** quelques **calculs** que

$$h(T) = 1 / [\pi + (1-\pi) * \alpha^T] \qquad (6)$$

$$h^*(T) = \alpha_T / [\pi + (1-\pi) * \alpha^T] \qquad (7)$$

oil μ et a **sont des constantes** qui **suffisent à définir parfaitement** le **modèle** :

- μ est une constante comprise entre **0** et 1, **égale** au **poids** de la **baisse des** pix sur l'écart **entre les** perturbations :

  $$(\pi = [1 - h(\delta t)] / [h(\delta t) - h^*(\delta t)]$$

  Elle est donc **fonction** de la tendance des taux **à terme** par **rapport à** leur **valeur** actuelle. μ est **généralement** proche de **0,5.**

- a est une **constante apparue** dans le **calcul comprise entre 0** et 1, **égale** au rapport **des perturbations** h **(δt)** / h* **(δt).** Elle peut donc **être regardée** comme **indicateur** de la **volatilité** des taux.

Comme les perturbations h **(T)** et h* **(T)** sont **indépendantes des états** i, et de la date t, le **processus** n'est pas **borné** : des taux **négatifs** ou **très élevés** sont théoriquement **possibles**

[9] *Voir en ANNEXE 1*

pour des échéances longues, leur apparition en pratique étant limitée par le fait que μ est proche de 0,5 et a proche de 1.

1 - 4 Construire l'arbre d'évolution de la STRUCTURE DES PRIX ZERO - COUPON

Connaissant désormais les fonctions de perturbation il est aisé de construire de "branche en branche" l'arbre d'évolution des PRIX des zéro - coupons.

On peut alors évaluer en chaque date t et état i la valeur de tout actif à base de flux fixes par simple actualisation.

HO & LEE suggèrent que l'estimation des paramètres π et a soit réalisée implicitement via les prix de divers[10] actifs optionnels. Toutefois rien n'empêche le praticien d'utiliser ses anticipations ou des statistiques historiques.

L'évolution de la STRUCTURE DES TAUX ZERO - COUPON correspondante est analysée en ANNEXE 2.

2 - DEFINIR LES CONDITIONS LIMITES DES ACTIFS OPTIONNELS

Un actif optiomel se définit toujours par des "conditions limites" pour lesquelles sa valeur est connue.

Par example une option de taux aura pour condition limite sa valeur à l'échéance, c.à.d. soit zéro, soit le différentiel d'intérêts. Une option sur obligation à l'américaine pourra être exercée à tout instant. Elle vaudra au moins zéro, et au moins sa valeur si on l'exerce immédiatement (valeur intrinsèque).

Il faut donc poser les conditions limites qui prévaudront à chaque instant t et dans chaque état i de la nature.

Cela pourra nécessiter le calcul d'évolution du prix d'un actif sous - jacent : par exemple dans le cas d'une option à l'américaine sur une obligation on déterminera l'arbre d'évolution de celle - ci en fonction de celui de la STRUCTURE DES PRIX ZERO-COUPON.

La connaissance des conditions limites et donc de la valeur de l'actif à certaines dates et états i (sur les branches de l'arbre d'évolution des taux) permettra de calculer de proche en proche et récursivement la valeur de l'actif optionnel.

3 - CALCULER RECURSIVEMENT LA VALEUR DE L'ACTIF OPTIONNEL

Evidemment on souhaiterait pouvoir construire à partir de la valeur théorique actuelle de l'actif optionnel l'arbre d'évolution de celle - ci. Mais là est justement le problème : on ne connait pas cette valeur, on la cherche.

---

10 En effet les paramètres π et α son théoriquement liés aux évolutions de STRUCTURE DES TAUX ZERO - COUPON et non spécifiques aux actifs conditionnels.

Inversement on connait la valeur de l'actif optionnel dans les cas limites, notamment à l'échéance.

On peut montrer par arbitrage que connaissant la valeur d'un actif en fin de période on peut trouver alors sa valeur en début de période.

Il sera alors aisé de généraliser le calcul récursif à de nombreuses périodes et d'utiliser alors la connaissance de la valeur de l'actif dans les conditions limites.

Raisonnement par arbitrage[11] sur une période

Soit C_i (t), la valeur de l'actif optionnel en t et en état i.
Il vaudra en date t + δt soit C_{i+1} (t + δt), soit C_i (t + δt).

Construisons et étudions le portefeuille d'arbitrage suivant en t et t + δt

$$W_i(t) = C_i(t) - w\,P_i(t,T) < \begin{matrix} C_{i+1}(t+\delta t) - w\,P_{i+1}t+\delta t,T-1) \\ C_i(t+\delta t) - w\,P_i(t+\delta t,T-\delta t) \end{matrix}$$

Il suffit de choisir w de manière à égaler les 2 valeurs possibles du portefeuille pour obtenir un portefeuille sans risque.

$$w = [C_{i+1}(t+\delta t) - C_i(t+\delta t)]/[\,P_{i+1}(t+\delta t,T-\delta t) - P_i(t+\delta t,T-\delta t)]$$

$$W_i(t) = W_i(t+\delta t)^*\,P_i(t,\delta t)$$

On en déduit donc

$$C_i(t) = w\,P_i(t,T) + [C_i(t+\delta t) - w\,P_i(t+\delta t,T-\delta t)]/P_i(t,\delta t)$$

et après réaménagement

$$\boxed{C_i(t) = [\,\pi^*C_{i+1}(t+\delta t) + (1-\pi)^*C_i(t+\delta t)\,]\;/\;P_i(t,\delta t)}$$

La valeur de l'actif optionnel en t est donc parfaitement déterminée par ses 2 valeurs possibles en t + δt.

Rajouter des conditions limites ou des flux intermédiaires sur l'actif optionnel ne modifie pas le raisonnement.

Raisonnement par arbitrage sur plusieurs périodes

La généralisation à de multiples périodes est aisée. La formule très générale mais technique permettant d'obtenir la valeur de l'actif optionnel, en chaque instant t et état de la nature et dans le respect des conditions limites, est proposée ci - dessous.

Soit un actif comportant des clauses optionnelles en date t, sa valeur présente peut être calculée récursivement en partant des conditions limites de la manière suivante :

C. (.), valeur de l'actif optionnel
X. (.), valeur des flux intermédiaires (ex : coupon d'obligation)

[11] *Comme dans le modèle de COX, ROSS et RUBINSTEIN, mais dans le modèle de HO & Lee le taux sur la période dépend du chemin parcouru.*

π, probabilité **binomiale implicite**

$l_i(.)$ limite **inférieure** de l'actif **optionnel**

$u_i(.)$ limite **supérieure** de l'actif **optionnel**

$f(.)$ limite **à l'échéance** de l'actif **optionnel**

$$C_i(t) = f(i) \qquad \text{conditions limites A l'échéance } t \text{ de l'option}$$

$$C_i(t) = \mathrm{MAX} \left| l_i(t);\ \mathrm{MIN} \left| u_i(t);\ \{\pi^*[C_{i+1}(t+\delta t)+X_{i+1}(t+\delta t)]+(1-\pi)^*[C_i(t+\delta t)+X_i(t+\delta t)\}/P_i(t,\delta t) \right.\right.$$

$$C_o(0) = \mathrm{MAX} \left| l_o(0);\ \mathrm{MIN}(u_o(0);\ \{\pi^*[C_1(\delta t)+X_1(\delta t)]+(1-\pi)^*[C_o(\delta t)+X_o(\delta t)\}/P_o(0,\delta t)) \right.$$

$$\text{valeur présente de l'option}$$

On **pourrait** verifier qu'en prenant pour valeur limite 1, valeur de **remboursement** on **retrouve** bien la valeur **présente d'une** obligation **zéro** - coupon.

4 - DOMAINES D'APPLICATION

Ce modble, moyennant parfois quelques **aménagements, permet d'évaluer** les **principaux actifs optionnels suivants** :

Marché monétaire

options de **taux d'intérêt**
caps, floors et collars

Marché obligataire

options sur obligations
options sur futures de taux
options de **remboursement anticipé**
obligations à plancher et **plafond**
obligations **convertibles**
obligations **échangeables**
warrants sur obligations

Par **exemple** une obligation à **taux** variable **à plancher s'analyse comme** une obligation à taux variable pure, associée à un floor taux **variable/taux fixe évaluable** par le **modèle** de HO **& LEE.**

Une obligation **à fenêtres** de **remboursement est** aisément calculable en intégrant **dans** l'arbre les options successives de **l'émetteur** de rembourser par anticipation son emission

Bien que comportant certains défauts du à sa simplicité (arbre des taux non borné, constance de la volatilité dans le temps) le modèle de HO & LEE offre une alternative raisonnable aux modbles endogbnes souvent séduisants théoriquement mais généralement impraticables à cause de la multiplicité et de l'instabilité des paramètres à estimer.

Etant un modèle binomial il offre la souplesse idéale pour l'évaluation des actifs optionnels à clauses complexes, imbriquées et multiples, et mérite donc bien l'investissement informatique à sa mise en oeuvre.

ANNEXE 1

Condition d'arbitrage

Soit en date t et état i un portefeuille d'arbitrage W constitué d'une obligation &ro-coupon de durée résidielle T et de w obligations zéro - coupon de durée résiduelle t :

$$W_i(t) = P_i(t,T) + \infty * P_i(t,t)$$

à l'instant t + δt ce portefeuille prendra pour valeur

$$W_i(t+\delta t) = P_i(t+\delta t, T-\delta t) + \infty * P_i(t+\delta t, t-\delta t)$$

ou

$$W_{i+1}(t+\delta t) = P_{i+1}(t+\delta t, T-1) + \infty * P_{i+\delta t}(t+\delta t, t-\delta t)$$

En choisissant "habilement" ∞ pour que le portefeuille W ait la même valeur dans les 2 états en t + δt, on a constitué un portefeuille sans risque sur la période comprise entre n et n + δt qui doit donc rapporter le rendement sans risque sur la période, soit

$$1/P_i(t,\delta t)$$

En remplaçant P. (...) par sa valeur donnée par les equations (3) et (4) dans les équations ci - dessous,

$$W_i(t+\delta t) = W_{i+1}(t+\delta t) = W_i(t)/P_i(t,\delta t)$$

on trouve la relation suivante pour tous t et T

$$\frac{1-h^*(t-\delta t)}{h(t-\delta t)-h^*(t-\delta t)} = \frac{1-h^*(T-\delta t)}{h(T-\delta t)-h^*(T-\delta t)} = \pi \text{ avec } 1 > \pi > 0$$

On en déduit

$$\boxed{\pi\, h(T) + (1-\pi)\, h_*(T) = 1 \qquad (5)}$$

oil π est appelé probabilité binomiale implicite,

$$\boxed{Pi(t,T) = [\pi * P_{i+1}(t+\delta t, T-\delta t) + (1-\pi) * P_i(t+\delta t, T-\delta t)] * P_i(t,\delta t)}$$

ANNEXE 2

STRUCTURES ZERO - COUPON de PRIX et de TAUX
Correspondance d'évolution

La STRUCTURE DES TAUX ZERO - COUPON se déduit de la STRUCTURE DES PRIX ZERO - COUPON de la manière suivante :

$$r(t,T) = -LOGe\ (P(t,T))/T \qquad (8)$$

Il suffit donc de construire l'arbre d'évolution binomiale de la STRUCTURE DES PRIX ZERO - COUPON pour en déduire celui de la STRUCTURE DES TAUX ZERO-COUPON.

Même si elle n'est pas indispensable pour l'évaluation, il est intéressant de la regarder pour bien comprendre le modèle de HO & LEE.

En utilisant les relations (3), (4), (6), (7) on trouve que le taux à terme court terme ($T=\delta t$) prendra pour valeur en état i :

$$\boxed{r_i(t,\delta t) = LOGn\ [P_0(0,t)\ /\ P_0(0,t+\delta t)] + LOGn\ [\pi * \alpha^{-t} + (1-\pi)] + i * LOGn\ [\alpha]}$$

Si on pose que l'apparition des perturbations suit une loi binomiale réelle de probabilité réelle[12] p on peut trouver la valeur espérée du taux terme/terme sur une période :

$$E[r_i(t,\delta t)] = LOGn\ [P_0(0,t)\ /\ P_0(0,t+\delta t)] + LOGn[\pi * \alpha^{-(1-\pi)*t} + (1-\pi)] + p*t* LOGn[\alpha]$$

soit don: le taux terme/terme en certitude, inclus dans la STRUCTURE DES TAUX ZERO - COUPON actuelle, diminué d'un biais lié à la tendance (fonction de n), à la volatilité des taux (fonction de a) et à l'existence d'une prime de risque (fonction de p -π).

REPERTOIRE

6, DELTA est associé à t : St représente le pas discret du temps.

a , ALPHA est une constante apparue dans le calcul comprise entre 0 et 1, Cgale au rapport des perturbations h (δt) / h* (St). Elle peut donc être regardée comme indicateur de la volatilité des taux.

π, PI est une constante comprise entre 0 et 1, égale au poids de la baisse des prix sur l'écart entre les perturbations.

h () et h* () sont les fonctions de perturbations.

LOGe () est le logarithme népérien.

* dans une formule signifie "multiplié par".

---

[12] *et non la probabilité binomiale implicite π, par un raisonnement identique à celui de COX RUBINSTEIN pour l'évaluation des options sur actions. Ces 2 probabilités (p, π) sont identiques en l'absence de prime de risque de taux, c.à.d. en hypothèse des anticipations locales.*

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

F. BLACK & M. SCHOLES 'The valuation of option Contracts and a test of market efficiency" - JOURNAL OF FINANCE - **MAY 1972**

R. BLISS & E. RONN "Arbitrage - based estimation of **nonstationarity** shifts in the term structure of interest rates" - JOURNAL OF FINANCE - VOL **SLIV,** n°3 - JULY 1989

M. BRENNAN & E. SCHWARZ "An **equilibrium model** of bond pricing and a test of market efficiency" - JOURNAL OF FINANCIAL AND QUANTITATIVE ANALYSIS - 17 - **SEPTEMBER** 1982

J. COX, J. **INGERSOLL** & S. ROSS "A theory of **the** term structure of interest rates" - ECONOMETRICA - 53 - **MARCH** 1985

J. COX, S. ROSS & M. RUBINSTEIN "Option pricing : A simplified approach - FINANCIAL ECONOMICS 7 - SEPTEMBER 1979

HO & LEE 'Term structure Movements and pricing interest rate **contingent** claims" - JOURNAL OF FINANCE - VOL XLL **N°5** - DECEMBER 1986

N. **KISHIMOTO** "Pricing contingent claims under interest rate and asset price risk" - JOURNAL OF FINANCE - VOL XLIV **N°13** - JULY 1989

SCHAEFER & SCHWARZ "Time dependent variance and the pricing of bond **options"** - JOURNAL OF FINANCE - VOL XLII **N°5** - DECEMBER 1987