

Techniques d'Estimation pour le Modèle de Black & Scholes

Jacques Janssen, Malika Saib et Khamiss Taous

Abstract

Dynamic models based on univariate lognormal diffusion processes are applied in many scientific fields, and more particularly in economics and finance. One of the classical problems concerning these diffusion processes is that of statistical inference.

The present paper develops the estimation of the geometric Brownian motion parameters. We consider essentially the Black & Scholes model as well as the adaptation in finance of two estimation methods, based on the likelihood function. The first, called "discrete method", considers the transition density of the diffusion. The second is based on the density function of the first passage time through constant boundaries.

Numerical results based on historical data of a Belgian stock are given.

Résumé

Les modèles dynamiques basés sur les processus de diffusion log-normal univariés sont d'application dans de nombreux domaines scientifiques, et plus particulièrement dans le domaine économique et financier.

L'un des problèmes classiques concerne l'estimation statistique des paramètres de ces modèles.

Ce présent article développe l'estimation des paramètres du modèle Brownien géométrique.

Nous nous intéressons principalement au modèle de Black & Scholes ainsi qu'à l'adaptation en finance de deux méthodes d'estimation basées sur la fonction de vraisemblance. La première dite "méthode discrète" considère la fonction de densité de transition du processus de diffusion. La seconde se base sur la fonction de densité du temps du premier passage du processus à travers une borne constante.

Nous illustrons et comparons ces résultats obtenus sur le cours d'un actif financier belge.

Keywords

Brownian motion, paths, first passage time.

Mots Clefs

Brownien géométrique, trajectoires, premier de temps de passage.

Techniques d'Estimation pour le Modèle de Black & Scholes

Introduction :

Etant donné le niveau d'intégration et d'internationalisation des marchés financiers, l'évolution des actifs financiers est essentiellement décrite par des processus continus, et plus particulièrement par des processus de diffusion log-normal. En effet, ces modèles dynamiques ont connu durant ces dernières années un intérêt croissant dans le domaine de la Finance. On les retrouve, d'ailleurs, dans les travaux de Black et Scholes et dans bien d'autres plus récents. Ainsi, la formule de Black et Scholes qui a été développée pour des actifs dont le comportement est celui du mouvement Brownien géométrique et qui permet de calculer le prix d'une option, a apporté en 1973 une contribution majeure à la théorie financière qui a eu un impact énorme, non seulement au niveau théorique mais également au niveau pratique puisque le modèle de Black & Scholes est, sans aucun doute, le premier modèle théorique d'évaluation à avoir été utilisé de manière aussi intensive par les professionnels à des fins d'évaluation, de spéculation ou simplement de couverture.

Cependant, le premier problème, auquel on se trouve confronté, et qui concerne les modèles en général est celui de l'estimation des paramètres. Ce problème, purement technique, doit être correctement traité si l'on souhaite disposer d'un instrument fiable de gestion de portefeuille. Quelques méthodes ont été développées tant dans le cas de trajectoire discrète (Tintner et Sengupta (1972)), que dans le cas de trajectoire continue (Guitierrez et al (1986)) mais leurs applications en Finance ne peuvent se faire de manière directe. Elles requièrent des ajustements préliminaires.

L'essentiel de cet article consiste en l'adaptation, dans le domaine financier, de deux méthodes d'estimation des paramètres du modèle log-normal univarié (Brownien géométrique).

Dans le premier paragraphe, nous présentons le modèle de base ainsi qu'un rappel de ses principales propriétés. Le second, est exclusivement consacré aux techniques d'estimation. Nous commençons par un bref aperçu d'une méthode courante, et nous illustrons, ensuite, deux méthodes d'estimation basées sur la fonction de vraisemblance. La première, dite "méthode discrète", considère la fonction de densité de transition du processus de diffusion. La seconde, propose l'estimation des paramètres du modèle via l'observation du premier temps de passage du processus à travers une borne constante dont la densité est connue.

Le procédé d'adaptation de ces deux méthodes en Finance est systématiquement exploité dans le troisième paragraphe. Nous terminons ce dernier par une application sur le marché belge et plus particulièrement sur le cours de l'action GIB.

I/ Modèle de base :

Soient un espace de probabilité filtré $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ satisfaisant les conditions usuelles et $z = \{z(t), t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard adapté à la filtration $(F_t) = (\sigma(z(s), s \leq t))$. On définit le processus $X = \{X(t), t \geq 0\}$ par la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dz(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$X = \{X(t), t \geq 0\}$ est un processus stochastique à valeurs dans R^+ représentant le prix d'un actif financier. On dit qu'il suit un mouvement Brownien géométrique où μ et σ sont des paramètres réels modulant le comportement de l'actif concerné.

Propriété :

Posons $Y(t) = \log(X(t))$ et $m = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$. En appliquant le lemme d'Itô, on obtient l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} dY(t) = mdt + \sigma dz(t) \\ Y(0) = y_0 = \log(x_0) \end{cases} \quad (1.2)$$

Il en résulte que $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ est un processus de Wiener généralisé de drift m et de variance σ^2 tel que :

$$Y(t) - Y(0) = \log(X(t)/X(0)) \sim N(mt, \sigma^2 t)$$

d'une manière équivalente, $X(t)$ est un processus de diffusion log-normal caractérisé par la fonction de densité de transition suivante, pour $s \leq t$:

$$X(s) = y$$

$$f(x, t / y, s) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi(t-s)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(t-s)} \left[\log x - \log y - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) \right]^2 \right\} \quad (1.3)$$

où μ et σ^2 sont des paramètres à estimer.

II/ Estimation des paramètres :

Ce paragraphe est consacré aux techniques d'estimation des paramètres μ et σ^2 du modèle (1.1) ci-dessus. D'un point de vue pratique, l'estimation de ces paramètres se fait souvent à partir de données historiques (*Rajna Gibson (1991)*):

Dans ce qui suit, on note $m = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$,

$$R_t = \log(X_t / X_{t-1}),$$

r_t : l'observation de la v.a. R_t à un instant donné t .

Etant donné que $R_i \sim N(m, \sigma^2)$, si on dispose de n observations (r_1, \dots, r_n) , on peut estimer m et σ^2 respectivement de la façon suivante:

$$\hat{m} = \hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = \bar{r} \quad (2.1)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \hat{m})^2 = s^2 \quad (2.2)$$

Il est bien connu que les lois des variables aléatoires des estimateurs ci-dessus sont respectivement $N(m, \sigma^2/n)$ et $\frac{\sigma^2}{n} \cdot \chi_{n-1}^2$.

L'estimateur de μ découle directement de la propriété d'additivité de la fonction d'espérance.

$$\hat{\mu} = \bar{r} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2$$

Les propriétés de ces estimateurs sont reprises dans la proposition suivante.

Proposition 1 : (Cedro L., Gualtierotti A.F.(1994))

$\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ ont les représentations suivantes :

$$\hat{\mu} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} N + \frac{\sigma^2}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} N_i^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} N_i^2$$

où N, N_1, \dots, N_{n-1} sont indépendantes normales réduites.

Ces estimateurs sont asymptotiquement normaux. Leurs moments ne dépendent que du nombre et de la durée des observations. Ils sont biaisés mais par un simple ajustement, qui consiste à multiplier la formule (2.2) par le facteur $n/(n-1)$, on retrouve les estimateurs non biaisés de μ et σ^2 .

Les lois des grands nombres justifient l'usage de \bar{r} et s^2 comme estimateurs de m et σ^2 respectivement : On sait que $\bar{R} \xrightarrow{PS} m$ et $S^2 \xrightarrow{PS} \sigma^2$. (\bar{R} et S^2 sont respectivement les variables aléatoires moyenne et variance empirique de l'échantillon d'observations \bar{r} et s^2).

Nous présentons maintenant deux autres techniques d'estimation basées sur la fonction du maximum de vraisemblance. La première est dite "discrète". La seconde, "méthode via le temps du premier passage".

II.1/ Méthode discrète :

Comme nous l'avons mentionné au dessus, cette méthode consiste à estimer les paramètres μ et σ^2 du processus de diffusion log-normal $X(t)$, par la construction de la fonction de vraisemblance à partir de la densité de transition (1.3).

Pour ce faire, on considère b trajectoires indépendantes du processus $X, (i=1, \dots, b)$, et on définit :

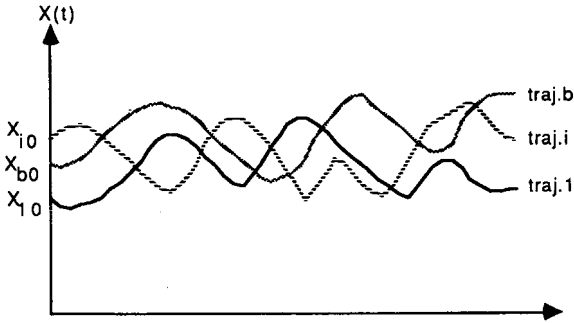


Fig. 1

- n_i : nombre d'observations discrètes dans la trajectoire $i, (i=1, \dots, b)$.
- x_{ij} : jème observation de la ième trajectoire de la v.a. $X_{ij}, (i=1, \dots, b; j=1, \dots, n_i)$.
- t_{ij} : l'instant de la jème observation de la ième trajectoire, $(i=1, \dots, b; j=1, \dots, n_i)$.

On suppose que $P\{X_{i0} = x_{i0}\} = 1, (i=1, \dots, b)$.

la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(x_{ij} / \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^{n_i} f(x_{ij}, t_{ij} / x_{ij-1}, t_{ij-1})$$

où $f(x_{ij}, t_{ij} / x_{ij-1}, t_{ij-1})$ est la fonction de densité de transition (1.3).

La résolution des équations de vraisemblance fournit les estimateurs suivants pour μ et σ^2 : (Gutiérrez, Román (1993))

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^b \log\left(\frac{x_{i n_i}}{x_{i0}}\right)}{\sum_{i=1}^b (t_{i n_i} - t_{i0})} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \tag{2.3}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} (t_{ij} - t_{ij-1}) \left[\frac{\log\left(\frac{x_{ij}}{x_{ij-1}}\right)}{t_{ij} - t_{ij-1}} - \frac{\sum_{i=1}^b \log\left(\frac{x_{i n_i}}{x_{i0}}\right)}{\sum_{i=1}^b (t_{i n_i} - t_{i0})} \right]^2}{k} \tag{2.4}$$

où $k = \sum_{i=1}^b n_i$ représente le nombre total d'observations.

Proposition 2 :

$\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ ont les représentations suivantes :

$$\hat{\mu} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{\sigma N}{\sqrt{\sum_{i=1}^b (t_{in_i} - t_{i0})}} + \frac{\sigma^2}{2k} \sum_{i=1}^{k-1} N_i^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{k} \sum_{i=1}^{k-1} N_i^2$$

où N, N_1, \dots, N_{k-1} sont indépendantes normales réduites.

Preuve : (voir annexe)

Pour les mêmes raisons mentionnées ci-dessus et par le fait que ces estimateurs sont ceux du maximum de vraisemblance, ils ont les propriétés d'être, sous les conditions générales, consistants, asymptotiquement normaux et asymptotiquement efficaces. Ces estimateurs sont biaisés mais le biais peut être corrigé par un simple ajustement.

Dans le cas particulier où : $n_i = n, i=1, \dots, b$
 $t_{ij} = t_j, i=1, \dots, b ; j=1, \dots, n$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^b \log \left(\frac{x_{in}}{x_{ij-1}} \right)}{b(t_n - t_0)} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \left[\frac{\log \left(\frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} \right)}{t_j - t_{j-1}} - \frac{\sum_{i=1}^b \log \left(\frac{x_{in}}{x_{i0}} \right)}{b(t_n - t_0)} \right]^2}{bn}$$

Lois et Intervalles de Confiance :

On s'intéresse maintenant au paramètre bi-dimensionnel (m, σ^2) . Une fonction pivotale possible est la fonction bi-dimensionnelle de composantes :

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^b (t_{in_i} - t_{i0})}{\sigma}} \frac{(\hat{m} - m)}{\sigma} \quad \text{et} \quad k \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

En effet, l'indépendance entre la moyenne (\hat{m}) et la variance empirique ($\hat{\sigma}^2$) d'un échantillon aléatoire de distribution normale fait que la loi de ce couple est la loi produit $N(0,1) \otimes \chi_{k-1}^2$ (voire (A.1) et (A.4) de l'annexe), qui est bien fixe.

En d'autres termes, même si la fonction pivotale dépend de l'échantillon d'observation et des paramètres m et σ^2 , pour lesquels on désire une région de confiance, sa distribution ne fait intervenir ni les paramètres en question, ni aucun autre paramètre.

Choissant α_1 et α_2 tels que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2$, on obtient une région de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour (m, σ^2) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \frac{\hat{\sigma}^2}{z_{1-\alpha_1}^2} \leq \sigma^2 \leq k \frac{\hat{\sigma}^2}{z_{\alpha_2}^2} \\ \sum_{i=1}^b (t_{i_n} - t_{i_0}) \frac{(\hat{m} - m)^2}{\sigma^2} \leq u^2 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$z_{1-\alpha_1}$ et z_{α_2} sont lus dans la table de χ^2 à $(k-1)$ degré de liberté où α_1' et α_2'' sont tels que $\alpha_2 = \alpha_1' + \alpha_2''$
 u est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi $N(0,1)$.

Remarque :

La région de confiance bi-dimensionnelle (2.5) est une généralisation de celle fournie par *Gourieroux et Monfort (1989)*. En effet, on la retrouve en suivant la même démarche mais en considérant plusieurs trajectoires au lieu d'une seule et en prenant les variations de temps, différentes de l'unité, entre les instants des observations.

A partir de cette région de confiance, on peut en déduire celle de μ . Ainsi, après de simples manipulations, l'intervalle de confiance de μ s'écrit :

$$\left[\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \left(1 - \frac{k}{z_{1-\alpha_1}^2} \right) - \zeta \right] \leq \mu \leq \left[\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \left(1 - \frac{k}{z_{\alpha_2}^2} \right) + \zeta \right] \quad (2.6)$$

$$\text{où } \zeta = u \cdot \sqrt{k} \cdot \hat{\sigma} \cdot \left[z_{\alpha_2}^2 \cdot \sum_{i=1}^b (t_{i_n} - t_{i_0}) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

II.2/ Méthode via le temps du premier passage :

Cette méthode propose l'estimation des paramètres du processus de diffusion log-normal $X(t)$, via l'observation de l'instant de premier passage du processus à travers une borne constante notée S .

Comme dans la précédente méthode, on considère également b trajectoires indépendantes ayant chacune n_i observations ($i=1, \dots, b$). On suppose qu'elles partent toutes du même point initial x_0 c'est-à-dire que $P\{X_i(t_0) = x_0\} = 1$, ($i=1, \dots, b$).

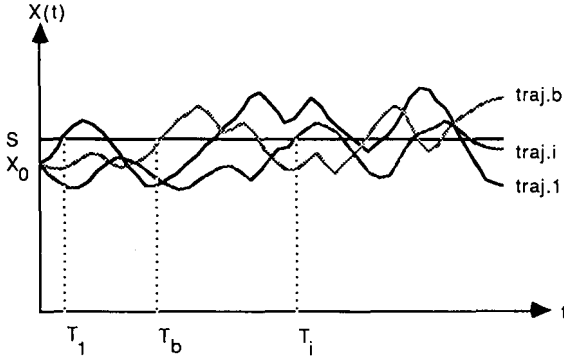


Fig. 2

Proposition 3 : (Raj S. Chhikara, Leroy Folks J. (1988)

Soit $\{Y(t), t \geq 0\}$ le processus de Wiener généralisé de drift $m > 0$ et variance σ^2 , décrit par le modèle (1.2). Considérons maintenant T le premier temps de passage de $Y(t)$ par le point $a > y_0$, défini comme suit :

$$T = \inf\{t \mid Y(t) = a\} \quad t > 0$$

Alors pour $m > 0$, T suit une loi Gaussienne Inverse de paramètres ϕ et λ et est noté :

$$T \rightarrow IG(\phi, \lambda)$$

où ϕ et λ sont des paramètres strictement positifs représentant respectivement la moyenne de la distribution et un paramètre d'échelle dont les expressions s'écrivent :

$$\phi = \frac{a - y_0}{m} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{(a - y_0)^2}{\sigma^2}$$

Conséquences :

D'une manière équivalente, T est le premier temps de passage du processus $X(t) = \exp(Y(t))$ du modèle (1.1) par le point $S = \exp(a)$. En reformulant la propriété ci-dessus on a :

$$T = \inf\{t \mid X(t) = S\} \quad t > 0$$

Les paramètres φ et λ de sa distribution Gaussienne Inverse s'écrivent respectivement :

$$\varphi = \frac{\log\left(\frac{S}{x_0}\right)}{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2} \qquad \lambda = \frac{\left[\log\left(\frac{S}{x_0}\right)\right]^2}{\sigma^2}$$

Sa fonction de densité, étant donné $X(t_0) = x_0$, s'écrit donc sous la forme :

$$f(S, t / x_0, t_0) = \frac{\log\left(\frac{S}{x_0}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{\left[\log\left(\frac{S}{x_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-t_0)\right]^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right\}$$

L'espérance et la variance de T sont données par les formules suivantes :

$$E[T] = \frac{\log\left(\frac{S}{x_0}\right)}{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$V[T] = \frac{\sigma^2 \log\left(\frac{S}{x_0}\right)}{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^3}$$

Estimation :

Pour la simplicité de notation, on suppose $t_0 = 0$.

Soient T_1, \dots, T_b les variables aléatoires des instants du premier temps de passage à travers la borne constante S dans les b trajectoires, de valeurs observées t_i , $i=1, \dots, b$, ($t_i > 0$ et $t_i < \infty$).

La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(S; t_1, \dots, t_b / x_0) = \prod_{i=1}^b f(S; t_i / x_0)$$

$$= \frac{\left[\log\left(\frac{S}{x_0}\right)\right]^b}{(2\pi)^{\frac{b}{2}} \sigma^b \prod_{i=1}^b t_i^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^b \frac{\left[\log\left(\frac{S}{x_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_i\right]^2}{2\sigma^2 t_i}\right\}$$

La résolution des équations de vraisemblance nous donne les estimateurs suivants : (Gutiérrez, Román (1993)).

$$\hat{\mu} = \frac{\log\left(\frac{S}{x_0}\right)}{\bar{i}} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left[\log\left(\frac{S}{x_0}\right)\right]^2}{b} - \sum_{i=1}^b \left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{\bar{i}}\right) \quad (2.7)$$

où $\bar{i} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b t_i$

Etant des estimateurs de maximum de vraisemblance, ces derniers sont, sous les conditions générales, asymptotiquement normaux, consistants et asymptotiquement efficients.

Proposition 4 : (Raj S. Chhikara, Leroy Folks J. (1988))

Soit \bar{t}_h la moyenne harmonique de l'échantillon tel que :

$$\bar{t}_h = \left(\frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \frac{1}{t_i} \right)^{-1}$$

Alors on peut réécrire le terme $\frac{b}{\sum_{i=1}^b} \left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{\bar{i}} \right)$ de l'expression (2.7) comme la différence $(1/\bar{t}_h - 1/\bar{i})$.

Comme $\bar{i} \geq \bar{t}_h$, l'estimateur $\hat{\sigma}^2$ est non négatif.

Lois et Intervalles de Confiance :

Notons : $a = \log\left(\frac{S}{x_0}\right)$

$$m = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2$$

$$V = \sum_{i=1}^b \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{\bar{T}} \right) \quad \text{où } \bar{T} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b T_i$$

Théorème : (Raj S. Chhikara, Leroy Folks J. (1988))

Soient T_1, T_2, \dots, T_b des variables aléatoires iid telles que les valeurs de l'espérance de $T, T^2, 1/T$ et $1/\sum T_i$ existent et sont non nulles. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que T_1, T_2, \dots, T_b soient distribuées selon une Gaussienne Inverse est que $\sum T_i$ et $\sum T_i^{-1} - b^2(\sum T_i)^{-1}$ soient indépendamment distribués.

Il en résulte que \bar{T} et V sont indépendamment distribués tels que :

$$\bar{T} \rightarrow IG\left(\frac{a}{m}, b\frac{a^2}{\sigma^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{\sigma^2}V \rightarrow \chi_{b-1}^2$$

L'indépendance des deux statistiques \bar{T} et V découle de la propriété de reproductivité de la famille exponentielle de la distribution Gaussienne Inverse.

Propriété : (Raj S. Chhikara, Leroy Folks J. (1988))

Si $T \rightarrow IG(\phi, \lambda)$, alors l'espérance de la variable aléatoire $W = T^{-1}$ existe et est donnée par la formule suivante :

$$E(W) = \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\lambda}$$

Grâce à la propriété ci-dessus, on peut mettre les estimateurs sans biais de μ et σ^2 sous la forme :

$$\hat{\mu} = \frac{\log\left(\frac{S}{x_0}\right)}{\bar{t}} + \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b \log\left(\frac{S}{x_0}\right)} \right) \quad (2.8)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left[\log\left(\frac{S}{x_0}\right) \right]^2}{b-1} \sum_{i=1}^b \left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{\bar{t}} \right) \quad (2.9)$$

On s'intéresse maintenant à la région de confiance de niveau $(1-\alpha)$ pour le couple de paramètres (m, σ^2) , fondée sur la fonction pivotale bi-dimensionnelle de composantes :

$$H = \frac{\sqrt{b}(m\bar{T} - a)}{\sigma\sqrt{\bar{T}}} \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{\sigma^2}V$$

En effet, la région critique uniformément sans biais, $k_1 < \bar{T} < k_2$, coorespond à $|H| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ où $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est, soit le quantile de pourcentage $100(1-\alpha/2)$ de la loi Normale standard, soit celui de la loi de Student à $(b-1)$ degré de liberté, selon qu'on est dans le cas σ^2 inconnu ou dans le cas contraire σ^2 connu (Raj S. Chhikara, Leroy Folks J. (1988)). La variable H établit une relation de base entre les distributions Gaussienne Inverse et Normale. Elle représente, en quelque sorte, l'équivalent de la variable centrée réduite de la loi Normale.

La région de confiance de niveau $(1 - \alpha)$ pour le couple de paramètres (m, σ^2) est définie par :

$$\begin{cases} (b-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{z_{1-\alpha_2}} \leq \sigma^2 \leq (b-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{z_{\alpha_2}} \\ \max\left(0, \frac{a}{t} [1 - \xi \cdot t_{1-\alpha/2}]\right) \leq m \leq \frac{a}{t} [1 + \xi \cdot t_{1-\alpha/2}] \end{cases} \quad (2.10)$$

où $\xi = \frac{\sigma}{a} \sqrt{\frac{t}{a}}$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2$$

$$\alpha_2 = \alpha_2' + \alpha_2''$$

$z_{1-\alpha_2}$ et z_{α_2} sont les quantiles de la loi de χ^2 à $(b-1)$ degré de liberté.

$t_{1-\alpha/2}$ est le quantile de la loi $N(0,1)$.

Remarque :

De la région de confiance (2.10), on en déduit celle de μ , à savoir :

$$\max\left[\frac{\beta}{z_{1-\alpha_2}}, \frac{\beta}{z_{1-\alpha_2}} + \frac{a}{t}(1-\gamma)\right] \leq \mu \leq \frac{\beta}{z_{\alpha_2}} + \frac{a}{t}(1+\gamma) \quad (2.11)$$

où $\beta = \frac{1}{2}(b-1)\hat{\sigma}^2$

$$\gamma = \frac{\hat{\sigma}}{a} \cdot \left(\frac{(b-1) \cdot t}{a \cdot z_{\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t_{1-\alpha/2}$$

III/ Adaptation en Finance :

- Comme nous l'avons mentionné précédemment, les deux méthodes d'estimation considèrent plusieurs trajectoires. Or en finance, la trajectoire considérée est unique. La première étape du procédé d'adaptation consiste donc à construire plusieurs trajectoires à partir d'une seule.

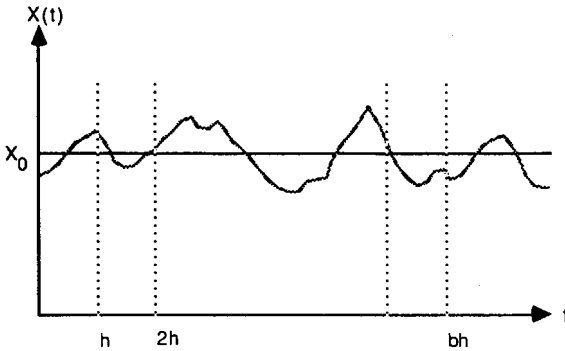


Fig. 3

Etant donné que dans la méthode discrète le point initial n'est pas forcément le même pour toutes les trajectoires, la construction de ces trajectoires peut se faire de deux manières:

- a) Subdiviser la période d'observation en plusieurs intervalles de temps de même longueur h . Cette longueur dépendra de la durée de prévision souhaitée.
- b) Choisir une valeur initiale x_0 qui partagera la trajectoire en plusieurs petites trajectoires ayant toutes le même point initial. Ce qui implique que $X_{i0} = x_0$, $i=1, \dots, b$.

En ce qui concerne la construction des trajectoires dans la seconde méthode d'estimation, c'est cette dernière éventualité qui sera retenue puisqu'elle suppose que le point initial soit le même pour toutes les trajectoires.

• La seconde étape consiste à s'assurer, par le choix de la valeur de S , que cette borne est bien atteinte par toutes les trajectoires éventuelles. En d'autres termes, les premiers temps de passage par S de chacune de ces trajectoires doivent être finis.

Notons $m = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$ et distinguons deux cas :

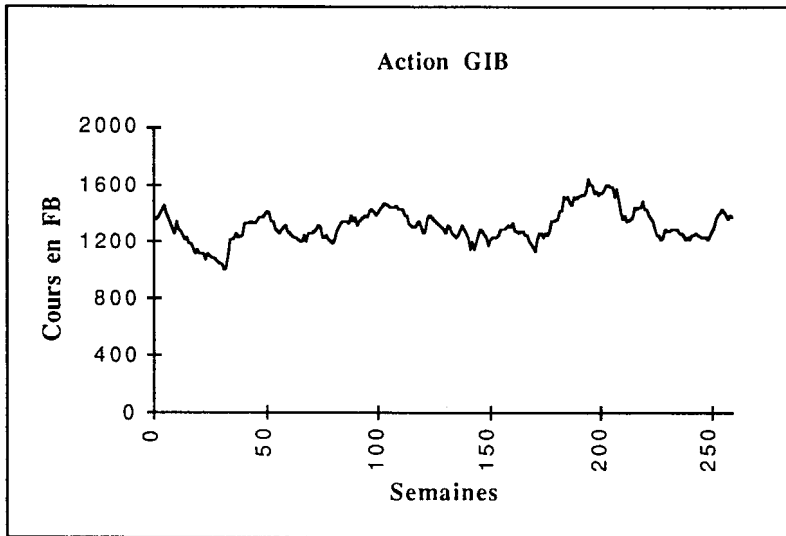
drift positif : Lorsque $m > 0$, alors $P(T < \infty) = 1$. On prend dans ce cas, une barrière S au dessus de x_0 ($S > x_0$).

drift négatif : Lorsque $m < 0$, $P(T < \infty) < 1$. On choisit S au dessous de x_0 ($S < x_0$).

Traiter ces deux cas de figure, nous permettra d'assurer une valeur positive à la moyenne théorique de T .

Application :

Nous disposons de données hebdomadaires sur le cours de l'action belge GIB sur une période de temps de 5 ans, allant de l'année 1990 à 1995. Nous considérons comme période de prévision les six derniers mois de notre champ d'observation. L'évolution du cours de cette action est représentée graphiquement :



A partir de la trajectoire unique présentée ci-dessus, nous construisons plusieurs petites trajectoires successives, en choisissant un point initial x_0 commun pour toutes.

Les résultats numériques sont illustrés dans le tableau suivant :

$$S=1300 ; x_0=1292$$

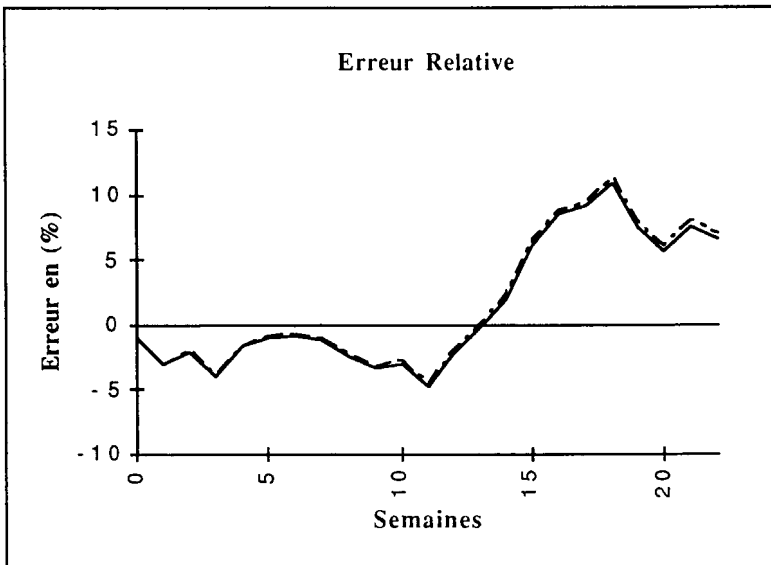
	Méthode Discrète	Méthode via le P.T.P
$\hat{\mu}$	$5,6941 \cdot 10^{-4}$	$8,1202 \cdot 10^{-4}$
$\hat{\sigma}^2$	$7,3664 \cdot 10^{-4}$	$7,6245 \cdot 10^{-4}$
$IC(\hat{\mu})$	$(0,717 ; 10,641) \cdot 10^{-4}$	$(7,883 ; 8,306) \cdot 10^{-4}$
$IC(\hat{\sigma}^2)$	$(7,305 ; 7,558) \cdot 10^{-4}$	$(7,618 ; 8,370) \cdot 10^{-4}$

$\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ ainsi que leurs régions de confiance sont calculés respectivement à partir des expressions (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) pour la méthode discrète; (2.8), (2.9), (2.10) et (2.11) pour la méthode d'estimation de premier temps de passage.

En ce qui concerne la technique dans laquelle nous sommes amenés à déterminer une barrière S , le choix de cette valeur par rapport à celle de x_0 , s'effectuera dans notre exemple, après une estimation préliminaire basée sur les données historiques qui nous donnera une idée sur le signe du taux de rendement instantané m .

D'un point de vue pratique, l'estimation du paramètre σ^2 , qui n'est pas observable directement, est le point le plus délicat du calcul des variables exogènes du modèle de Black & Scholes. La formule de Black et Scholes s'applique sans que l'on doive estimer μ . Par ailleurs, ce paramètre représente le rendement escompté de l'actif, et constitue donc un indicateur de validation utile. Toute analyse des résidus (et par suite toute démarche de validation du modèle) fait appel à l'estimation de μ .

L'analyse des prévisions de chacune des deux méthodes nous indique, à première vue, des résultats pratiquement similaires, surtout pour σ^2 . Sur toute la période de prévision, qui est de 6 mois, le graphe des erreurs relatives nous révèle que cette erreur ne dépasse pas 12%. Dans les premiers temps, celle de la méthode discrète paraît moins élevée, mais la situation se renverse ensuite.



--- Méthode Discrète
 — Méthode via le Premier Temps de Passage

D'un point de vue global, même si les méthodes semblent confondues, la méthode via le temps du premier passage offre, dans cet exemple, des résultats légèrement meilleurs, notamment à long-terme. Résultats confirmés par la valeur de son coefficient de la régression simple R^2 (69.48%), légèrement plus élevée à celle fournie par la méthode discrète (69.45%).

Pour ce qui est des intervalles de confiance des paramètres μ et σ^2 , on constate que les valeurs de tous les estimateurs se trouvent dans la fourchette des régions de confiance de leurs paramètres respectifs. L'intervalle d'estimation de μ dans la méthode discrète est plus large que celui donné par la seconde méthode. Ce dernier lui est même inclus. On peut interpréter cela par le fait que la méthode discrète prend en compte, dans le calcul de ces estimations, de toutes les observations alors que la méthode de premier temps de passage ne considère que la barrière par laquelle passe le processus. Par ailleurs, les deux intervalles obtenus pour σ^2 restent très proches tout en ayant aucun point commun.

Conclusion et quelques voies de recherches futures :

Le modèle de Black & Scholes et ses variantes sont largement utilisés par les professionnels. L'estimation de ses paramètres mérite qu'on s'intéresse à d'autres techniques plus adaptées au quotidien. Dans le cas de la méthode d'estimation discrète, il est nécessaire d'observer le processus pendant un certain intervalle de temps. Cette technique, comme son nom l'indique, est pratique pour les trajectoires discrètes mais présente, cependant, une faille lorsque l'information arrive de manière continue. La seconde technique, par ailleurs, comble ce manque et semble donc plus avantageuse. En effet, dans la méthode via le temps du premier passage, il n'est pas nécessaire d'observer le processus pendant des intervalles de temps donnés ou de connaître l'évolution du processus jusqu'à un certain temps d'arrêt.

Le résultat principal portera sur la consistance forte et la normalité asymptotique des estimations ainsi que sur les prévisions satisfaisantes obtenues à court-terme. Toutefois, nous pouvons améliorer ces estimations en utilisant des observations moins espacées dans le temps, par exemple, de données journalières, ce qui permet d'éviter les problèmes liés à l'ancienneté des données tout en conservant un nombre d'observations suffisamment élevé. Nous pouvons également considérer le cas où l'évolution des actifs financiers est décrite par des modèles à sauts et procéder au choix des valeurs de x_0 et de S de façon optimale en se basant sur certains critères, notamment le critère qui minimise les variances des estimateurs. Ces présents problèmes font actuellement l'objet de notre étude.

Annexe :

Preuve de la proposition 2 :

On suppose les hypothèses du paragraphe (II.1). La propriété principale du processus $\{X(t), t \geq 0\}$ qui suit un mouvement Brownien géométrique, est qu'il est log-normal. Pour une trajectoire i donnée, on peut écrire en gardant les mêmes notations :

$$\log\left(\frac{x_{i_n}}{x_{i_0}}\right) = N\left(m(t_{i_n} - t_{i_0}), \sigma^2(t_{i_n} - t_{i_0})\right)$$

a) Considérons maintenant les b trajectoires indépendantes du processus X :

$$\sum_{i=1}^b \log\left(\frac{x_{i_n}}{x_{i_0}}\right) \approx N\left(m \sum_{i=1}^b (t_{i_n} - t_{i_0}), \sigma^2 \sum_{i=1}^b (t_{i_n} - t_{i_0})\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^b \log\left(\frac{x_{i_n}}{x_{i_0}}\right)}{\sum_{i=1}^b (t_{i_n} - t_{i_0})} \approx N\left(m, \sigma^2 / \sum_{i=1}^b (t_{i_n} - t_{i_0})\right)$$

Le terme à gauche représente $\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2$ de l'expression (2.3) de l'article, d'où

$$\hat{m} = \hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 = N\left(m, \sigma^2 / \sum_{i=1}^b (t_{i_n} - t_{i_0})\right) \quad (\text{A.1})$$

Notons par N la v.a. centrée réduite associée à $\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2$. On a alors la relation suivante :

$$\left[\frac{\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 - (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)}{\sigma} \right] \sqrt{\sum_{i=1}^b (t_{i_n} - t_{i_0})} = N$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) + \frac{\sigma N}{\sqrt{\sum_{i=1}^b (t_{i_n} - t_{i_0})}} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \quad (\text{A.2})$$

b) Déterminons l'expression de $\hat{\sigma}^2$:

Soient $R_{ij} = \frac{\log\left(\frac{x_{ij}}{x_{ij-1}}\right)}{t_{ij} - t_{ij-1}}$ des variables aléatoires indépendantes telles que :

$$R_{ij} \approx N\left(m, \sigma^2 / (t_{ij} - t_{ij-1})\right) \quad (\text{A.3})$$

l'expression (2.4) peut alors s'écrire comme suit :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} (t_{ij} - t_{ij-1}) (R_{ij} - \hat{m})^2$$

d'une manière équivalente :

$$k \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} (t_{ij} - t_{ij-1}) (R_{ij} - m + m - \hat{m})^2$$

En développant le terme au carré, on obtient ce qui suit :

$$k \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{R_{ij} - m}{\sigma / \sqrt{t_{ij} - t_{ij-1}}} \right]^2 + \left[\frac{\hat{m} - m}{\sigma / \sqrt{\sum_{i=1}^b t_{in_i} - t_{i0}}} \right]^2 - 2 \left(\frac{\hat{m} - m}{\sigma} \right) \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{R_{ij} - m}{\sigma / \sqrt{t_{ij} - t_{ij-1}}} \right)$$

Comme $\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} (t_{ij} - t_{i0}) = \sum_{i=1}^b (t_{in_i} - t_{i0})$, alors $\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij} (t_{ij} - t_{ij-1})}{\sum_{i=1}^b (t_{in_i} - t_{i0})}$

l'expression prend alors la forme suivante :

$$k \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{R_{ij} - m}{\sigma / \sqrt{t_{ij} - t_{ij-1}}} \right]^2 - \left[\frac{\hat{m} - m}{\sigma / \sqrt{\sum_{i=1}^b (t_{in_i} - t_{i0})}} \right]^2$$

D'après (A.1) et (A.3), On reconnaît les expressions des variables aléatoires normales centrées réduites associées aux variables R_{ij} et \hat{m} . La somme de ces variables indépendantes au carré étant une χ^2 , on a alors :

$$k \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \approx \chi_k^2 - \chi_1^2$$

La propriété d'indépendance des deux variables χ^2 fait que :

$$k \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \approx \chi_{k-1}^2 \tag{A.4}$$

Soient N_1, N_2, \dots, N_{k-1} des variables normales standard indépendantes, on peut écrire l'expression ci-dessus sous la forme :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{k} \sum_{i=1}^{k-1} N_i^2 \tag{A.5}$$

où $k = \sum_{i=1}^b n_i$

En remplaçant dans (A.2) l'expression de $\hat{\sigma}^2$ par (A.5), on retrouve les représentations de la proposition 1.

Références :

- 1 - Aitchison J., Brown J.A.C.(1957): "The log-normal distribution", University Press .
- 2 - Black F., Scholes M.(1973): "The pricing of options and corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, vol. 81 May-June .

- 3 - **Bertrand M., Charles B.**(1980): "*Initiation à la statistique et aux probabilités* " Presses de l'Université de Montréal.
- 4 - **Boyle P., Ananthanarayanan A.L.**(1977): "The impact of variance estimation in option valuation models", *Journal of Financial Economics* 5 .
- 5 - **Cedro L., Gualtierotti A.F.**(1994): "Ajustement statistique en finance : le cas du mouvement Brownien géométrique", *XXVI^e journées en Statistique*.
- 6 - **Cox D.R., Miller H.D.**(1965): "*The theory of stochastic processes*", Chapman and Hall .
- 7 - **Gourieroux C., Monfort A.**(1989): "*Statistique et modèles Econométriques*", *Economica* vol.1-2.
- 8 - **Gutiérrez R., Román P.**(1993): "Inference of univariate lognormal diffusion processes via First-Passage-Times", *Applied Stochastic Models and Data Analysis*
- 9 - **Rajna Gibson** (1991) : "*L'évaluation des options*", Press universitaires de France.
- 10- **Raj S. Chhikara, Leroy Folks J.**(1988) : "*The Inverse Gaussian Distribution* ": *Theory, Methodology, and Applications* .

