

CONTRIBUTION N° 44

THE CAC 40 CONTRACT ON THE MATIF

PAR / BY

B. BRICHEUX, C. GUILLAUMOT, T. KHARROUBI, J. WERREN

France

LE CONTRAT
CAC 40
DU MATIF

ABSTRACT

This paper analyses the situation of the CAC 40 Index future contract **after** one year of trading on the **MATIF**.

It appears that the daily volume (about 2.000 contracts **per** day) is largely concentrated in the nearest maturity contracts. The market activity, compared with the underlying cash market, the "Règlement Mensuel" (RM), is not insignificant : the ratio between the amounts traded on both the future contract and the RM market is about 30%.

Comparison between the actual and fair prices of the CAC 40 future contract is **sometimes** showing **high** differences (up to 40 index points). **As** a matter of fact, cash-futures arbitrages are **difficult** to realize because of the following :

- the lack of liquidity for the farther maturities ;
- the necessity of buying or selling simultaneously 40 stocks ;
- the transactional costs which are inherent in the operation.

Other considerations, linked to the Parisian market specificities, can explain the frequent reverse cash and carry situation :

- the difficulty to borrow stocks ;
- the phenomenon of "déport" on the RM.

Devising a basket of a limited number of stocks to replicate the CAC 40 Index aims to make **speculating**, arbitrage and hedging easier. First we determine the **best** basket of stocks by a **method** of **stepwise** regression ; then we use the model obtained to forecast the values of the CAC 40 Index as a function of the stock prices. Finally we compare the profits made on cash-futures **arbitrage** with both the 40 stocks and **the** basket.

**BERNARD BRICHEUX, CLAIRE CUILLAUMOT,
TAOUFIK KHARROUBI, JACQUES WERREN**

ABSTRACT

This paper analyses the situation of the **CAC 40** Index future contract after one year of trading on the **MATIF**.

It appears that the daily volume (about 2.000 contracts per day) is largely **concentrated** in the nearest maturity contracts. **The** market activity, **compared** with the underlying cash market, the "**Règlement Mensuel**" (RM), is not insignificant : the ratio between the amounts traded on both **the** future **contract** and the RM market is about 30%.

Comparison between the actual and fair prices of the **CAC 40** future contract is sometimes showing high differences (up to 40 index points). As a matter of fact, **cash-futures** arbitrages are difficult to realize because of **the** following :

- the lack of liquidity for the farther maturities ;
- the necessity of buying or selling simultaneously 40 stocks ;
- the transactional costs which are inherent in **the** operation.

Other considerations, linked to **the** Parisian market specificities, can explain the frequent reverse cash and carry situation :

- the difficulty to borrow stocks ;
- the phenomenon of "**déport**" on the RM.

Devising a basket of a limited number of **stocks** to replicate the **CAC 40** Index aims to make **speculating**, arbitrage and hedging easier. First we determine **the** best basket of stocks by a method of **stepwise** regression ; then we use **the** model **obtained** to forecast the values of **the** **CAC 40** Index as a function of the stock prices. Finally we compare the profits made on cash-futures arbitrage with both the 40 stocks and the basket.

RESUME

Cette étude établit le bilan d'activité du contrat à terme sur indice CAC 40, après une année de négociation sur le MATIF.

Le volume de l'échéance la plus proche représente 75 % du volume total (2 000 contrats par jour en moyenne). L'activité du marché à terme sur indice équivaut (en capitaux échangés quotidiennement) à 30 % de celle du marché sous-jacent des actions, le marché à Règlement Mensuel (RM).

La comparaison du cours théorique et du cours effectif du contrat à terme met en lumière des écarts parfois élevés (jusqu'à 40 points d'indice). Le manque de liquidité sur les échéances lointaines du contrat, les frais sur le marché des actions et la nécessité d'acheter ou vendre simultanément 40 valeurs constituent une première série d'entraves à la réalisation d'arbitrages comptant-terme. Par ailleurs, certaines caractéristiques du fonctionnement du marché parisien permettent d'expliquer la situation très fréquente de reverse cash and carry :

- la difficulté d'emprunter des titres ;
- le phénomène de déport sur le RM.

La détermination d'un portefeuille optimal de valeurs répliquant l'indice CAC 40 vise à faciliter les opérations de spéculation, de couverture et d'arbitrage. L'utilisation d'un tel portefeuille en arbitrage comptant-terme sera examinée.

A posteriori, une réplification fidèle de l'indice (avec un écart maximal de l'ordre de 1 %) paraît possible sur une période de six mois avec un sous-panier de 8 valeurs. Cependant, lors de l'utilisation en prédiction, les écarts maximaux sur six mois entre valeurs prédites et réelles atteignent 3 %. Les résultats des arbitrages comptant-terme effectués à l'aide d'un sous-panier apparaissent très sensibles aux erreurs de prédiction de l'indice.

INTRODUCTION

I. LE CONTRAT FUTURE CAC 40 : BILAN D'UNE ANNEE DE NEGOCIATION**1. Le marché**2. Les **intervenants****II. VALORISATION DU CONTRAT FUTURE CAC 40 ET OPERATIONS D'ARBITRAGE****1. Modèle simplifié**2. **Modèle** tenant compte des marges

3. Application

4. Arbitrage terme-terme

III. RECHERCHE D'UN PORTEFEUILLE OPTIMAL POUR REPLIQUER L'INDICE CAC 40**1. Détermination du portefeuille optimal**2. Utilisation du portefeuille optimal pour repliquer **l'indice CAC 40**

3. Utilisation du portefeuille optimal en arbitrage

CONCLUSION

INTRODUCTION

Cette **étude** est **consacrée** au **contrat** à terme **sur** indice CAC 40 du MATIF. Le volume quotidien (environ 2.000 **contrats**) demeure modeste en **comparaison** des volumes **négociés** sur les marchés du S&P 500 (*Chicago* Mercantile Exchange) ou du Nikkei 225 (Osaka Securities Exchange) avec **respectivement** 50.000 et 20.000 **contrats** par **jour** en moyennes. Cette comparaison n'a de **sens** que **si** le volume est rapporté à la capitalisation **boursière** du marché au comptant **sous-jacent** :

indice	volume moyen quotidien	ratio d'activité
FTSE 100	3 800	0.47
CAC 40	2 000	0.52
TOPIX	15 000	1.32
NIKKEI 225	20 000	1.51
S&P 500	50 000	3.80

$$* 1000 \times \frac{\text{montant des capitaux échangés quotidiennement sur le contrat à terme}}{\text{capitalisation boursière du marché sous-jacent}}$$

La **comparaison** de **ces** ratios d'activité relative **l'activité** du contrat à terme CAC 40 à la taille du **marché parisien** (le ratio de volume par rapport au S&P 500 passe de 1/25 à 1/8 en **pondérant** par la **capitalisation boursière**).

La **première partie** de l'étude **dresse** un **bilan d'activité** un an après l'ouverture du **marché** (9 novembre 1988) : **répartition** des volumes, en relation **notamment** avec le **marché des actions** ; **évolution** des **positions ouvertes** ; livraison ; utilisateurs du contrat.

La **seconde partie** est **consacrée** à l'étude des **écarts observés** entre **cours théorique** et **cours réel** du contrat à terme, à **partir des** relations d'arbitrage **comptant-terme** et **terme-terme**. La situation de reverse cash and **carry** apparaît le plus **fréquemment**. Elle **résulte** largement des **spécificités** du Règlement Mensuel de la Bourse de Paris, qui sont **discutées**.

La **troisième partie** examine les conditions de **détermination** d'un panier **d'actions** permettant de **réaliser** des **opérations** d'arbitrage comptant-terme ou de couvrir un **portefeuille** à l'aide d'un nombre **réduit** de valeurs. La recherche d'un portefeuille optimal de 8 valeurs **répliquant** l'indice s'effectue par une **méthode** de régression **linéaire**. Les **résultats des arbitrages effectués** avec un tel **portefeuille** et avec le panier des 40 valeurs **sont ensuite comparés**.

I. LE CONTRAT FUTURE CAC 40 : BILAN D'UNE ANNEE DE NEGOCIATION

Le rapport entre les volumes négociés (valorisés en francs) sur le contrat CAC 40 et sur le marché à règlement mensuel, atteint environ 30 %.

	Transactions moyennes quotidiennes *		Ratio (%)
	CAC	RM	
Janvier	371	2691	14
Février	628	2163	30
Mars	625	2163	40
Avril	645	1951	33
Mai	669	1913	35
Juin	802	2245	36
Juillet	598	1824	33
Août	649	2382	27

* en millions de francs

Source : MATIF S.A., SBF

Comparé au 100 % observé sur le marché du S&P 500 de Chicago rapporté au volume des transactions du marché des actions de New-York, ce ratio apparaît faible, et laisse à penser qu'il existe encore un important potentiel de développement.

Cette partie apporte des éléments statistiques sur ce marché et ses interwewants.

1. Le marché

Fin septembre 1989, 418 592 contrats, toutes échéances confondues, ont été échangés depuis le lancement du contrat FUTURE CAC 40.

Le volume négocié en francs sur les marchés dérivés (contrat future du MATIF et option sur indice CAC 40 traité sur le MONEP) représente ces derniers mois plus de 50 % des transactions sur le RM.

	VOLUME MOYEN Future CAC 40 (MATIF)	QUOTIDIEN Options (MONEP)
Janvier	1093	1934
Février	2004	3031
Mars	1938	2555
Avril	1938	3112
Mai	1963	2792
Juin	2318	2514
Juillet	1688	2812
Août	1758	3019
Septembre	2498	3241

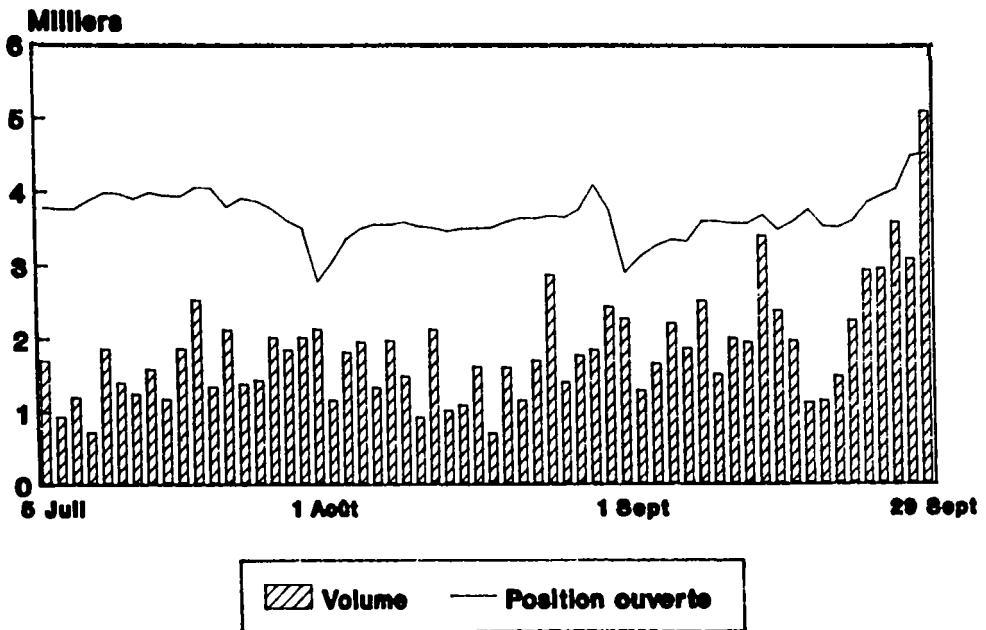
Source : MATIF S.A., SMC

Une étude détaillée des volumes et positions ouvertes sur le troisième trimestre 1989 permet de définir les échéances les plus liquides et de comprendre le comportement des intervenants à la livraison.

Le graphique ci-dessous présente l'évolution du volume et de la position ouverte (toutes échéances confondues). En filtrant les fluctuations erratiques du volume total, une tendance à la hausse apparaît.

Mis à part des chutes périodiques dues à la clôture d'une échéance, la position de place paraît stable.

EVOLUTION DU VOLUME ET DE LA POSITION OUVERTE TOTAUX (TRANSACTIONS - CRIEE)



Source : MATIF S.A. Département Recherche, Développement et Formation.

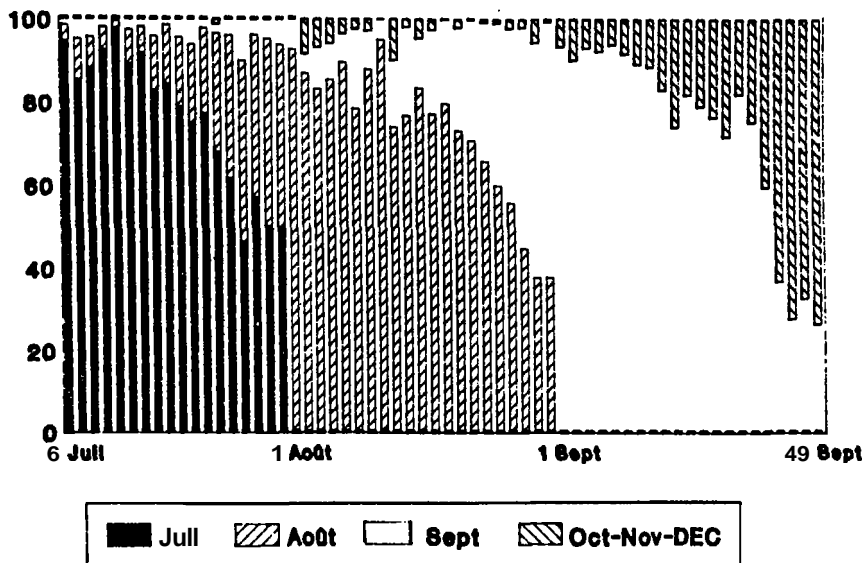
La répartition du volume par échéance (figure ci-dessous) montre que l'échéance rapprochée est la plus liquide. Elle représente à elle seule plus de 70 % du volume négocié.

mois	volume moyen quotidien de l' échéance du mois en cours	% du volume total	position ouverte moyenne quotidienne de l'échéance du mois en cours	% de la position ouverte totale
Juillet	1142 (347)	76.77	1856 (463)	48.03
Août	1160 (381)	73.29	2019 (427)	57.87
Septembre	1542 (466)	72.79	2151 (545)	60.79

* Les écarts-type figurent entre parenthèses

Source : MATIF S.A.

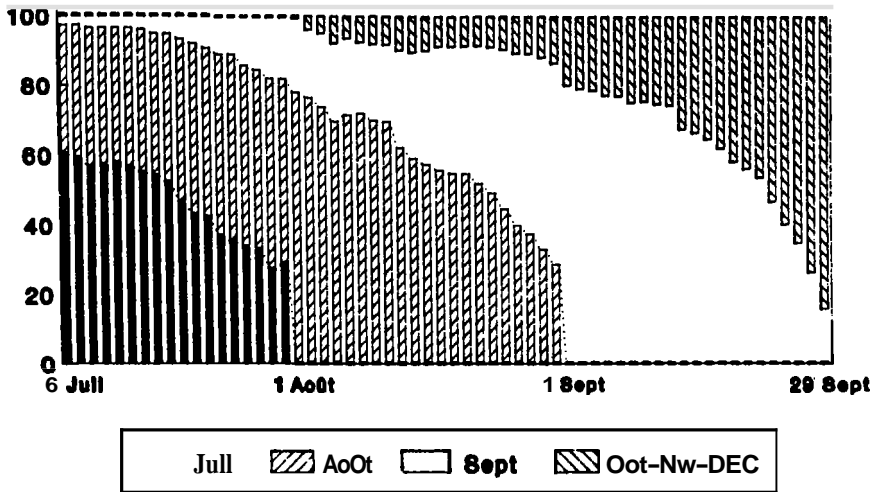
REPARTITION DU VOLUME TOTAL PAR ECHEANCE (TRANSACTIONS A LA CRIEE)



Source : MATIF S.A. Département Recherche, Développement et Formation

Le graphique "répartition de la position ouverte par échéance" montre qu'à la clôture d'une échéance, un grand nombre de positions ouvertes demeurent. Cela signifie que les opérateurs vont à la livraison "cash". En effet, à l'échéance, le contrat à terme CAC 40 ne donne pas lieu à la livraison des titres composant l'indice, mais à un règlement en espèces. Les contrats non dénoués avant l'échéance sont liquidés automatiquement sur la base du cours de liquidation et soldés par le règlement de l'ultime marge.

REPARTITION DE LA POSITION OUVERTE PAR ECHEANCE (TRANSACTIONS A LA CRIEE)



Source : MATIF S.A. Département Recherche, Développement et Formation

L'indicateur de roll-over conforte cette assertion (figures suivantes). Ce dernier ($I(t)$) est défini comme le rapport de variation de la position ouverte sur une échéance donnée et de la variation de la position ouverte totale :

$$I(t) = \frac{poe(t) - poe(t-1)}{po(t) - po(t-1)}$$

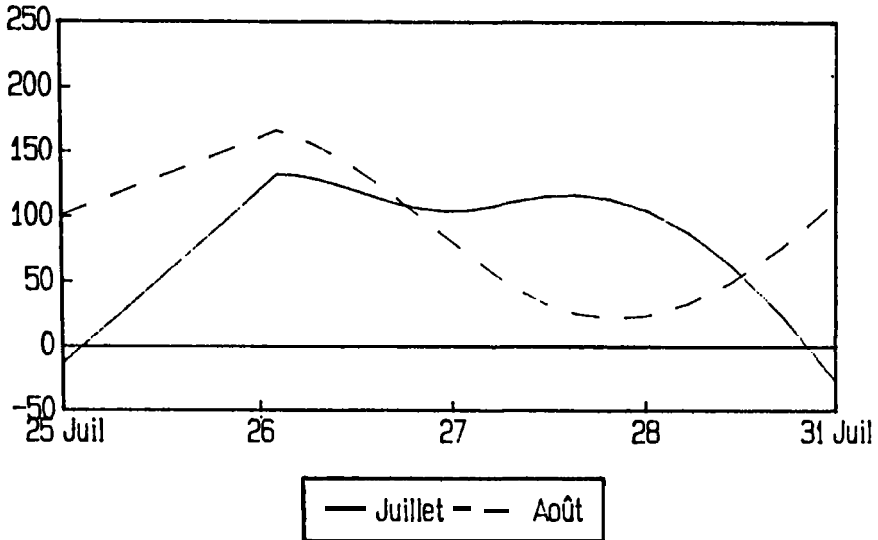
avec : $po(t)$ = position ouverte totale à la date t

$poe(t)$ = position ouverte sur une échéance donnée en t

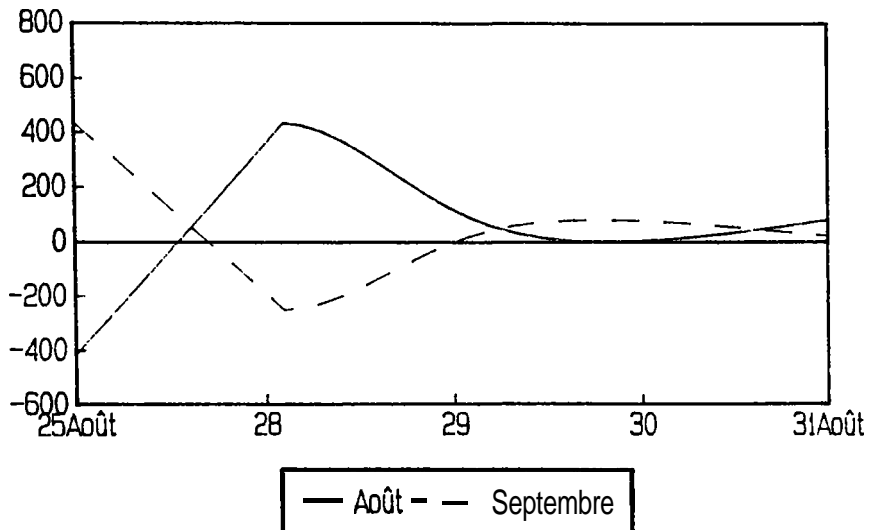
Dans le cas où des traders actifs sur ce contrat reporteraient leurs positions d'une échéance à une autre, deux tendances opposées dans l'évolution jointe de ces ratios devraient apparaître sur le graphe.

Au cours de la dernière semaine de cotation de l'échéance juillet (respectivement août), la représentation graphique des "indicateurs de roll-over" montre que les positions ouvertes sur l'échéance juillet (respectivement août) ne sont pas reportées sur l'échéance août (respectivement septembre). Les opérateurs vont donc à la livraison.

INDICATEUR DE ROLL-OVER
échéances juillet-août



INDICATEUR DE ROLL-OVER
échéances août-septembre



Source : MATIF S.A. Département Recherche, Développement et Formation

2. Les intervenants

De janvier à septembre 89, le volume négocié se répartit entre les différentes catégories de négociateurs et d'adhérents de la façon suivante :

	pourcentage moyen de l'activité	kart-type
Categories de négociateurs		
. ACG (Adhérents compensateurs généraux)	14,4 %	2,2 %
. ACI (Adhérents compensateurs individuels)	80,4 %	3,4 %
. NEC (Négociateurs courtiers)	2,7 %	1,2 %
. NIP (Négociateurs individuels professionnels)	2,5 %	2,6 %
	<u>100,0 %</u>	
Categories d'adhérents		
. Sociétés de bourse	46,4 %	9,0 %
. Etablissements soumis à la loi bancaire	21,4 %	8,2 %
. Groupements d'intérêt économique	32,2 %	4,4 %
	<u>100,0 %</u>	

Source : MATIF S.A.

La part d'activité des NIP a nettement progressé depuis le début de l'année 89 puisqu'elle atteint 7 % en septembre 89.

9 adhérents seulement réalisent les 2/3 du volume total.

L'examen de la répartition des positions ouvertes montre l'importance de la part de marché détenue par la clientèle finale. Au 30 juin 89, la ventilation des positions ouvertes s'effectue ainsi :

	positions ouvertes
Operations propres des compensateurs et négociateurs	12,0 %
Opérations de la clientele	
. Intermédiaires financiers	51,6 %
. Sociétés non financières	2,7 %
. O.P.C.V.M.	19,3 %
. Particuliers	4,3 %
. Non-residents	10,1 %
soit	<u>88,0 %</u>

Source : MATIF S.A.

II. VALORISATION DU CONTRAT FUTURE CAC 40 ET OPERATIONS D'ARBITRAGE

Un **modèle** traditionnel d'arbitrage comptant-terme **permet l'évaluation** du prix **théorique d'un** contrat à terme.

Le marché comptant **sous-jacent** à son règlement mensuel pose des **difficultés** de valorisation.

Cette **partie** porte sur des **modèles d'évaluation** du contrat, tenant compte des **spécificités** du **marché** à son règlement mensuel (**les règlements différés**).

1. Modèle simplifié (MODELE 1)

L'**opération comptant-terme** consiste à **acheter** au comptant **les actions** qui composent l'**indice CAC 40** et à **vendre** simultanément un contrat à **terme**.

Les dépôts de garantie relatifs aux comptant et au terme ne seront pas pris en **considération** : pouvant être effectués en Bons du **Trésor** ou en **espèces rémunérées**, leur **coût est considéré nul**.

Les frais de transactions seront **négligés**.

On **supposera l'échéancier** des flux financiers suivant :

OPERATION	FLUX	DATE DE REGLEMENT
Achat au comptant	- I (t)	t+c (date de règlement au comptant)
Vente à terme .	+ F (t)	t+h (date d' échéance du contrat)
Dividende éventuel	+ D (t)	t+d (date d' encaissement du dividende)

En t, **début** de l'opération, D (t) est **inconnu** mais nous **supposons** que l'**opérateur** a des anticipations **parfaites** sur les versements des dividendes. Le dividende D (t) est **évalué** en points d'indice.

A l'**échéance**, le **cours** de liquidation du contrat à terme **CAC 40** **correspond** à la **valeur** comptant de l'indice **CAC 40**, soit $F(t+h) = I(t+h)$. Pour respecter **cette** relation de convergence, il faut **donc vendre** $(1/(1+r_{t+h}^{t+h}))$ contrats à terme (t+h étant la date de **règlement** au comptant qui suit la date d'**échéance** du contrat).

(modèle 1)

$$(1/(1+r_{t+h}^{t+h})) \cdot F(t) = I(t) \cdot (1+r_{t+c}^{t+h}) - D(t) \cdot (1+r_{t+d}^{t+h}) \quad (\text{si } c < h)$$

$$(1/(1+r_{t+h}^{t+h})) \cdot F(t) = I(t) \cdot (1/(1+r_{t+h}^{t+c})) - D(t) \cdot (1+r_{t+d}^{t+h}) \quad (\text{sinon})$$

Avec r_{t+j}^{t+k}

taux futur anticipé entre t+j et t+k (déduit de la courbe des taux d'intérêt court terme)

Ce modèle de valorisation appelle certains commentaires :

- Il existe **une** incertitude **sur** les dates de **détachement** des dividendes et sur leurs **montants**.
- Les dividendes **sont supposés réinvestis** au taux futur **anticipé implicite** sur le marché **monétaire**.
- Le flux **dû** à la vente **à terme est supposé** unique **alors** que le **système d'appel** et de restitution de marges complique **l'échéancier** des flux financiers. **Comme nous le montrerons ultérieurement, cette hypothèse peut être formulée.**

2. Modèle tenant compte des marges (MODELE 2)

Le **modèle précédent** suppose que le flux de la vente **à terme est reçu à** la date **t+h**. En **fait**, à la fin de chaque **journée** de bourse, les positions de chaque **opérateur** sont fictivement **liquidées** au cours de compensation. Le **vendeur à terme devra**, à chaque fois que les cours de compensation montent (resp. **baissent**), **financer** (resp. **réinvestir**) les appels (resp. restitution) de marges au taux **futur anticipé**.

Les **sommes z1** dues aux marges seront **capitalisées** en **t+h**.

$$z1 = \sum_{x=1}^c (F(t+x) - F(t+x-1)) \cdot (1 + {}_{t+x}r_{t+h})$$

Le flux de la vente à terme devient **donc** : $F(t) + z2$

$$\text{avec } z2 = -F(t) + F(t+h)$$

Le **prix à terme théorique** peut donc s'écrire sous la forme :

(modèle 2)

$$(1/(1+{}_{t+h}r_{t+r})) \cdot F'(t) = I(t) \cdot (1+{}_{t+c}r_{t+h}) - D(t) \cdot (1+{}_{t+d}r_{t+h}) + z1 - z2 \text{ (si } c < h)$$

$$(1/(1+{}_{t+h}r_{t+r})) \cdot F'(t) = I(t) \cdot (1/(1+{}_{t+h}r_{t+c})) - D(t) \cdot (1+{}_{t+d}r_{t+h}) + z1 - z2 \text{ (sinon)}$$

$$\text{d'où : } F'(t) = F(t) + z1 - z2$$

En anticipation **parfaite**, **z1** et **z2** sont **connus**. On **pourra** les **considérer** comme **exogènes**.

3. Application

Les **chroniques** $F(\cdot)$ et $F'(\cdot)$ ont été **calculées** sur les **échéances** MARS et JUIN 1989.

La **série** $I(\cdot)$ correspond aux cotations de l'**indice** CAC 40 à 17 heures sur le marché **comptant** (source SBF).

Les **cours à terme** correspondent au **cours** de compensation du **contrat FUTURE** CAC 40

(source MATIF S.A.).

Les dates de détachement des dividendes et leurs montants sont connus ex-post.

Le taux futur anticipé est déterminé à partir des taux au comptant sur le marché monétaire en utilisant la relation :

$$(1 + r_j \cdot (j-i)/360) = (1+r_j) \cdot j/360 / (1+r_i \cdot i/360)$$

avec r_j = taux futur anticipé entre i et j

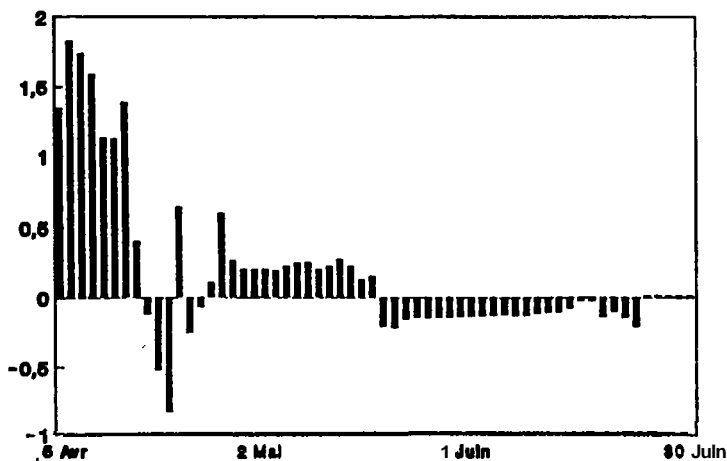
r_j = taux comptant du marché monétaire de maturité j

Les taux comptant du marché monétaire pour des périodes brisées sont calculés par interpolation linéaire à partir du TMP (source Banque de France) et des taux PIBOR 1, 2.3 et 6 mois (source AFB).

La comparaison des cours réels et théoriques permet de définir les opportunités d'arbitrage. Si le **corn réel** est audessus (resp. au-dessous) du **corn théorique**, une opération d'arbitrage cash & carry (rep. reverse cash & carry) peut être nouée.

En cas de chronique des **corn** à terme futurs inconnue, dans la mesure où la différence entre le modèle simplifié et le modèle tenant compte des marges (figure ci-dessous) s'élève à moins d'un point d'indice en moyenne, la modélisation dite simplifiée peut être retenue.

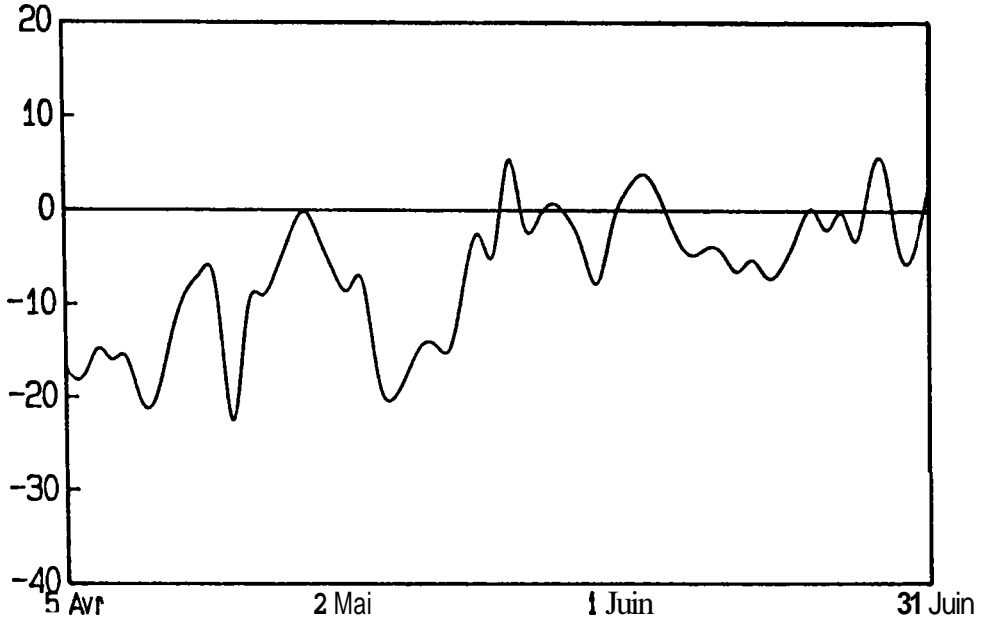
DIFFERENCE COURS THEORIQUES MODELE 2 - MODELE 1



Source : Département Recherche, Développement et Formation

Des décalages entre les cours théorique et réel apparaissent. Dans certains cas, ce différentiel de prix (figure suivante) peut atteindre plus de 20 points d'indice.

DIFFERENCE COURS REEL - THEORIQUE MODELE AVEC ACTUALISATION DES MARGES



Source : MATIF S.A. Département Recherche, Développement et Formation

Comment expliquer l'importance de cette différence ?

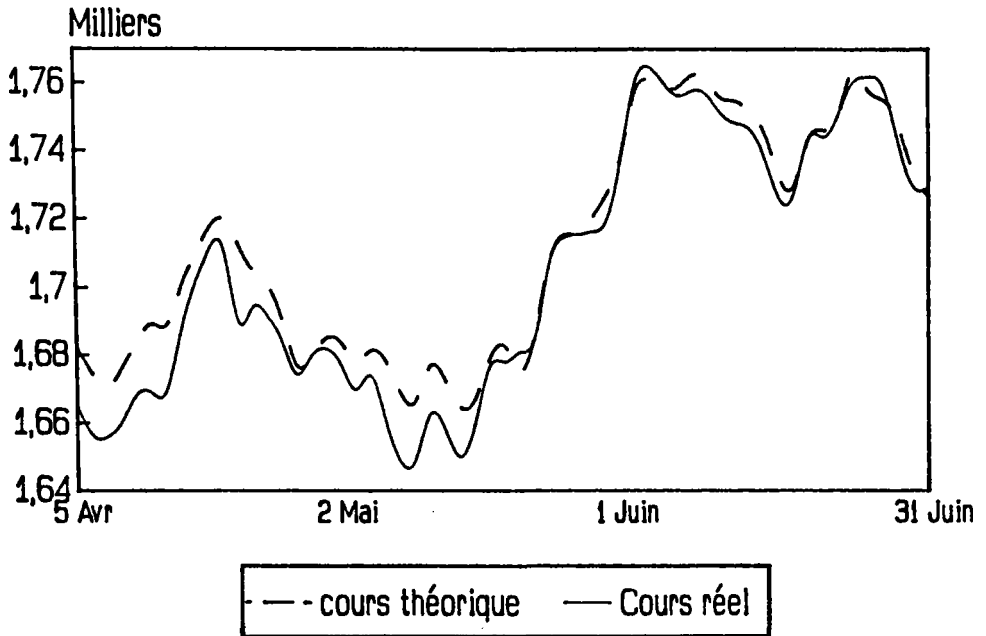
Le volume des transactions n'est significatif qu'à partir du 15 du mois précédant le mois de l'échéance. Il faut remarquer qu'à partir de cette date le décalage de prix est de faible amplitude.

Le manque de liquidité sur les échéances autres que les 2 plus proches, peut expliquer les difficultés à monter des opérations d'arbitrage et les écarts entre les prix théorique et réel.

Le fait que le modèle simplifié ne tienne pas compte des frais de transaction, élevés pour certains opérateurs, constitue aussi une réponse à notre question. L'intégration des frais diminue les gains potentiels d'une opération d'arbitrage cash & carry ou reverse cash & carry.

Durant les périodes étudiées, la situation de reverse cash & carry paraît prédominante (cf. figures ci-dessous) : des opportunités d'arbitrage durables se sont présentées mais n'ont pas été saisies.

VALORISATION DU CONTRAT FUTURE CAC 40
MODELE AVEC ACTUALISATION DES MARGES



Source : MATIF S.A. Département Recherche, Développement et Formation

Un arbitragiste désirent réaliser un reverse cash & carry se heurte à deux types de difficultés.

La première concerne la vente d'actions au comptant qui ne peut être réalisée que par un opérateur qui les détient ou, à défaut, les emprunte.

Ceux qui possèdent les titres sont encore trop souvent peu motivés ou sous-équipés pour réaliser de telles opérations sur le MATIF.

Quant à ceux qui ne possèdent pas les titres, ils doivent les emprunter. Mais les prêteurs sont limités par les dispositions peu satisfaisantes qui régissent en France le prêt de titres. Cette situation provient en partie de l'absence d'un solide pool de prêteurs et d'un organisme de Place qui serait gestionnaire des besoins et des risques, et garant de la bonne fin des opérations.

A défaut d'emprunter les titres, l'opérateur peut les vendre à découvert et reporter chaque mois sa position autant de fois que nécessaire sur toute la durée de son arbitrage. Il profite ainsi de l'avantage offert par le Règlement Mensuel.

L'opération recèle toutefois un risque : c'est celui que fait peser sur le vendeur à découvert l'apparition d'un départ sur certaines des valeurs du panier répliquant le CAC 40, lorsqu'en fin de mois boursier sont organisées les opérations de liquidation. Une fois

par mois, sur **chaque valeur** du RM, la position **des acheteurs à découvert qui désirent faire** reporter leurs achats, est **confrontée** à celle des **vendeurs qui décident** de reporter sur le mois suivant la cession des titres **vendus**. Le **déséquilibre** en titres qui se **produit invariablement** est **comblé** de deux manières :

- lorsque les **acheteurs** sont plus nombreux que les vendeurs, un **prêt à 1 mois doit** leur **être consenti** par des banquiers, en **général** aux conditions du **marché monétaire augmentées** du taux de report. C'est la situation la plus **fréquente**, qui se **traduit** par **l'enregistrement** des titres que **l'acheteur fait** reporter, au **cours** du **marché majoré d'un** montant Cgal au report **représentant** le **coût** du **financement** ;

- si, à **l'inverse**, les vendeurs **reportés** sont plus nombreux **que** les acheteurs, il faut **rechercher des prêteurs extérieurs** de titres pour **comblé** le **déséquilibre**. Le **coût** de cet emprunt de titres est **évidemment** supporté par les vendeurs **sous la forme d'une réduction** du **cours** (Cgale au **déport**) auquel leur **position** vendeuse est **enregistrée** sur le mois **boursier** suivant.

L'**achat** du contrat à **terme** sous **évalué** contre la vente à **découvert** du **panier** de titres qui **réplique l'indice** ne **suffit pas toujours** à **bloquer** un **taux synthétique** d'emprunt inférieur au **marché monétaire**. **Encore faut-il** ne pas tout **reperdre** sous forme de **dépôts payés** sur **quelques-unes des valeurs** vendues à **découvert**.

4. Arbitrage terme-terme

Un arbitrage terme-terme **consiste à effectuer** deux **opérations simultanées** : acheter un contrat sur **une échéance** et **vendre** un contrat sur **une autre échéance**. Cela revient **en fait** à **réaliser** un arbitrage cash and carry ou reverse cash and carry **différé** dans le temps.

L'échéancier se présente de la façon suivante :

- . **t** : début de l'opération d'arbitrage
- . **t+c₁** : première date de règlement du comptant après t
- . **t+d₁** : encaissement des **dividendes** (de montant **D₁**) versés entre t et t+h₁
- . **t+h₁** : liquidation à l'échéance 1
- . **t+c₂** : première date de règlement du comptant après t+h₁
- . **t+d₂** : encaissement des **dividendes** (de montant **D₂**) versés entre t et t+h₂
- . **t+h₂** : liquidation à l'échéance 2
- . **t+c₃** : première date de règlement du comptant après t+h₂

Suivant le **modèle simplifié** de valorisation du contrat à **terme** développé précédemment, les **cours théoriques** des contrat à **terme** sur les échéances 1 et 2 vérifient les relations (en utilisant les **mêmes notations** que cidessus) :

$$(1) \frac{1}{(1 + r_{t+h_1}^{t+c_2})} \cdot F_1(t) = I(t) \cdot (1 + r_{t+c_1}^{t+h_1}) - D_1 \cdot (1 + r_{t+d_1}^{t+h_1})$$

$$(2) \frac{1}{(1 + r_{t+h_2}^{t+c_3})} \cdot F_2(t) = I(t) \cdot (1 + r_{t+c_1}^{t+h_2}) - D_1 \cdot (1 + r_{t+d_1}^{t+h_2}) \\ - D_2 \cdot (1 + r_{t+d_2}^{t+h_2})$$

(pour $c_1 < h_1$ et $c_2 < h_2$)

Exprimer $I(t)$ à l'aide de la relation (2) puis le substituer dans l'expression (1) permet d'obtenir entre les deux cours théoriques la relation suivante :

$$(3) \quad F_2 / (1 + {}_{t+h_2}r_{t+c_3}) = (F_1(t) \cdot (1 + {}_{t+h_1}r_{t+h_2}) / (1 + {}_{t+h_1}r_{t+c_2})) + D_2 \cdot (1 + {}_{t+d_2}r_{t+h_2})$$

Réaliser un arbitrage terme-terme devient intéressant dès que l'égalité (3) n'est pas vérifiée par les cours réels du contrat. L'opérateur achète le contrat sous-évalué et vend l'autre contrat.

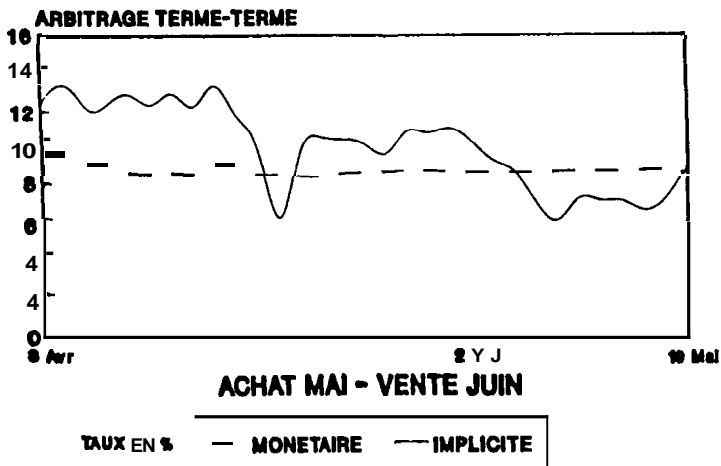
Le taux implicite r de l'opération d'arbitrage vaut par conséquent pour la période comprise entre $t+h_1$ et $t+h_2$:

$$r = \frac{F_2(t) / (1 + {}_{t+h_2}r_{t+c_3}) + D_2 \cdot (1 + {}_{t+d_2}r_{t+h_2})}{F_1(t) / (1 + {}_{t+h_1}r_{t+c_2})} - 1$$

Ce taux doit être comparé au taux futur anticipé du marché monétaire ${}_{t+h_1}r_{t+h_2}$ pour la période comprise entre $t+h_1$ et $t+h_2$.

Du 3 avril au 19 mai 89, la comparaison de ces taux pour un arbitrage terme-terme entre les échéances mai 89 et juin 89 (achat de l'échéance mai et vente de l'échéance juin) donne les résultats suivants :

COMPARAISON DU TAUX IMPLICITE ET DU TAUX MONETAIRE FUTUR ANTICIPE



Source : MATIF S.A. Département Recherche, Développement et Formation

Peu d'arbitrages **inter-échéances** sont réalisés : le **différentiel de taux dépasse** parfois 2 points.

Le manque de **liquidité** en **début de période** explique en **partie** les écarts **importants** observés. De **même** que **précédemment**, les **spécificités** du **marché** parisien **entravent** aussi ces arbitrages.

III. RECHERCHE D'UN PORTEFEUILLE OPTIMAL POUR REPLIQUER L'INDICE CAC 40

Cette **dernière partie** consiste à **déterminer** un **sous-panier** de quelques actions **sélectionnées** parmi les 40 valeurs **utilisées** pour le calcul de l'indice CAC 40. Ce portefeuille devra suivre l'indice le plus **fidèlement** possible **afin** de **permettre** la **réalisation** d'arbitrages **comptant-terme**.

1. Détermination du portefeuille optimal

Une analyse de **type** rkgression **linéaire** multiple **permet** de **déterminer** la **composition** de l'**échantillon** ainsi que la **pondération** des valeurs. L'**indice** CAC 40 **représente** la variable **endogène** ; les variables **exogènes** sont **sélectionnées** parmi les 40 valeurs qui **composent** l'**indice**.

Il s'agit **d'obtenir** un nombre minimal de variables explicatives tout en **conservant** une **très bonne qualité** de régression. La **méthode** **stepwise** **utilisée** pour y **parvenir** **procède** de la **façon** suivante :

- * les variables X_1, \dots, X_q sont **supposées déjà** introduites.
- * avant de **procéder à** une nouvelle introduction, les variables explicatives non **significatives** sont **éliminées**.
- * **après les éliminations** éventuelles, les variables non **prises en compte** sont **examinées** : si l'une **d'elles** apporte un gain d'**information** jugé **significatif**, on l'**introduit**.
- * **les calculs cessent** lorsque, **après la procédure d'élimination**, aucune variable n'est **introduite** dans la rkgression ou lorsque le **nombre désiré** de variables explicatives est **atteint**.

Pour la période du **01.03.88** au **31.08.88**, deux **modèles** de rkgression comportant 8 variables explicatives **présentent** une **bonne qualité d'ajustement**. Ces **modèles** s'**écrivent** :

$$(1) \text{CAC 40} = 109.147 + 0.942 \times \text{CGE} + 0.141 \times \text{CHARGEURS} \\ (295.80) \quad (17.38) \quad (10.75) \\ + 0.275 \times \text{MICHELIN} + 0.307 \times \text{ACCOR} + 0.171 \times \text{LAFARGE} \\ (4.04) \quad (7.17) \quad (9.45) \\ + 0.129 \times \text{GLE EAUX} + 0.273 \times \text{AIR LIQUIDE} + 0.021 \times \text{MIDI} \\ (9.06) \quad (6.55) \quad (5.57)$$

$$(2) \text{ CAC } 40 = \% 1.29 + 0.041 \times \text{LVMH} + 0.167 \times \text{GLE EAUX}$$

(226.10) (8.15) (10.45)

$$+ 0.432 \times \text{CGE} + 0.054 \times \text{L'OREAL} + 0.213 \times \text{LAFARGE}$$

(6.55) (8.08) (11.00)

$$+ 0.207 \times \text{ELF} + 0.039 \times \text{MIDI} + 0.151 \times \text{CGIP}$$

(3.45) (7.89) (9.69)

N.B. **Entre parenthèses** sont **données** les valeurs des statistiques T de Student correspondant aux coefficients.

Les valeurs supports du MONEP sont bien **représentées** : CGE, MIDI, LAFARGE, ACCOR et MICHELIN pour le modèle (1) ; CGE, MIDI, LAFARGE et ELF AQUITAINE pour le modèle (2).

Comparaison de la qualité des ajustements (1) et (2)

	MODELE (1)	MODELE (2)
Coefficient de détermination R^2	0.998	0.998
F- value	10 965.37	7 829.03
Standard error of estimation (kart-type des résidus)	4.24	4.88
Durbin Watson	1.08	1.17
Résidu maximum	13.26 (31.05.88)	15.06 (08.07.88)
Pourcentage résiduel maximum	1.13 (06.05.88)	1.11 (08.07.88)
Résidu minimum	- 10.82 (13.06.88)	- 13.96 (13.06.88)
Pourcentage résiduel minimum	- 0.86 (13.06.88)	- 1.10 (13.06.88)

Les deux modèles présentent une auto-corrélation des résidus, mais la nécessité de trouver un échantillon pondéré de valeurs ne permet pas d'effectuer un changement de variables du type : $x_t \rightarrow x_t - r x_{t-1}$

Stabilité temporelle des sous-paniers

Le test de Chow permet de tester la stabilité temporelle des modèles obtenus. On cherche si, pour une coupure à priori de l'échantillon, la stabilité peut être acceptée. Le modèle s'écrit $Y = Xb + e$ (b vecteur de dimension $p + 1$) avec N observations ; l'échantillon total est divisé en 2 sous-échantillons de taille N_1 et N_2 pour lesquels les modèles s'écrivent :

$$Y_1 = X_1 b_1 + e_1 \quad (N_1 \text{ observations})$$

$$Y_2 = X_2 b_2 + e_2 \quad (N_2 \text{ observations})$$

On teste alors :

$$H_0 : b_1 = b_2 \text{ (stabilité)}$$

contre

$$H_1 : b_1 \neq b_2 \text{ (non stabilid)}$$

La statistique F s'écrit :

$$F = \frac{N_1 + N_2 - 2(p+1)}{p+1} \times \frac{SCR_0 - (SCR_1 + SCR_2)}{SCR_1 + SCR_2}$$

avec SCR_0 : somme des carrés des résidus pour l'échantillon total
 SCR_1 : somme des carrés des résidus pour le sous-échantillon i ($i = 1, 2$)

Sous l'hypothèse de normalité des résidus, la statistique F suit une loi de Fisher à ($p+1$, N_1+N_2-p-1) degrés de liberté.

Effectuons donc un test de Chow pour chacun des modèles obtenus en partageant la période globale en deux sous-périodes :

- du 01.03.88 au 31.05.88 (66 observations)
- du 01.06.88 au 31.08.88 (66 observations)

La statistique F vaut $F_1 = 2.45$ pour le modèle (1) et $F_2 = 5.26$ pour le modèle (2).

Comme $F_{9, 114}(0.95) = 2.57$, l'hypothèse de stabilité temporelle ne peut être acceptée que pour le modèle (1).

2. Utilisation d'un portefeuille optimal pour répliquer l'indice CAC 40

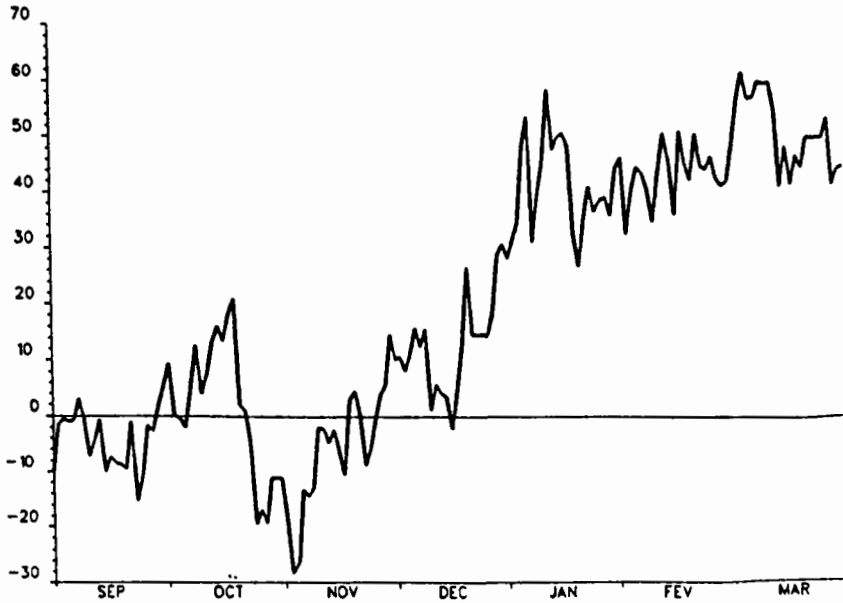
Les modèles (1) et (2) permettent de prévoir les valeurs prises par l'indice CAC 40 en fonction des cours des actions composant les portefeuilles à partir du 01.09.88

A posteriori, la comparaison des valeurs prévisionnelles aux valeurs réelles de l'indice peut se faire : le tableau qui suit permet de juger de la qualité de prédiction des modèles.

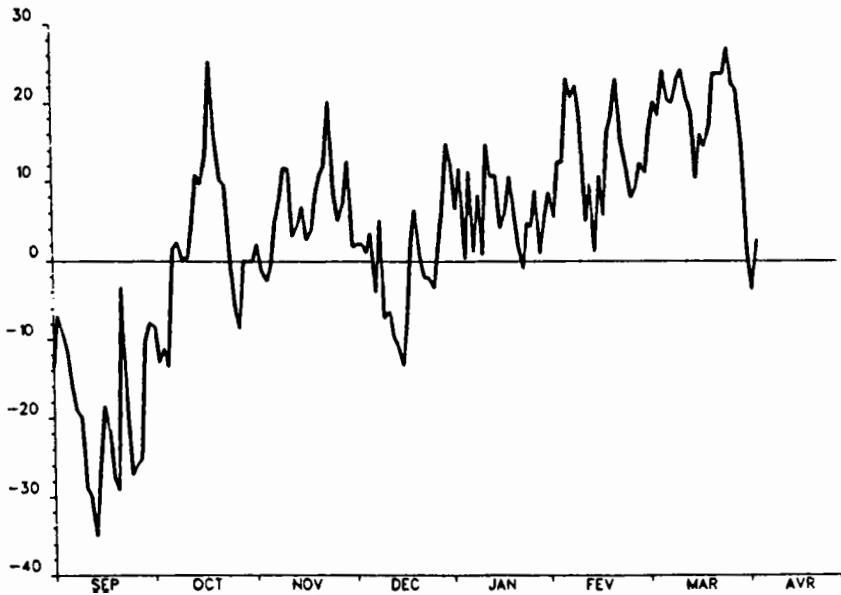
	MODELE(1)	MODELE (2)
Résidu maximum	62.83 (06.03.89)	27.31 (28.03.89)
Pourcentage résiduel maximum	4.01 (06.03.89)	1.70 (28.03.89)
Résidu minimum	- 27.30 (03.11.88)	- 35.00 (14.09.88)
Pourcentage résiduel minimum	- 1.79 (03.11.88)	- 2.49 (14.09.88)

Les graphes ci-après représentent la différence entre les valeurs réelles et prédites de l'indice CAC 40.

*** Modèle (1)**



*** Modèle (2)**



Le modèle (2) présente une meilleure qualité de prédiction que le modèle (1). Des erreurs de prédiction importantes apparaissent en fin de période. Cela tend à prouver la nécessité de renouveler le portefeuille plus fréquemment.

3. Utilisation du portefeuille optimal en arbitrage

L'arbitrage cash and carry s'effectue de la manière suivante :

A la date t^0 : **vente** de N^0 **contrats à terme** au **cours** IF^0
achat du **sous-panier** d'actions au prix $V^0 = 200 \times ICR^0$
 (financé par un emprunt)

Le nombre N^0 de **contrats à vendre** vaut :

$$N^0 = \frac{200 \times ICR^0 \times b}{200 \times IC^0} = \frac{ICR^0 \times b}{IC^0}$$

avec IC^0 valeur de l'indice en t^0
 ICR^0 valeur de l'indice reconstitué en t^0
 b bêta du portefeuille de valeurs par rapport à l'indice CAC 40

Ce nombre de contrats peut être éventuellement réajusté au cours de l'arbitrage.

A l'échéance : **achat** de N^0 **contrats à terme** au **cours** IC^1
vente du **sous-panier** d'actions au prix $V^1 = 200 \times ICR^1$

Le résultat en points d'indice de l'arbitrage s'écrit donc, sans tenir compte des frais :

$$G = N^0 \times IF^0 - ICR^0 \times (1 + r) + D - N^0 \times IC^1 + ICR^1$$

avec IC^1 valeur de l'indice à l'échéance
 ICR^1 valeur de l'indice reconstitué à l'échéance
 r taux du marché monétaire pour la période allant du règlement des titres au comptant jusqu'à l'échéance du contrat
 D montant capitalisé des dividendes distribués pour les valeurs composant le sous-panier.

L'arbitrage reverse cash and carry s'effectue de façon symétrique, le résultat est égal à $-G$.

Le résultat de l'arbitrage dépend des valeurs réelle et reconstituée de l'indice CAC 40 le jour de l'échéance, qui ne sont pas connues à la date t^0 . Cela entraîne donc une incertitude sur ce résultat au moment où l'opération d'arbitrage est nouée.

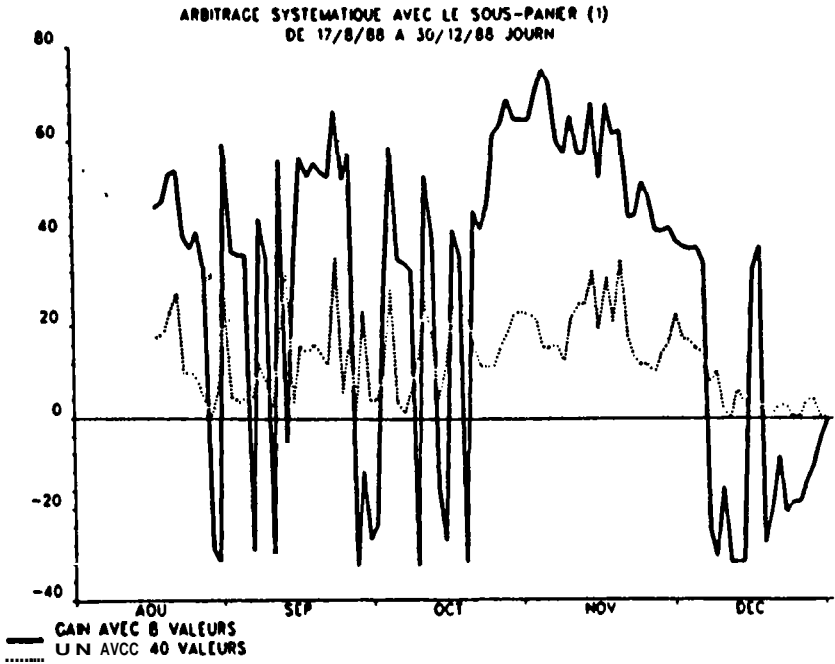
Les graphes qui suivent représentent, pour l'échéance décembre 88, les résultats d'un arbitrage comptant-terme effectué quotidiennement avec un portefeuille de 8 valeurs d'une part, et avec le portefeuille de 40 valeurs d'autre part.

L'arbitrage choisi est :

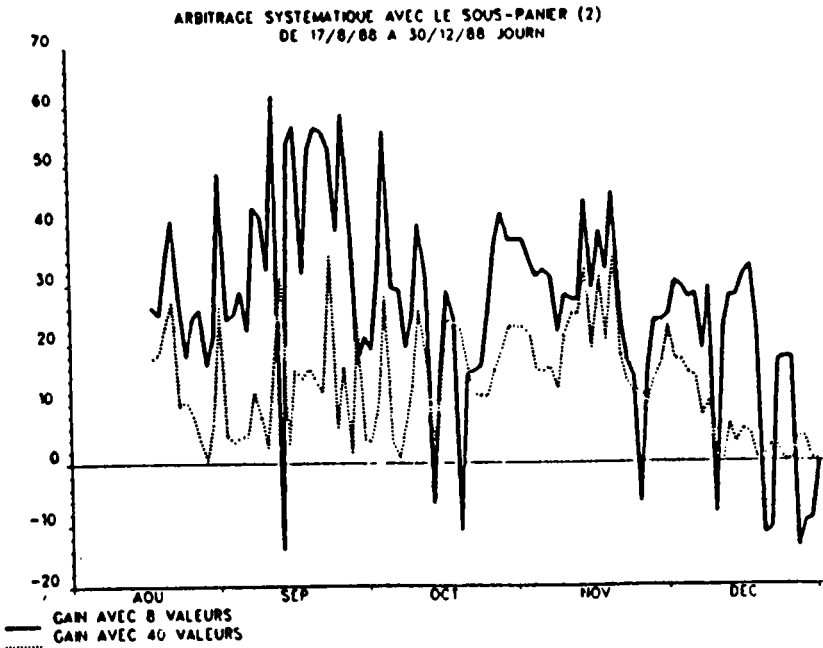
- une opération de cash and carry si le cours réel du contrat à terme est supérieur à son cours théorique

- une opération de reverse cash and carry dans le cas contraire.

* Modèle (1)



* Modèle (2)



Des résultats négatifs apparaissent parfois pour les arbitrages effectués avec 8 valeurs : ils proviennent de la différence éventuelle enregistrée le jour de l'échéance entre les valeurs réelles et reconstituées de l'indice.

Le tableau ci-dessous présente les moyennes et écarts-type des résultats d'arbitrages réalisés tout au long des échéances décembre 88, janvier, février et mars 89.

échéance	portefeuille de 40 valeurs	portefeuille (1)	portefeuille (2)
décembre 88	m = 13,07 s = 9,06	m = 28,32 s = 34,71	m = 26,27 s = 16,38
janvier 89	m = 13,08 s = 9,06	m = 25,00 s = 42,74	m = 11,75 s = 13,91
février 89	m = 13,50 s = 9,83	m = 9,61 s = 31,41	m = 16,72 s = 15,01
mars 89	m = 15,11 s = 9,56	m = -12,87 s = 14,91	m = 12,87 s = 17,58

Ce tableau montre :

* pour le portefeuille de 40 valeurs : une grande stabilité de la moyenne et de l'écart-type des résultats pour les différentes échéances.

* pour le portefeuille (1) :

. des résultats en moyenne bons pour les échéances décembre et janvier, médiocres pour l'échéance février et très mauvais pour l'échéance mars.

. une dispersion toujours élevée : les résultats peuvent être très supérieurs à ceux du portefeuille global, mais aussi très inférieurs ...

* pour le portefeuille (2) :

. des résultats en moyenne plus proches de ceux du portefeuille global.

. une dispersion beaucoup moins élevée que pour le portefeuille (1).

CONCLUSION

L'activité modeste du marché sur indice CAC 40, comparée à celle des marchés américains ou japonais, doit toutefois être rapportée à la taille du marché parisien des actions. Les capitaux échangés quotidiennement sur le contrat CAC 40 représentent 30 % environ de ceux traités sur le marché à Règlement Mensuel. La part d'activité croissante des NIP et des OPCVM rend le marché de plus en plus liquide.

L'existence de possibilités durables de profit pour les arbitragistes constitue un élément

d'inefficacité du **marché**. L'**illiquidité** sur les **échéances** lointaines, les **spécificités** du **Règlement Mensuel** et la courbe **d'apprentissage** expliquent les **écarts** observés **entre les** cours **théoriques** et **réels** du contrat. Une **bonne maîtrise** des techniques **d'arbitrage** et un **nombre accru d'opérateurs** iraient dans le sens d'une plus grande **efficience**.

Vu la **difficulté** de **répliquer complètement** l'**indice**, une **gestion indiciaire** à l'**aide d'un sous-panier d'actions** permet de réaliser plus **aisément** arbitrages et **couverture**. La création récente de **plusieurs** fonds **indiciels** **gérés** de façon **dynamique** et l'**arrivée** de **teneurs de marché** sur certaines **valeurs** contribueront au **développement** du **marché**.