CONTRIBUTION N° 36

VOLATILITY RISK AND OPTION'S REACTION TO A VOLATILITY CHANGE

PAR / BY

M. BRANCOVAN, T. DEHAPIOT, N. ZAMFIRESCU

France

RISQUE DE VOLATILITE ET SENSIBILITE D'UNE OPINION A UNE PERTURBATION DE VOLATILITE

VOLATILITY RISK AND OPTION'S REACTION TO A VOLATILITY CHANGE

M. BRANCOVAN T. DEHAPIOT, N. ZAMFIRESCU

ABSTRACT

In this paper we go through a short review of the main restrictions induced by the hypothesis onto which the Black & Scholes formula is backed Because of the apparent inadequacy of these hypotheses to reality we relax some of them and then look at the changes this may bring.

We then focus our attention more especially to what we think is a major problem in option pricing : the volatility. We relax therefore the constant volatility assumption and use a model, just like T. Dehapiot and S. Manchet (1989, (13)), in which the volatility follows a two-state stochastic process. Moreover we allow the changes to take place randomly and then introduce the notion of sensibility of a call option price, given in this case, to a change in the total length of time of the occuring pertubations.

Integrating in the formula of the call option a stochastic length of disturbances of volatility may enable users of such tools to adjust the price to their own perception of tires of uncertainty to come brought in by exogenous factors.

RISQUE DE VOLATILITE ET SENSIBILITE D'UNE OPTION A UNE PERTURBATION DE VOLATILITE.

BRANCOVAN MIHAI | DEHAPIOT TANCW | ZAMFIRESCU NICOLAS

RESUME

Dans cet article, nous passons en revue quelques unes des hypothèses conduisant à la formule de Black et Scholes et montrons que leur caractère restrictif amène une inadéquation avec la réalité. Pour ces raisons, nous les relâchons et étudions l'effet ainsi obtenu.

En particulier, nous centrons notre attention sur un des éléments majeurs : la volatilité. Nous utilisons à cet effet le modèle à deux états de volatilité, l'un faible et l'autre élevé comme dans T. Dehapiot et S. Manchet (1989). Nous introduisons ensuite une longueur de temps stochastique de perturbation, et étudions les différents paramètres liés à ce concept (e.g. la sensibilité d'un call par rapport à τ).

L'introduction de ce temps de perturbation aléatoire peut permettre aux opérateurs de traduire dans la formule du call leur propre anticipation des périodes agitées du march6 dues à des causes exogènes.

SYNOPSIS

In this paper we go through a short review of the main restrictions induced by the hypothesis onto wich the Black & Scholes formula is backed. Because of the apparent inadequacy of these hypothesis to reality we relax some of them and then look at the changes this may bring.

We then focus our attention more especially to what we think is a major problem in option pricing : the volatility. We relax therefore the constant volatility assumption and use a model, just like T. Dehapiot and S. Manchet (1989,(13)), in wich the volatility follows a two-state stochastic process. Moreover we allow the changes to take place randomly and then introduce the notion of sensibility of a call option price, given in this case, to a change in the total lenght of time of the occuring perturbations.

Integrating in the formula of the call option a stochastic lenght of disturbances of volatility may enable users of such tools to adjust the price to their own perception of times of uncertainty to come brought in by exogenous factors.

SEPTEMBRE 1989

INTRODUCTION

L'évaluation des options constitue un des problèmes majeurs de la théorie financière. En effet, un certain nombre de produits financiers plus ou moins récents contiennent une partie optionnelle. Il en est ainsi des bons de souscription, des obligations convertibles, des caps et floors, etc ... sans parler du développement récent des options négociables (sur actions, MATIF, indices) sur la place de Paris.

Black et Scholes, par leur célèbre formule réussirent à donner un prix pour un contrat d'option européenne. Cependant leur modèle nécessite un certain nombre d'hypothèses contraignantes. Certaines sont relâchées dans des modèles plus récents (options américaines, présence d'un dividende : Merton, Cox Rubinstein etc ...) Mais il dcmeure que ces modèles introduisent deux paramètres difficiles à évaluer : le taux sans risque et la volatilité. Ces deux paramktres sont supposés constants dans le modèle Black et Scholes, ce qui n'est pas forcément compatible avec la réalité.

Dans cet article, nous nous intéresserons plus particulièrement aux problèmes posés par une volatilité non constante, voire aléatoire. Nous faisons apparaitre dans une première partie un risque de volatilité, puis nous montrons que des résultats empiriques permettent de rejeter une volatilité constante. Finalement nous construisons un modèle d'évaluation dans lequel la volatilité fluctue aléatoirement. Nous calculons la sensibilité du prix de l'option d'achat à une perturbation de la volatilité.

Les problkmes liés au taux sans risque ne seront pas développés ici. Ils seront juste évoqués.

* Chargé de recherches au C.N.R.S.
Charge de mission auprès de la direction financière de la banque PARIBAS

** Ancien élève de l'Ecole Polytechnique, chargé de T.D. à l'université d'Orléans.

*** Université d'Orléans, Directeur en recherche I.O.F.
Consultant (associé Finance-Consult) auprès de la direction financière de la banque PARIBAS et auprh d'EURO-PERFORMANCE.

Ce travail a été effectué à la banque PARIBAS service ACTUARIAT dirigé par J.Ph. de REYDELLET.

I - LE RISQUE DE VOLATILITE

Parallèle entre risque de taux et risque de volatilité

Le risque de volatilité est une notion que nous allons définir par comparaison à une notion plus ancienne : le risque de taux.

Un investisseur achetant une obligation à taux fixe pour la revendre à son échéance connaît de manière certaine (sauf si l'émetteur fait défaut, c'est le risque de signature) tous les flux monétaires qu'il va recevoir, puisqu'il connaît les coupons et la valeur de rachat. Le seul risque qu'il court est de ne pas être aussi bien rémunéré qu'il pourrait le prétendre si les taux venaient à monter par la suite. Le risque de tavv apparait lorsqu'il cherche à revendre son obligation avant son échéance ; il peut en effet faire un gain ou une perte en capital non prévisible a priori. L'investisseur ne peut conserver une certaine liquidité qu'au p i x d'un certain risque.

Pour les mêmes raisons, une option conservée jusqu'à son échéance ne présente aucun risque autre que celui lié au prix du support lui-même : à son échéance le prix de l'option est Max (S_t-K,O). Si l'investisseur désire revendre son option avant l'échéance, son prix sera fonction du paramètre volatilité implicite (a), dont la valeur est déduite des prix fixés par le marché et n'est a priori pas prévisible. Nous convenons d'appeler ce risque : risque de volatilité.

Le modèle de Black et Scholes suppose la volatilid de prix du support constante. La volatilitk implicite devrait se retrouver à partir de la volatilitk historique (aux erreurs d'estimation près) et ne pas varier. Dans ce cas le prix fuhu de l'option serait un fonction déterministe du prix futur du support, et il n'y aurait pas de volatilité : a nous savons qu'il n'en est rien.

Impossibilité de réaliser un portefeuille sans risque

La réalisation d'un portefeuille sans risque dans la théorie de l'arbitrage nécessite deux hypothèses :

1) Pouvoir réactualiser le portefeuille à tout instant.
2) Ne pas se tromper sur la valeur instantanée de σ.

En réalité la gestion pratique d'un portefeuille ne peut se faire qu'en temps discret. La conséquence est qu'on ne peut plus éliminer le risque.

Prenons un processus du type :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dZ_t$$

avec μ et a constants et connus.

Construisons un portefeuille comprenant une option et h actions. La valeur du portefeuille est :

$$V_t = C(S_t, t) + h_t S_t$$

En appliquant le lemme d'Ito nous obtenons:

$$dV = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \mu S\left(\frac{\partial C}{\partial S} + h\right)\right)dt + \sigma S\left(\frac{\partial C}{\partial S} + h\right)dZ$$

Le portefeuille est sans risque à l'instant t si et seulement si:

$$h_t = -\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)_t$$

En posant que le rendement de ce portefeuille est égal aux taux sans risque, nous pouvons obtenir la valeur de C : c'est la formule de Black et Scholes.

Nous avons donc:

$$h_t = -N(d_t)$$

avec :

$$d_t = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + r(t^* - t)}{\sigma\sqrt{t^* - t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t^* - t}$$

où t* désigne l'échéance de l'option et N la fonction cumulative de la loi normale.

Si la valeur de h n'est pas modifiée entre les dates t_0 et t_1 le portefeuille ne sera pas couvert entre ces deux dates.

En effet si h reste constamment égal à $-N(d_{t_0})$ la variance instantané de dV vaut :

$$\sigma^2 S_t^2 \left(N(d_t) - N(d_{t_0})\right)^2 \neq 0$$

et d'autre part l'espérance instantanée de rendement du portefeuille vaut :

$$r + (\mu - r)\left(1 - \frac{C_t - N(d_t)S_t}{V_t}\right)$$

Nous en concluons que, dans la pratique, le portefeuille n'est jamais totalement sans risque et que, lorsque μ est différent de r , son rendement moyen peut différer du taux sans risque. Cet écart est parfois appelé prime de risque.

Nous préférons donc, pour évaluer une option d'achat, abandonner la théorie de l'arbitrage pour utiliser directement une méthode probabiliste. Si nous supposons que les agents sont neutres au risque, nous ne retrouvons la formule de Black et Scholes qu'à la seule condition que μ et r coïncident. C'est à dire qu'il faut supposer que le rendement moyen des actions est Cgal au taux sans risque. Or nous savons que dans la pratique il n'en est rien : nous devons donc relâcher cette hypothèse.

Prix d'une option lorsque l'arbitrage est impossible

Nous repartons du processus :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dZ_t$$

Si l'agent était neutre au risque, son taux d'actualisation serait Cgal au taux sans risque. Il valoriserait l'option à l'espérance de sa valeur d'échéance, soit :

$$C_t = e^{-r(t^*-t)} E\left(Max(S_{t^*}-K, 0)/S_t\right)$$

Or l'agent a une certaine aversion pour le risque : il convient donc de remplacer r par ρ avec $\rho > r$; p est alors son taux d'actualisation, compte tenu du risque pris. De plus, ρ doit Cue une fonction croissante du risque, c'est à dire de la volatilité de l'option.

La solution du problème est alors :

$$C_t = S e^{(\mu-\rho)(t^*-t)} N(d_t) - K e^{-\rho(t^*-t)} N(d_t - \sigma\sqrt{t^*-t})$$

avec :

$$d_t = \frac{\log\frac{S}{K} + \mu(t^*-t)}{\sigma\sqrt{t^*-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t^*-t}$$

C'est à dire :

$$C_t = e^{(\mu-\rho)(t^*-t)} C_\mu$$

où $C\mu$ est la valeur calculée par la formule de Black et Scholes avec μ à la place de r.

Lorsque nous appliquons la théorie de l'arbitrage, c'est à dire lorsque nous supposons qu'il est possible de constituer un portefeuille sans risque, la valeur de $\rho(S,t)$ doit vérifier une certaine relation de sorte que nous retrouvons $C=C_r$, formule de Black et Scholes faisant intervenir le taux sans risque.

Par contre, si nous supposons qu'il est impossible dans la pratique de constituer un portefeuille sans risque, la contrainte sur ρ est alors relâchée. la valeur de ρ dépend de chaque agent. Si celui-ci est indifférent entre l'achat de l'option et l'achat de l'action support, ρ et μ coïncideront : il parait assez logique d'actualiser l'option avec le rendement moyen du support plutôt qu'avec un prétendu taux sans risque.

Dans ce cas : $C=C\mu$

Il s'en suit donc que si $\mu > \rho$, la volatilité implicite (au sens de Black et Scholes) sera plus élevée que le a estimé par la volatilité historique et inversement.

Nous avons don: mis en évidence l'importance du choix d'un bon taux d'actualisation.

Le choix du "bon" σ

La connaissance de la bonne valeur de la volatilité est elle aussi fondamentale. Nous allons nous placer dans le cas où les remarques du paragraphe précédent ne s'appliquent pas, c'est à dire que l'on peut constituer un portefeuille sans risque.

Reprenons notre portefeuille ,Nous autorisons éventuellement σ_t à varier avec le temps. Supposons que les agents évaluent l'option avec une volatilité implicite σ_0 erronée, c'est à dire différente de σ_t.

Si le portefeuille est bien couvcrt, nous obtenons

$$dV = rV\,dt + \frac{1}{2}(\sigma_t^2 - \sigma_0^2) S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt$$

Le rendement instantant?du portefeuille sera supérieur ou inférieur à r suivant que σ_t est sous ou sur évaluée.

Nous pouvons montrer que si σ_t est une fonction déterministe, en prenant :

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_s^2 \, ds$$

le rendement moyen demeure r entre t_0 et t_1.
Mais si nous avons systématiquement $\sigma_0^2 > \sigma_t^2$, l'opérateur est toujours perdant.
Cela soulève deux problèmes :

- Premièrement, pour que le portefeuille "immunisé" rapporte le taux sans risque, il faut pouvoir connaître la valeur instantanée de σ_t du processus dans le cas d'une gestion continue, ou la moyenne des valeurs futures de σ_t dans le cas d'une gestion en temps discret. Cela s'avère parfaitement impossible;

- deuxièmement la relative déconnexion entre la volatilité implicite et la volatilité historique entraîne que les portefeuilles d'arbitrage ont peu de chance d'avoir le rendement attendu. Le rendement pouvant même devenir négatif si on utilise à mauvais escient le coefficient de "hedging".

II - UNE VOLATILITE NON CONSTANTE

résultats empiriques

L'hypothèse de constance de la volatilité du processus peut être testée de plusieurs manières.

Premièrement, si tous les opérateurs étaient convaincus de la constance de la volatilité, ils n'éprouveraient pas le besoin de modifier à tous instant les valeurs de la volatilité implicite.

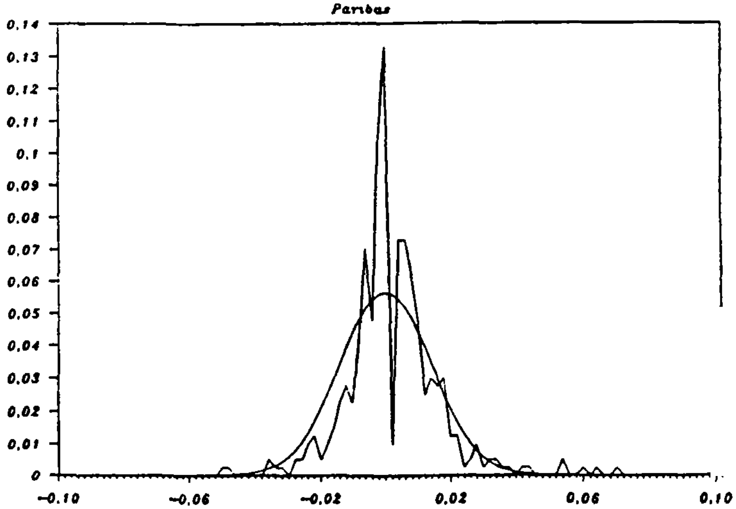
Deuxièmement, une volatilité constante entraîne une distribution lognormale des cours de l'actif sous-jacent.

Nous avons testée la normalité de la variable $X_t = \mathrm{Log}(S_{t+1}/S_t) - \widehat{M}_2$ où $\widehat{M}$ est la moyenne empirique de l'échantillon. Pour les actions PARIBAS, PEUGEOT, C.G.E., ELF la statistique de Kolmogorov-Smirnov conduit à rejeter l'hypothèse de normalité. Le calcul des coefficients de skewness et curtosis donne :

Actions	Skewness	Kurtosis
PARIBAS	0,66	6,91
PEUGEOT	0,11	4,30
C.G.E.	1,36	9,00
ELF	0,77	6,33

L'écart de ces valeurs aux valeurs théoriques (respectivement 0 et 3 sous hypothèse de normalité) est jugé significatif au niveau de confiance 95%.

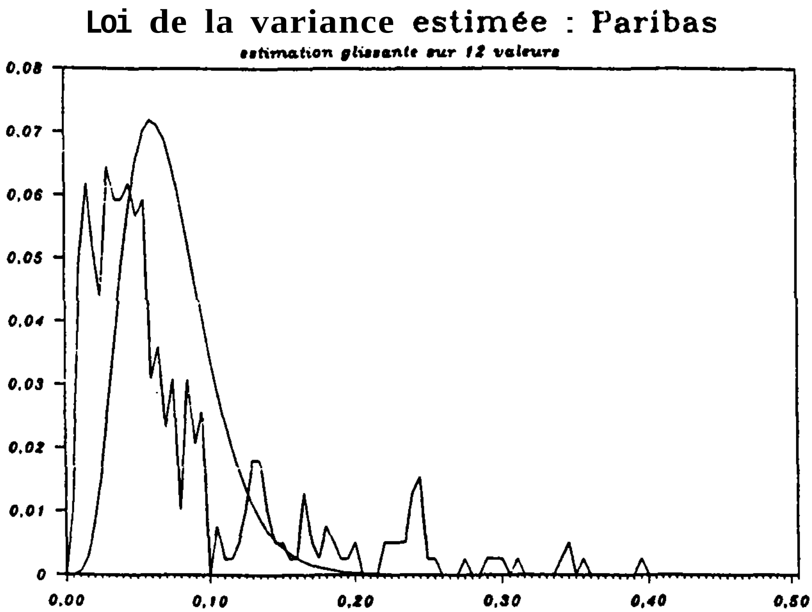
Accroissements logarithmiques de cours



Troisièmement, on **peut** former la variable variance **empirique** :

$$V_t = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_{t,i}^2$$

$(n-1)V_t/\sigma^2$ **devrait suivre une loi** du X^2 à n-1 degrés de **liberté**. La **comparaison** de **la** variance de V_t avec sa variance **théorique** sans hypothèse dc **normalité** conduit à **rejeter cette hypothèse.**



Evaluation **d'options lorsque** la **volatilité** est non **constante**

Lorsque σ_t est non constante, **mais** est une fonction **déterministe** du temps, **l'immunisation** du **portefeuille** conduit **à résoudre l'équation** :

$$\frac{1}{2} \sigma_t^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

avec la condition aux limites :

$$C_{t^*} = \text{Max}(S_{t^*} - K, 0)$$

La solution est :

$$C_\Sigma = S\,N(d_\Sigma) - K e^{-r(t^*-t)} N(d_\Sigma - \sqrt{\Sigma})$$

avec :

$$d_\Sigma = \frac{\log \frac{S}{K} + r(t^*-t)}{\sqrt{\Sigma}} + \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma}$$

$$\Sigma = \int_t^{t^*} \sigma_s^2\, ds$$

N : fonction cumulative de la loi normale, cela revient à remplacer dans la formule de Black et Scholes $\sigma^2(t^* - t)$ par Σ

En fait σ_t n'est pas prévisible. Dans le cas où σ_t est une variable stochastique, si les opérateurs n'ont pas d'aversion pour le risque, la valeur de l'option s'obtient comme une espérance :

$$\bar{C} = \int_0^\infty C_\Sigma\, dF_\Sigma$$

où C_Σ est la valeur calculée ci-dessus et F_Σ la fonction de répartition de la variable aléatoire Σ.

Conséquences

On peut chercher à comparer $\bar{C} = E(C_\Sigma)$ avec $C_{E(\Sigma)}$. Il suffit pour cela d'utiliser l'inégalid de Jensen. Le calcul de $\frac{\partial^2 C_\Sigma}{\partial \Sigma^2}$ montre que son signe est le même que celui celui de $d_\Sigma(d_\Sigma - \sqrt{\Sigma})-1$. Nous en concluons que si S est proche de $Ke^{-r(t^*-t)}$, la fonction est concave en Σ, et donc $\bar{C} < C_{E(\Sigma)}$.

Pour les valeurs proches de la parité, nous obtenons un prix d'option moins cher que le prix obtenu par une formule de Black et Scholes classique avec une volatilité moyenne.

Au conuaire, si S tend vers zéro ou l'infini, la fonction est convexe en Σ et donc $\bar{C} > C_{E(\Sigma)}$. Pour des valeurs éloignées de la parité, nous obtenons un prix plus élevé que le prix Black et Scholes.

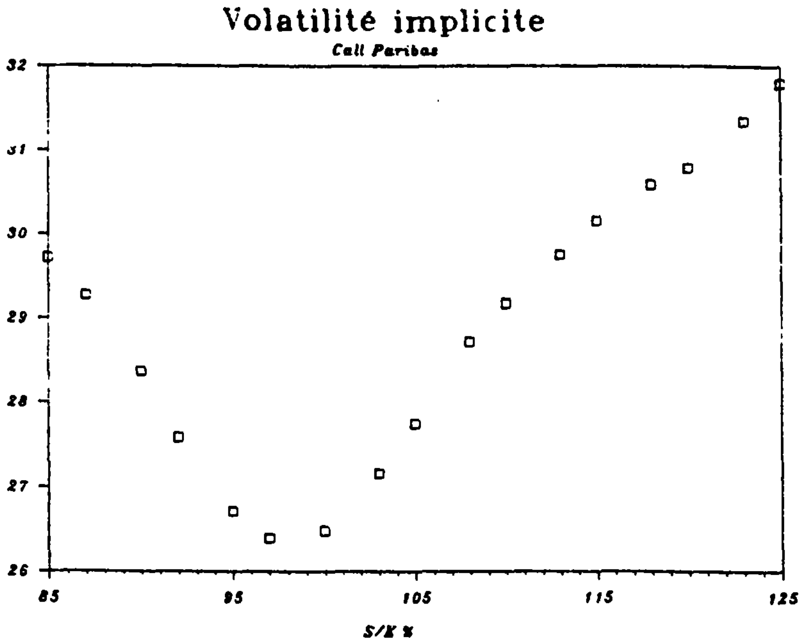
Nous pouvons définir la volatilité implicite comme étant la fonction inverse de Black et Scholes en σ, les autres paramètres étant donnés,

soit :

$$\sigma_{imp} = C_\sigma^{-1}(\bar{C})$$

Les considérations qui précédent montrent que cette volatilité implicite va dépendre du prix d'exercice, les autres paramètres étant fixés.

Ainsi nous obtiendrons la courbe :



Cette tendance est relativement bien observée sur les marches.

Le deuxième effet important est celui de la maturité sur la volatilité implicite. Posons $T=t^*-t$. Cet effet dépend du comportement de la variance de Σ/T.

Si $V(\frac{\Sigma}{T}) \rightarrow 0$, lorsque la maturité croit le prix obtenu à l'aide d'un modèle avec volatilité aléatoire va se rapprocher du prix Black et Scholes, et donc pour des prix d'exercice proches de la parité ($S \cong K e^{-rt}$) la volatilité implicite va croître avec la maturité;

Si $V(\frac{\Sigma}{T}) \rightarrow +\infty$, c'est l'effet inverse qui va se produire

Si $V(\frac{\Sigma}{T}) \rightarrow C^{te}$, , l'effet est incertain.

Donc, ici, tout dépend de la loi de distribution de Σ.

Evaluation d'options lorsque le taux d'intérêt est non constant

Lorsque r_t est non constant, mais est une fonction déterministe du temps, la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$C_\rho = S\,N(d_\rho) - K e^{-\rho} N\left(d_\rho - \tfrac{1}{2}\sigma^2(t^*-t)\right)$$

avec

$$d_\rho = \frac{\log \frac{S}{Ke^{-\rho}}}{\sigma(t^*-t)} + \frac{1}{2}\,\sigma(t^*-t)$$

$$\rho = \int_t^{t^*} r_s\,ds$$

On remplace donc dans la formule de Black et Scholes r(t*-t) par p.

Lorsque le taux d'intérêt est stochastique, p est une variable aléatoire. En supposant la neutralité au risque, l'option sera valorisée par :

$$\overline{C} = \int_0^{+\infty} C_\rho \, dF_\rho \,.$$

Or, le signe de $\frac{\partial^2 C_\rho}{\partial \rho^2}$ est le même que celui de :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\, N'(d - \sigma\sqrt{T}) - N(d - \sigma\sqrt{T}).$$

Une étude complète de ce problème sera faite dans un article ultérieur.

Cas ou il y a aversion pour le risque

Nous reprenons le cas où la volatilité varie de façon stochastique, le taux d'intérêt étant fixe. La valorisation se fait alors par des fonctions d'utilité de Von Neumann-Morgenstern concaves.

$$U(\overline{C}) = \int_0^{+\infty} U(C_\Sigma)\, dF_\Sigma < U \int_0^{+\infty} C_\Sigma \, dF_\Sigma$$

donc:

$$\bar{C} < \int_0^{+\infty} C_\Sigma \, dF_\Sigma \, .$$

L'option est donc valorisée avec une volatilité implicite plus faible que dans le cas précédent où il y avait neutralité au risque. La courbe de la page 9 doit donc être décalée vers le bas.

Lorsque l'option est à parité, les deux effets s'additionnent et on devrait évaluer l'option d'achat avec une volatilité implicite plus faible que la volatilité moyenne anticipée. Lorsque l'on est hors de la parité, l'effet final est incertain.

Tout se passe comme si on introduisait une prime de risque affectant négativement la volatilité. La valeur de cette prime de risque dépend de chaque opérateur et peut trbs bien dépendre de l'échéance et du prix d'exercice.

Conclusion

Si nous supposons que la volatilité (ou les taux) varie de façon stochastique et qu'il y a aversion au risque de volatilité, nous voyons que la volatilité implicite de l'option d'achat n'a aucune raison de coïncider avec la volatilité historique.

Plus grave encore, nous pourrions penser que la volatilité implicite est un instrument normalisateur permettant de comparer entre elles des options de maturités différentes ou de prix d'exercice différents. Il n'en est rien, puisqu'en fait elle dépend des différents paramètres du contrat.

Dans la partie suivante, nous allons construire un modèle simple permettant de quantifier ces effets.

III - CONSTRUCTION D'UN MODELE

Les modèles de volatilité aléatoire

Nous avons vu lorsqu'il n'y a pas d'aversion pour le risque de volatilité, l'option se valorise par :

$$\bar{C} = \int_0^{\infty} C_\Sigma \, dF_\Sigma$$

où

$$\Sigma = \int_t^{t^*} \sigma_s^2 \, ds$$

Il reste désormais à imposer une forme au processus de σ_t

L'approche suivie par Scott ainsi que Hull et White consiste à dire que σ_t suit un processus de diffusion du type :

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \alpha\, dt + \beta\, dZ$$

ou encore :

$$d\sigma = (\gamma - \sigma)\, dt + \beta\, dZ$$

Dans ce cas la loi de Σ est inconnue et l'estimation de C ne peut se faire que par une méthode de simulation informatique.

Dans l'approche de Dchapiot et Manchet, σ_t est constant sur des intervalles de longueur fixe, les constantes associées à des intervalles distincts étant indépendantes.

Si on impose à σ de ne prendre que deux valeurs σ_1 et σ_2 avec les probabilités respectives λ et $(1-\lambda)$, alors Σ suit une loi binomiale. Lorsque les agents sont neutres au risque de volatilité, nous obtenons pour l'évaluation d'un call une formule explicite:

$$C = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \lambda^p (1-\lambda)^{n-p} \left[S\, N(d_p) - K e^{-rT} N(d_p - \sqrt{\Sigma_p}) \right]$$

avec

$$d_p = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + rT}{\sqrt{\Sigma_p}} + \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma_p}$$

$$\Sigma_p = L\ (p\,\sigma_1^2 + (n-p)\,\sigma_2^2)$$

L est la longueur des intervalles.

σ_1 et σ_2 sont alors estimées par des méthodes statistiques, tandis que la probabilité 1-h que le march6 soit agité peut Cue laissé à l'appréciation de l'opérateur.

Dans un cas plus général, λ suit asymptotiquement une loi normale. L'espérance et la variance de Σ sont alors estimés par les moments d'ordre 2 et 4 de la série $\log(S_{t+1} / S_t)$.

Notons que nous somme dans le cas où $V(\frac{\Sigma}{T})$ tend vers 0. Lorsque l'échéance devient très grande, ce modèle ne diffère plus du modèle classique de Black et Scholes.

Si au lieu d'utiliser des intervalles de longueur constante, nous utilisons des intervalles de longueur aléatoire (loi exponentielle, de Poisson ...) nous n'obtenons aucune formule simple.

Modèle avec temps de perturbation aléatoire

Nous allons développer ici l'idte consistant à supposer qu'entre aujourd'hui et l'échéance, σ_t peut prendre deux valeurs σ_1 et σ_2 sur des intervalles de longueur totale respective $T-\tau$ et τ. σ_1 et σ_2 sont supposés connus alors que τ est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[0,T]$. σ_1 reprtsentera un march6 calme alors que σ_2 représentera un march6 agité. Nous ne connaissons pas a priori les dates d'apparition de ces états agités mais seulement une certaine distribution de leur durée.

Nous avons donc :

$$\Sigma_\tau = (T-\tau)\,\sigma_1^2 + \tau\,\sigma_2^2$$

La loi de Σ_τ se déduit de la loi de τ

$$E\Sigma = (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\,E\tau + \sigma_1^2 T$$

$$Var\Sigma = (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\,Var\tau$$

Pour le calcul d'un call, nous allons supposer dans un premier temps la durée de la perturbation non aléatoire. Nous obtenons alors :

$$C = S\,N\left[\frac{\log\frac{S}{Ke^{-rT}}}{\sqrt{\Sigma_\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma_\tau}\right] - Ke^{-rT}N\left[\frac{\log\frac{S}{Ke^{-rT}}}{\sqrt{\Sigma_\tau}} - \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma_\tau}\right]$$

Cette formule permet de définir la sensibilité du call par rapport à τ, durée totale de la perturbation, comme étant la dérivée partielle $\partial C / \partial\tau$.
Un calcul élémentaire montre que l'on a :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2}\sqrt{\frac{KS}{2\pi\Sigma_\tau}}\;\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\log\frac{S}{Ke^{-rT}}\right)^2}{\Sigma_\tau} + \frac{\Sigma_\tau}{4} + rT\right)\right\}$$

Cette sensibilité est toujours positive : un accroissement de la durée de la perturbation a pour conséquence une augmentation du prix du call. En étudiant le signe de $\partial^2 C / \partial S\,\partial\tau$, on constate que, T et τ étant fixés, cette sensibilité est maximale pour :

$$S = K\,e^{-\left(r - \frac{1}{2T}\Sigma_\tau\right)T}$$

c'est à dire la valeur actualisée du prix d'exercice K au taux r diminué de la moitié de la valeur moyenne de σ_t^2.

Il est Cgalement intéressant de savoir si C est une fonction convexe ou concave de la durée de la perturbation. Le calcul de $\partial^2 C / \partial\tau^2$ montre que cette quantité est du même signe que :

$$-\Sigma_\tau^2 - 4\,\Sigma_\tau + 4\left(\log\frac{S}{Ke^{-rT}}\right)^2.$$

$\frac{\quad}{\partial\tau^2}$ change dc signe au point τ donné par :

$$\Sigma_\tau = 2\left[\sqrt{1+\left(\log\frac{S}{Ke^{-rT}}\right)^2} - 1\right],$$

racine positive du trinôme cidessus.

Mais puisque nous avons les contraintes :

$$\sigma_1^2 T \leq \Sigma_\tau \leq \sigma_2^2 T,$$

Il résulte en particulier que C est une fonction convexe de τ lorsque :

$$S \in \left]0,\ K\exp\left(-rT-\sqrt{\frac{\sigma_2^4T^2}{4}+\sigma_2^2T}\right)\right] \cup \left[K\exp\left(-rT+\sqrt{\frac{\sigma_2^4T^2}{4}+\sigma_2^2T}\right),\ +\infty\right[$$

et concave lorsque :

$$S \in \left[K\exp\left(-rT-\sqrt{\frac{\sigma_1^4T^2}{4}+\sigma_1^2T}\right),\ K\exp\left(-rT+\sqrt{\frac{\sigma_1^4T^2}{4}+\sigma_1^2T}\right)\right],$$

c'est à dire lorsque S est dans un intervalle autour de Ke^{-rT},

Si l'on suppose maintenant que la durée de la perturbation est une variable aléatoire à valeurs dans [0,T], le prix du call sera donné par une espérance :

$$\bar{C}(S,T) = E\left[C(S,T,\tau)\right] = \int_0^T C(S,T,u)\,dF_\tau(u),$$

où F_τ est la fonction cumulativ de la variable aléatoire τ.

Les considérations qui précédent et l'inégalité de Jensen permettent de comparer la valeur $\bar{C}(S,T)$ avec $C(S,T,E_\tau)$, valeur de Black et Scholes avec une volatilité moyenne. Nous retrouvons les conclusions de la partie précédente.

Le problkme essentiel reste à fixer une loi pour τ. Nous pensons qu'il est bon de laisser à l'utilisateur le soin de fixer cette loi en fonction de ses anticipations (loi binomiale, approximation par une loi normale,...).

CONCLUSION

Nous avons cherché à voir dans cet article ce qui pouvait se passer lorsque l'on relâchait uncertain nombre d'hypothèses du modèle Black et Scholes.

Nous avons peu insist6 sur le problkme fondamental qu'est le bon choix des taux sans risque. Cet aspect particulier est en cours d'étude et sera trait6 dans un article ultérieur.

Nous avons surtout évoqué les problèmes liés à la volatilité. Nous avons cherché à estimer la valeur d'un call lorsque celle-ci varie de façon aléatoire. Comme nous pensons qu'il n'est pas possible de se prémunir contre le risque de volatilité, nous avons renoncé à tout raisonnement d'arbitrage. Cela nous conduit à introduire des paramètres qui ne sont pas nécessairement estimables empiriquement.

Ainsi lorsque nous supposons une volatilité à deux états, la probabilité $1-\lambda$ de l'état agité ou encore celle $2\lambda(1-\lambda)$ de changement d'état de la volatilité doivent être fixées par l'opérateur suivant sa perception du marché. Ce modèle nous conduit à trouver une formule explicite pour un call, différant sensiblement de la formule de Black et Scholes.

Lorsque au contraire nous cherchons à modéliser la durée totale de la perturbation qui agite le marché, c'est la loi de probabilité elle-même qu'il convient de préciser. Il est possible de donner un modèle avec une loi particulière, l'opérateur aura ainsi la possibilité de faire des simulations en faisant varier les paramètres de cette loi.(c.f. annexe)

REFERENCES

(1) P. Artus. Peut-on utiliser la notion de duration stochastique pour évaluer le risque de taux d'intérêt en France? Banque de France, Direction Générale des Etudes, février 1988.

(2) J.C. Aucros. Finance, options et obligations convertibles, 2è éd. Economica, 1987

(3) C. Bito. Les options sur contrats futures. Introduction d'un processus de diffusion mixte et application aux devises. Fiance, vol 8-2, décembre 1987.

(4) Black and Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, mai-juin 1973.

(5) Box and Jenkins. Time Series Analysis and Control. Holden Day, 1976.

(6) Brennan and Schwartz. Alternative Methods for Valuing Debt Options. Finance, vol 4, Février 1983.

(7) H. Choe. Note sur le calcul différentiel stochastique. Fiance, vol 4, 1983.

(8) G. Courtadon. Une synthèse des modèles d'évaluation d'option sur obligations. Fiance, vol 6-2, décembre 1985.

(9) Cox, Ingersool and Ross. An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices. Econometrica, vol 53-2, mars 1985.

(10) Cox, Ingersool and Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rate. Econometrica, vol 53-2, mars 1985.

(11) Cox and Rubenstein. Options Market. Prentice Hall, 1985.

(12) Dehapiot et Manchet. Les nouveaux produits financiers et leur modélisation mathématique. Banque Paribas, Ecole Polytechnique, juin 1988

(13) Dehapiot et Manchet. Modèle de volatilité aléatoire et prix des options, proposé pour publication pour Finance, sept 1989.

(14) Engle, Lilien, and Robins. Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure : the ARCH-M Model. Econometrica, vol 55-2, mars 1987.

(15) Hull and White. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility. Journal of finance vol 42-2, juin 1987.

(16) R.C. Merton. Theory of rational option pricing. Bell Journal of Economics Management Science, printemps 1973.

(17) L. Scott. Option Pricing When the variance Changes Randomly....., J.F.Q.A., vol 22-4,1987.

LISTE DES CARACTERES EMPLOYES

Lettres grecques

a	ALPHA	π	PI
β	BETA	ρ	RHO
Y	GAMMA	1:	SIGMA
λ	LAMBDA	1:	TAU
μ	MU	Σ	GRAND SIGMA

Symboles **mathématiques**

e	BASE DES LOGARITHMES NEPERIENS
$+\infty$	PLUS L'INFINI
$\sqrt{\ }$	RACINE CARRE
$\int$	SYMBOLE INTEGRALE
Σ	SYMBOLE DE SOMMATION
$\frac{\partial}{\partial x}$	DEFUVEE PARTIELLE PREMIERE
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$	DERIVEE PARTIELLE SECONDE

Lettres indicées - Minuscules

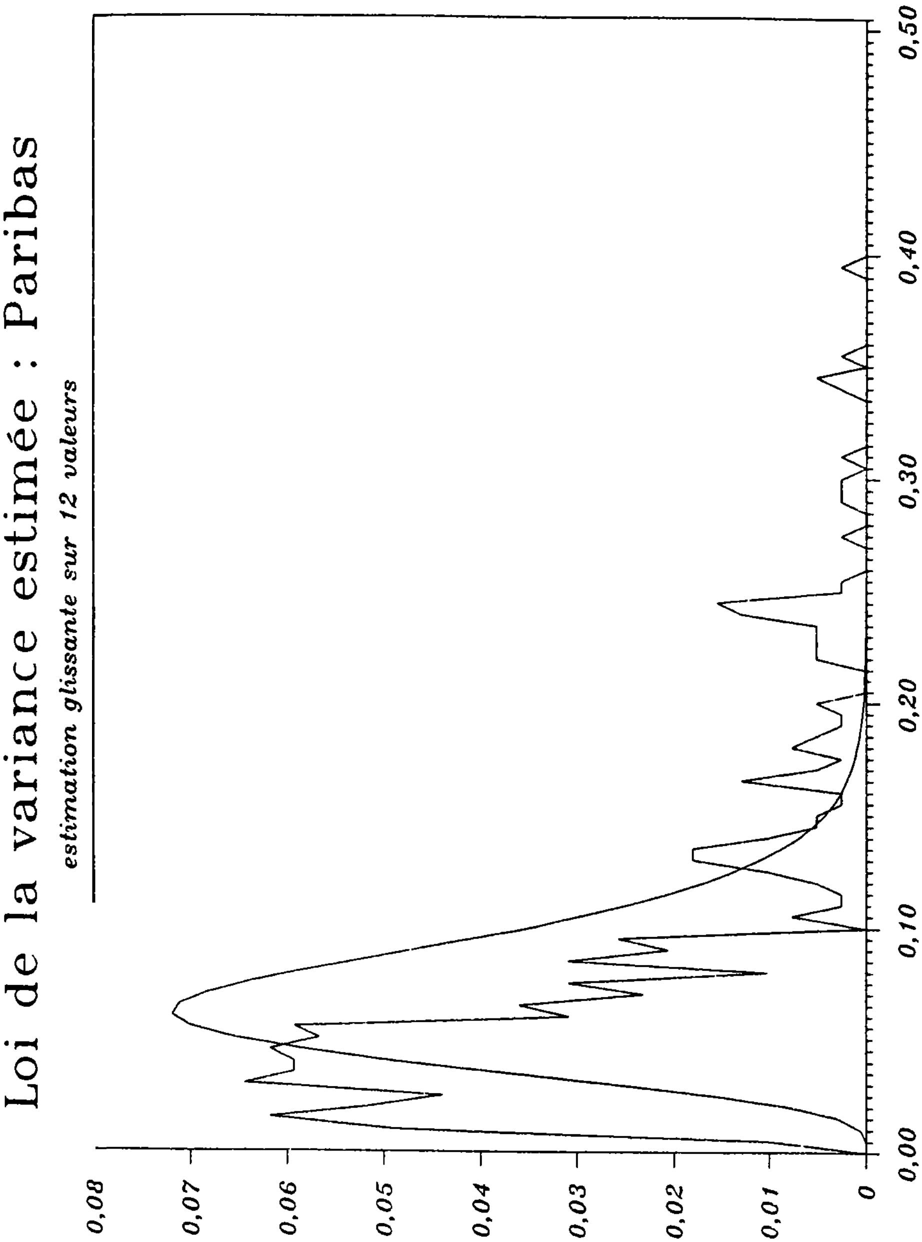
t^*	t ETOILE
t_0	t ZERO
d_t	d INDICE t
d_{to}	d INDICE t ZERO
dp	d INDICE ρ
d	d INDICE GRAND SIGMA
d_ρ	d INDICERHO
r_s	r INDICE s

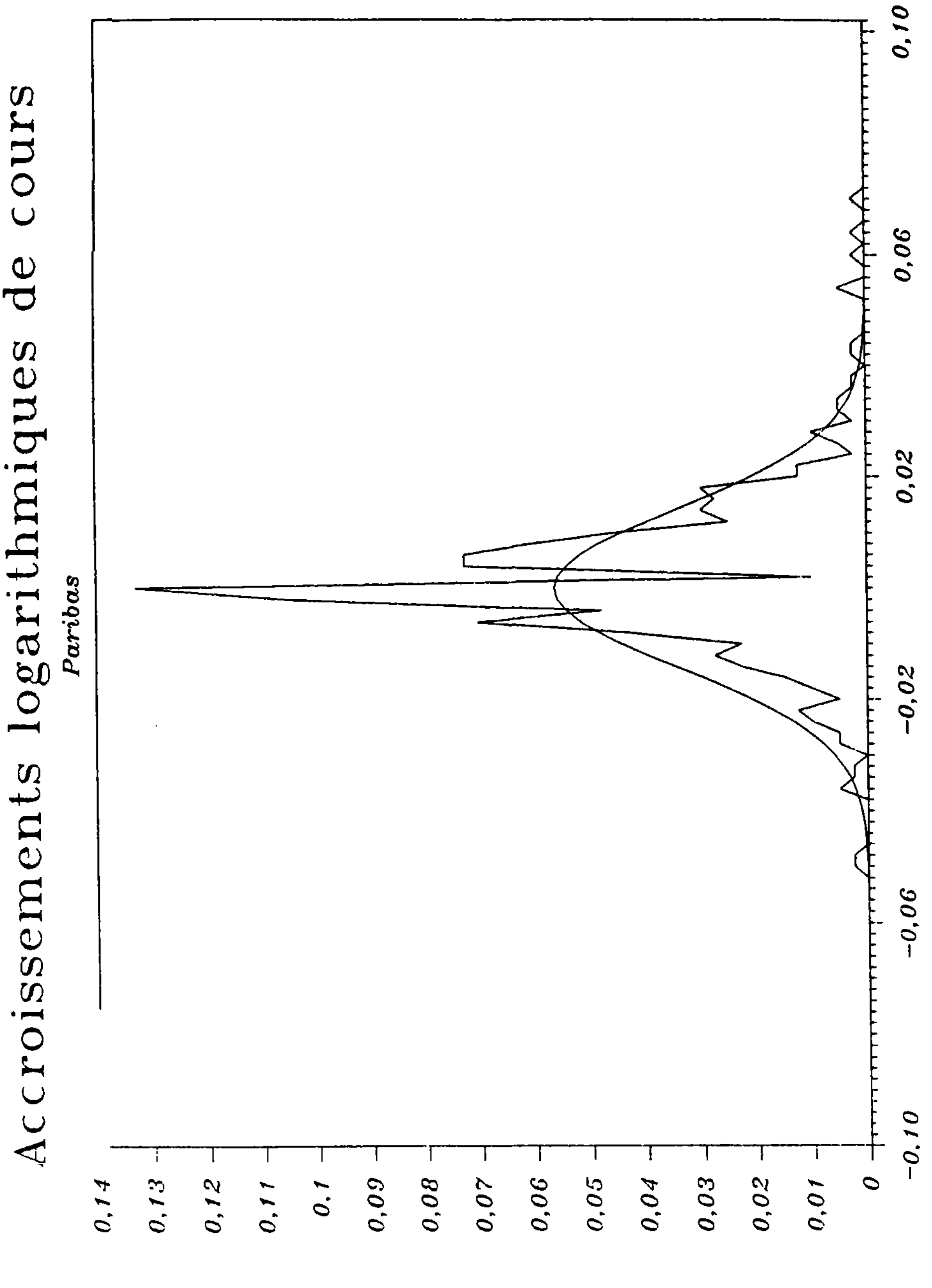
LETTRES INDICEES - MAJUSCULES

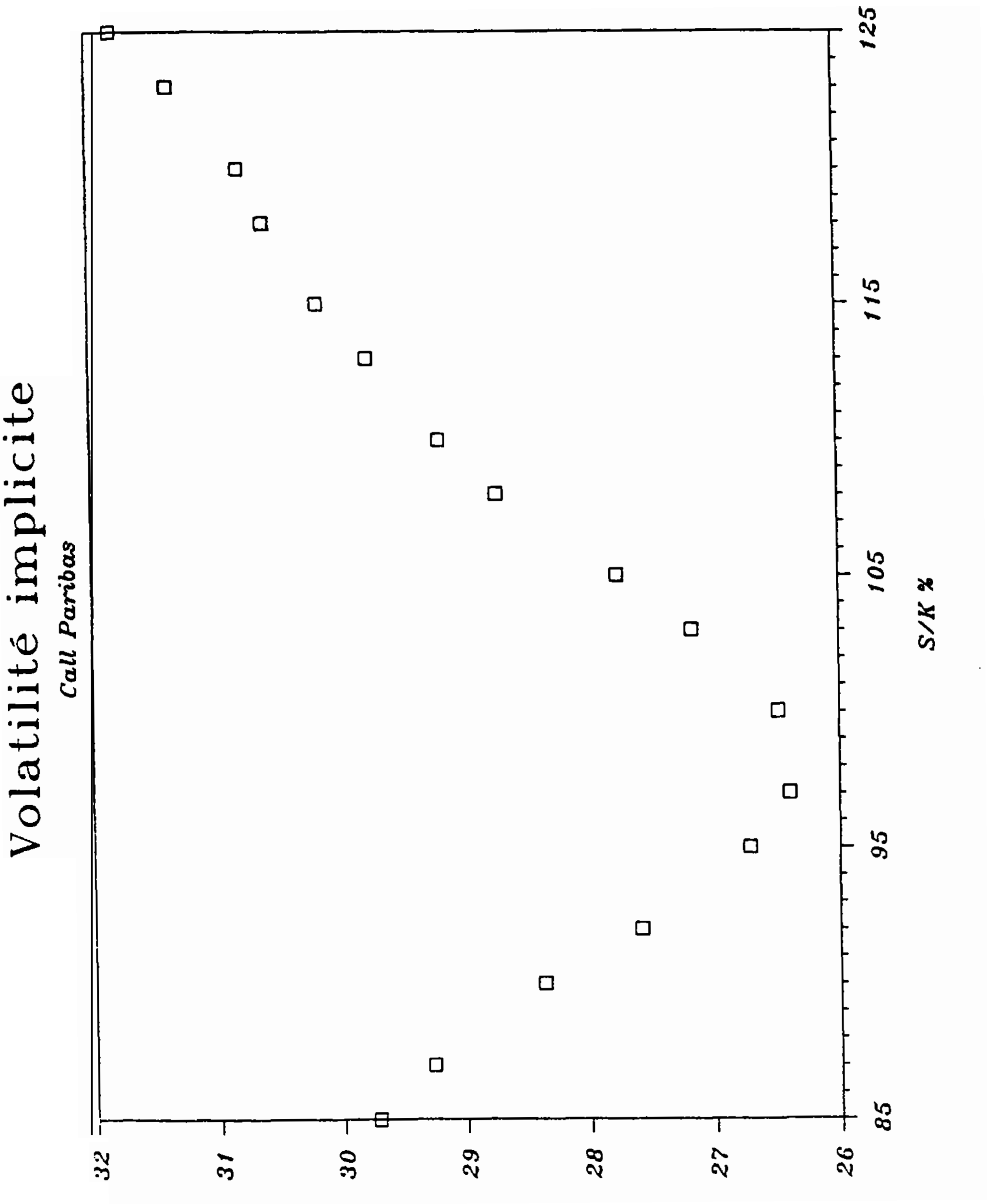
C_t	CINDICE t
C_{t^*}	C INDICE t*
C_μ	CINDICE MU
C_Σ	C INDICE GRAND SIGMA
C_ρ	C INDICE RHO
$\bar{C}$	C BARRE
C_σ^{-1}	C INDICE SIGMA PUISSANCE MOINS 1
F_Σ	F INDICE GRAND SIGMA
F_ρ	F INDICE RHO
$\hat{M}$	MCHAPEAU
N'	NPRIME
S_t	S INDICE t
S_{t^*}	S INDICE t*
V_t	V INDICE t
X_t	X INDICE t
$X_{t,i}$	X INDICE t ET i

LETTRES GRECQUES

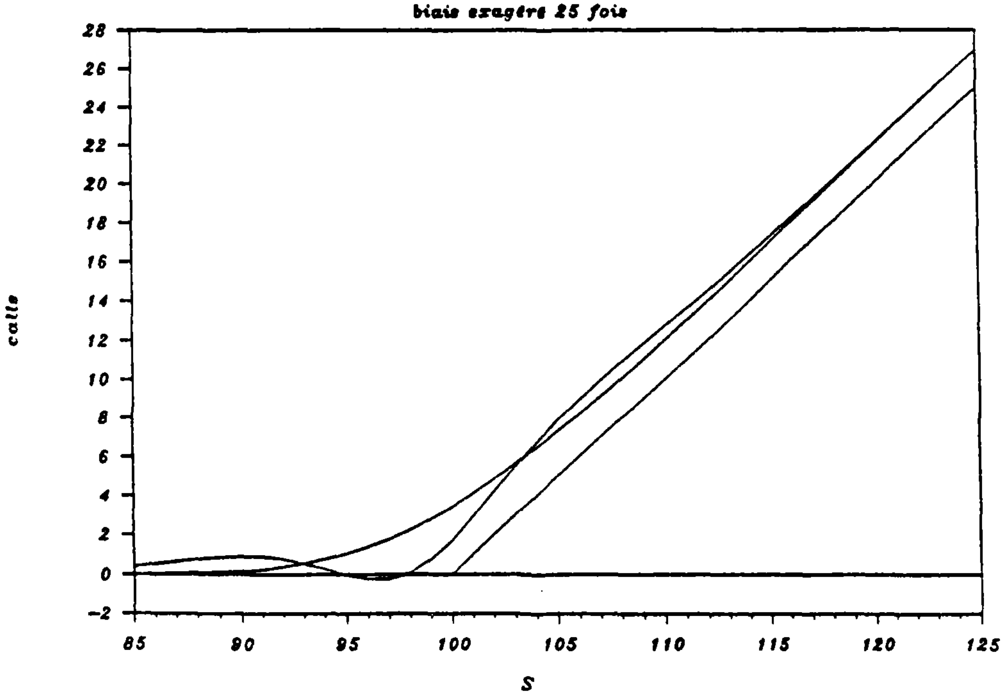
σ_t	SIGMA INDICE t
σ_t^2	SIGMA INDICE t AU CARRE
σ_0	SIGMA INDICE ZERO
σ_1	SIGMA INDICE UN
σ_2	SIGMA INDICE DEUX
σ_{imp}	SIGMA INDICE IMP
Σ_ρ	GRAND SIGMA INDICE p
Σ_τ	GRAND SIGMA INDICE TAU


Loi de la variance estimée : Paribas
estimation glissante sur 12 valeurs
0,00
0,10
0,20
0,30
0,40
0,50
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0

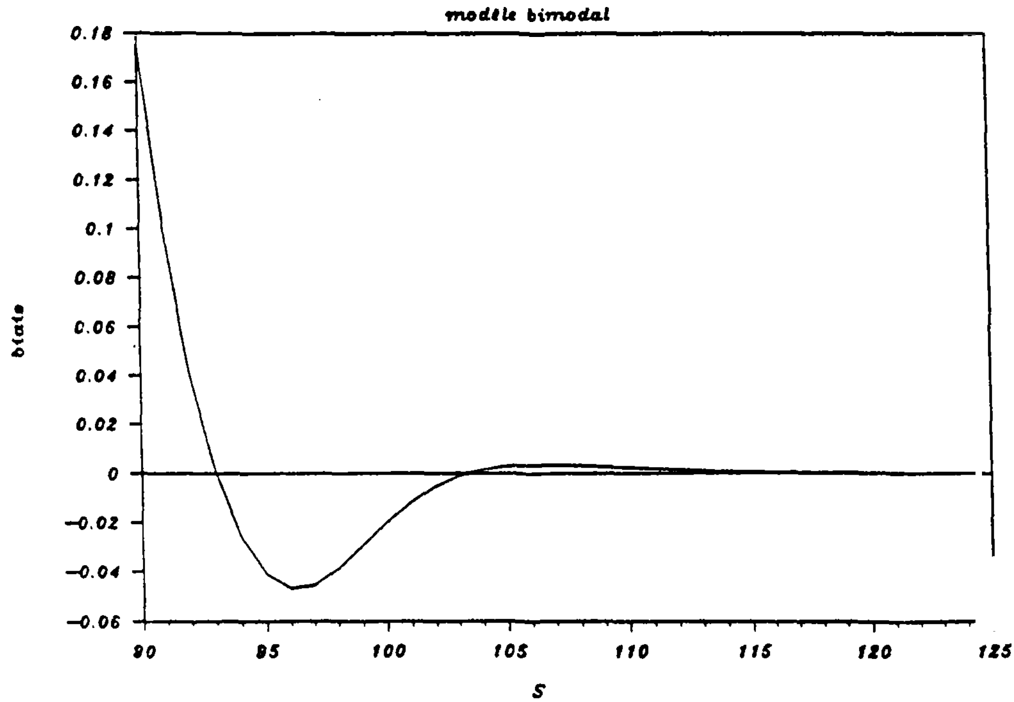

Accroissements logarithmiques de cours
Paribas
0,14
0,13
0,12
0,11
0,1
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
-0,10
-0,06
-0,02
0,02
0,06
0,10


Volatilité implicite
Call Paribas
S/K %
85
95
105
115
125
26
27
28
29
30
31
32

Estimation du call, modèle bimodal

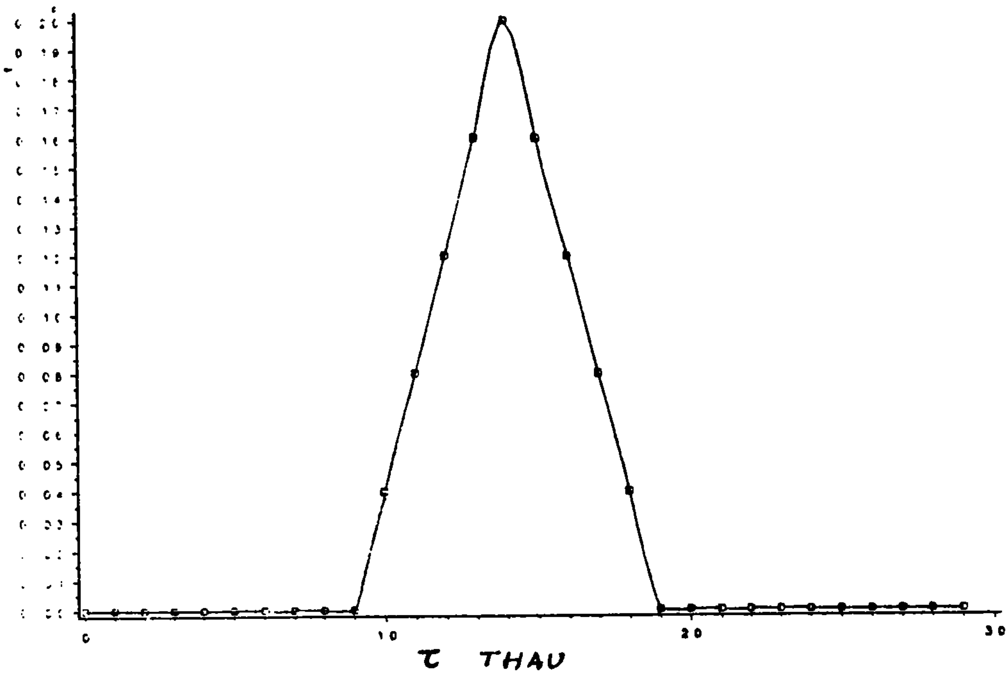


Correction du call Black et Scholes



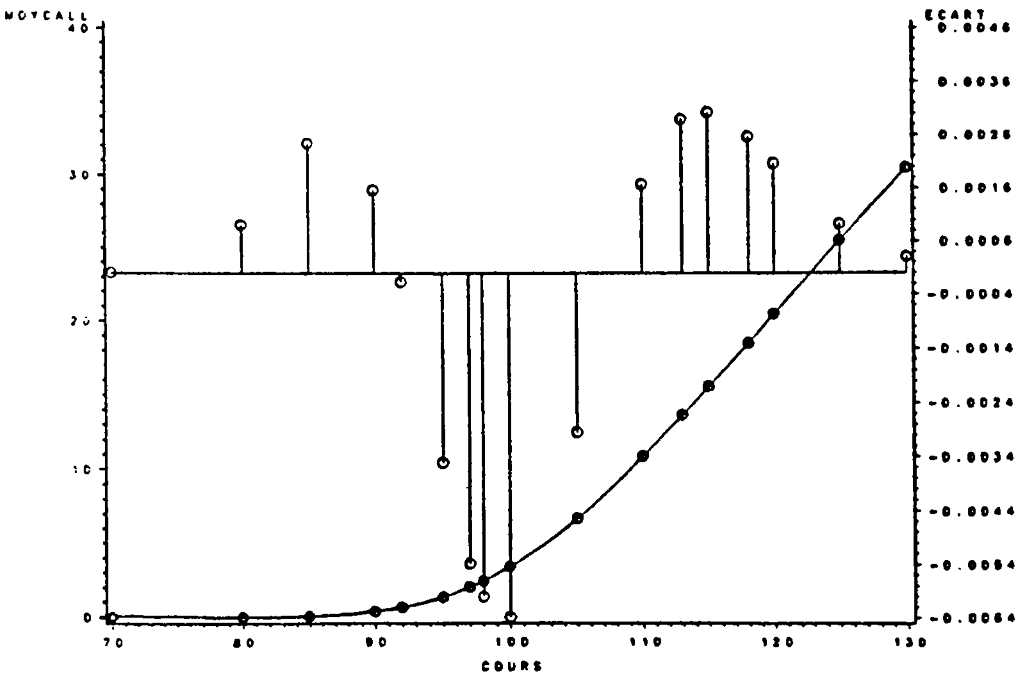
Structure de la probabilite

Approche de la loi normale

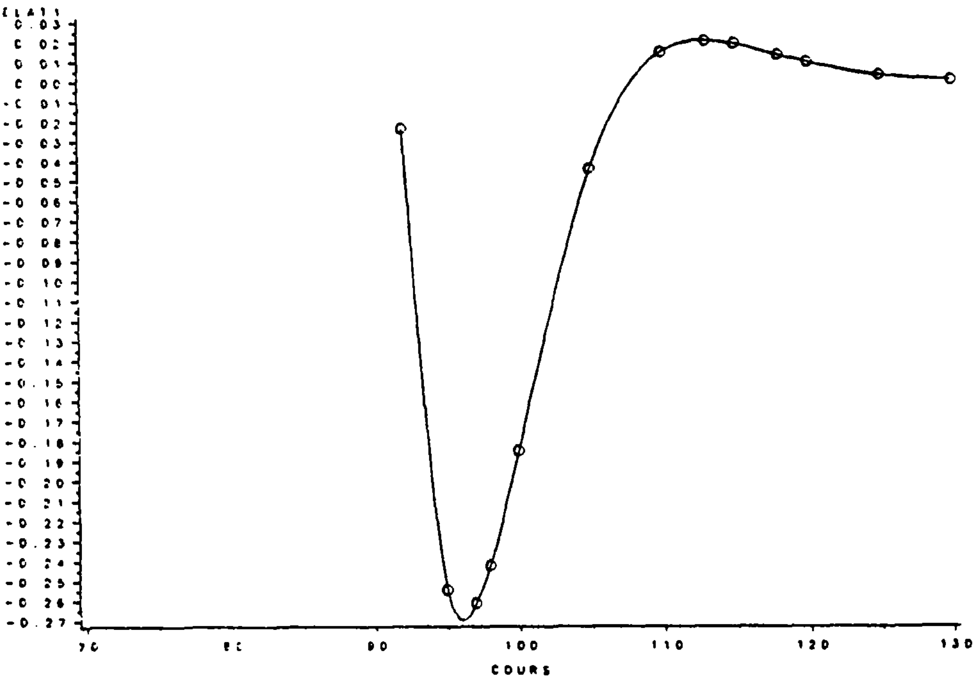


Moyenne des calls et call du τ moyen

Indication des ecarts



Courbe des ecarts relatifs

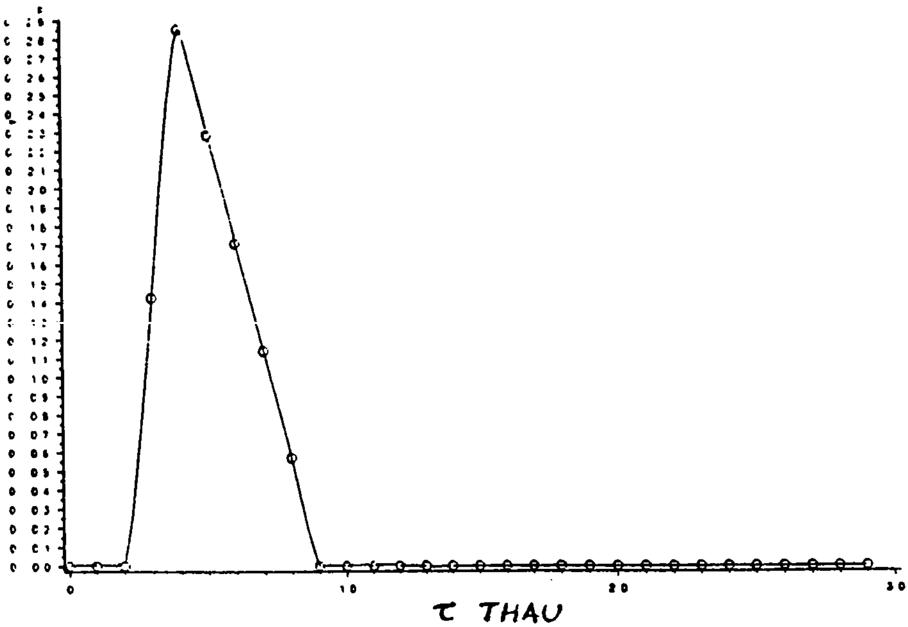


Les ecarts relatifs sont exprimes en pourcentage

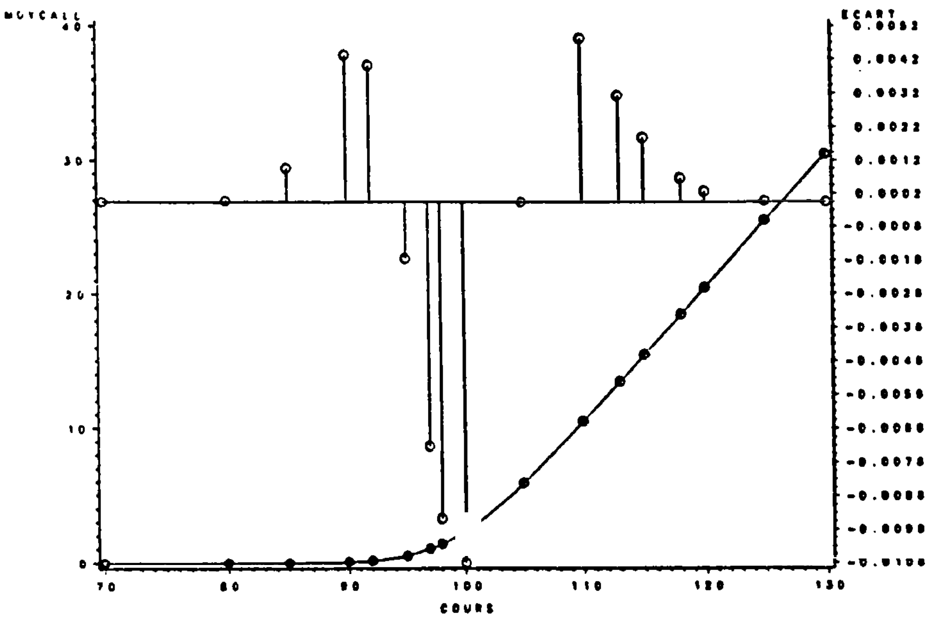
statistiques de la valeur absolue de l'ecart relatif

OBS	_TYPE_	_FREQ_	_STAT_	ECABS
1	0	17	N	17.0000
2	0	17	MIN	0.0010
3	0	17	MAX	83.8132
4	0	17	MEAN	5.9257
5	0	17	STD	20.2862

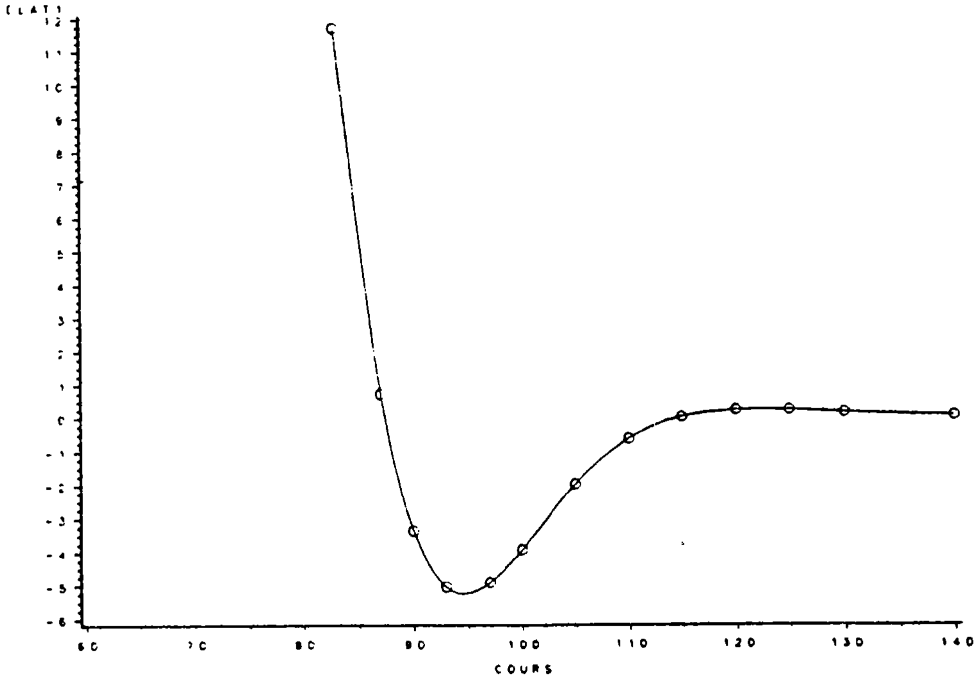
Structure de la probabilite



Moyenne des calls et call du τ moyen



Courbe des ecarts relatifs



statistiques de la valeur absolue de l'ecart relatif

Analysis Variable : ECABS

N Obs	Minimum	Maximum	Mean	Ltd Dev
14	0.0624754	1169.13	99.1392576	311.1841740