Evaluation de Contrats a Terme et d'Options sur Yields

Vincent Brousseau et Claire Guillaumot

Résumé

Des produits dérivés relatifs aux obligations ou contrats futures de taux longs peuvent avoir un caractère exotique, s'ils portent sur le yield du sous-jacent plutôt que sur son cours, ou s'ils sont convertis dans une autre devise que celle du sous-jacent à un taux préétabli (on parle alors de "garantie de change"); on peut de plus imaginer que les deux choses se combinent. Ces deux propriétés, bien qu'elles diffèrent d'aspect, présentent une ressemblance mathématique; après l'avoir mise en lumière, les autres proposent une méthode de pricing faisant intervenir les volatilités familières aux opérateurs de marché (plutôt que celles qui proviennent de modèles plus sophistiqués) convenant à ce type d'actifs.

Abstract

Derivative products on long term interest rates could become exotic products if they are based on the yield of the underlying asset instead of its price, or if they are converted in a currency different from the one of the underlying asset, with a predefined rate (the contract is then said "currency guaranteed"). Moreover, these two characteristics can be simultaneous. These two properties show a mathematical similarity: the authors suggest a pricing methodology based on volatilities habitually used by traders, fitting to this type of assets.

Mots Clefs

Cours, prix, yield, sensibilité, convexité, volitilité, corrélation, équation aux dérivées partielles.

Recherche - MATIF SA, 115 rue Réaumur, F-75002 Paris (France); Tel: + 33-1-40 28 80 86, Fax: + 33-1-40 28 46 84

Introduction

Objet de l'étude.

Un future sur spread de yield est un produit qui paye à sa maturité un nominal donné que multiplie la différence de deux yields. Ces yields ("Y") sont des fonctions de prix d'obligations (réelles ou notionnelles) ("S") qu'il est légitime de modéliser de façon lognormale, et les yields eux-mêmes peuvent être correctement approximés par leur développements au second ordre ($Y \sim a+bS+cS^2$). Cela étant, on peut évaluer le future de spread de yields et les options sur yield au moyen d'un modèle lognormal assez général, à savoir Garman-Kohlhagen multidevise. Cette façon de faire présente le grand avantage d'utiliser un concept de volatilité qui est familier aux traders, celui qui s'emploie couramment aussi bien pour les options Notionnel, les options de change, et les options sur indice CAC 40 (mais non Pibor).

Méthode suivie.

Le future sur spread de yield possède un (léger) véga pour deux raisons distinctes. La première est la convexité du yield par rapport au cours spot de l'obligation. La deuxième est la garantie de change qu'il comporte obligatoirement (parce que l'un des deux yields au moins concerne une devise qui n'est pas celle du nominal). Le premier se comprend assez bien, le deuxième est moins évident. Afin de mettre ces deux effets en lumière, nous effectuerons tout d'abord le pricing d'un **future et des options sur yield** sans garantie de change, puis d'un **future et des options sur cours avec garantie de change**. Dans un troisième temps, nous calculerons la valeur du **future et des options sur yield avec garantie de change**, et enfin, celle du **future sur spread de yield**.

Résultats quantitatifs.

Les formules que nous obtiendrons seront traduites en termes quantitatifs, en choisissant à titre d'exemple les contrats à terme sur taux d'intérêt long terme les plus liquides sur les marchés européens que sont les contrats Notionnel et Bund. On utilisera des hypothèses de volatilité raisonnable : six pour cent pour le Notionnel, autant pour le Bund, autant pour le mark-Paris ; on considérera des contrats futures ayant encore **trois mois** à vivre. Nous donnons ici la juste cotation du contrat future correspondant en fonction de la **valeur SJ** du sous-jacent pour les quatre cas que nous avons envisagés et pour trois hypothèses de **corrélation** ρ entre le Bund et le mark-Paris $\rho = -0.4$, $\rho = 0$, $\rho = 0.4$.

Les sous-jacents des quatre contrats futures sont représentés par les abréviations suivantes:

* Le *yield du Notionnel* est noté **YN**,
* le *Bund libellé en francs* (ou *avec garantie de change en francs*) est noté **BF**,
* le *yield du Bund libellé en francs* (ou *avec g.d.c. en francs*) est noté **YBF**,
* le *spread entre les yields des Notionnels et Bund, libellé en francs*, est noté **SYF**.

Corrélation Bund / mark-Paris	Future sur Yield Notionnel (Pt base **taux**)	Future sur Bund libellé en francs *(Pt base **prix** = tick Bund)*	Future sur Yield Bund libellé en francs (Pt base **taux**)	**Future sur Spread de Yields** Notionnel Bund (Pt base **taux**)
$\rho = -0.4$	YN + **1** bp	*BF – 4 bp*	YBF – **1** bp	SYF + **2** bp
$\rho = 0$	YN + **1** bp	*BF*	YBF + **1** bp	SYF
$\rho = +0.4$	YN + **1** bp	*BF + 4 bp*	YBF + **3** bp	SYF – **2** bp

0: Notations.

Dans ce qui suit, on parlera de prix de futures relatifs à divers numéraires. D'une part, ce prix pourra être exprimé en telle ou telle devise (que désignera une lettre capitale comme D, E, F...), d'autre part le prix pourra être exprimé en unités de cette devise à

telle ou telle date (essentiellement la date courante t, ou la date de maturité du future T). Les *prix* calculés théoriquement comme les solutions de certaines équations, généralisant celle de Black, s'entendent à la date courante t, tandis que les *cotations* des contrats futures qui sont employées dans la pratique s'entendent à la date de maturité T.
Nous noterons les prix dont nous aurons à parler avec deux indices. Le premier désignera la devise de cotation, on en fera l'économie dans le cas ou une seule devise intervient. Le deuxième la date courante ou de maturité, au moyen d'une lettre t ou T, par défaut, il s'agira du prix à la date courante.

I: Future et options sur yield sans garantie de change.

C'est le cas le plus facile. On part du développement au second ordre au voisinage de $S=S_0$ correspondant à $Y=Y_0$.

$$\frac{\Delta S}{S} = -B.\Delta Y + C.\frac{\Delta Y^2}{2} + \dots \qquad (1)$$

où Y est le yield, S le prix de l'obligation (spot dans le cas du Notionnel ou Bund), B est la sensibilité et C la convexité (définie comme la dérivée seconde du cours par rapport au yield, divisée par le yield.) . Notons que si l'on définit l'obligation notionnelle comme un titre fictif dont le cours (ou prix pied de coupon) est égal à celui de l'OMCL que divise le facteur de concordance, alors les sensibilités et convexités sont identiques pour l'une et l'autre.
Le développement (1) se réécrit :

$$S = S_0(1 - \frac{B.\Delta Y}{100} + C.\frac{\Delta Y^2}{20000} + \dots) \qquad (2)$$

formule que l'on peut inverser en

$$Y = Y_0 - \frac{100}{BS_0}.(S-S_0) + \frac{50\,C}{B^3S_0^{\,2}}.(S-S_0)^2 + \dots \qquad (3)$$

Cette approximation est correcte, produisant une erreur de l'ordre d'un point de base de taux pour dix figures d'écart. Par conséquent, si on tronque ce développement à l'ordre 2, on obtient un polynôme P(S) du second degré qui approche Y sur un intervalle de spots qui contiendra le spot final avec un haut degré de probabilité. Ce polynôme s'écrit:

$$P(S) = [(\frac{50C}{B^3} + \frac{100}{B} + Y_0) - 100(\frac{C}{B^3 S_0} + \frac{1}{BS_0})S + \frac{50C}{B^3 S_0^2} S^2] \tag{4}$$

1. Future sur yield sans garantie de change

Cela étant, le future sur yield $\mathcal{F}$ est la solution de l'équation de Black :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\mathcal{F} - r\mathcal{F} = 0 \tag{5}$$

où t désigne la date (croissante, par opposition à la maturité, décroissante), r est le taux court (par exemple du franc) et σ la volatilité du prix (par exemple du Notionnel). Pour une condition aux limites de la forme S puissance μ, cette équation admet la solution définie en annexe 1 :

$$f_\mu(S,K,r_M,r_N,\sigma,t) := S^\mu e^{((\mu-1)r_N - \mu r_M + \mu(\mu-1)\frac{\sigma^2}{2})\,t} \tag{6}$$

c'est-à-dire, pour $\mu = 0,1$, le terme S puissance μ que multiplie exp(-r.t) et, pour $\mu = 2$, que multiplie exp(σ^2.t) Le future vaut donc en monnaie domestique de la date courante t :

$$\mathcal{F}_t = e^{-r(T-t)}[(\frac{50C}{B^3} + \frac{100}{B} + Y_0) - 100(\frac{C}{B^3 S_0} + \frac{1}{BS_0})S + \frac{50C}{B^3 S_0^2} e^{\sigma^2 t} S^2] \tag{7}$$

soit encore, en remplaçant par Y le développement a+bS+cS^2 ,

$$\mathcal{F}_t = e^{-r(T-t)}(Y + (e^{\sigma^2(T-t)} - 1)\frac{50CS^2}{B^3 S_0^2}) \tag{8}$$

Le véga vaut alors

$$\vartheta = e^{(\sigma^2-r)(T-t)}\frac{50CS^2}{B^3S_0^2}\sigma(T-t) \tag{9}$$

A ce stade, il est possible de recourir à une approximation en remplaçant l'exponentielle par son développement :

$$\mathcal{F}_t = e^{-r(T-t)}(Y + (\frac{50CS^2\sigma^2(T-t)}{B^3S_0^2})) \tag{10}$$

Le future étant coté en numéraire non de la date courante, mais de la maturité T, on observe finalement que la juste cotation d'un future sur yield diffère de ce yield par une quantité proportionnelle au temps :

$$\mathcal{F}_T = (Y + (\frac{50CS^2\sigma^2(T-t)}{B^3S_0^2})) \tag{11}$$

On peut avoir une estimation quantitative simple de l'effet de la convexité. Négligeons l'impact de l'exponentielle, imaginons un notionnel à 115. Au voisinage de ce point, on a :

$$\frac{50\ C}{B^3} \approx 10 \tag{12}$$

Imaginons donc une volatilité du notionnel de 6% et une maturité de trois mois. Donc σ^2(T-t) = 0.0009. On trouve que la valeur du future dépasse celle du yield de 1 point de base, ce qui est négligeable. Cela ne sera plus le cas avec l'autre cause de véga qu'est la garantie de change, comme nous le verrons dans la section suivante.

2. Options sur future de yield sans garantie de change

Il s'agit maintenant de déterminer les expressions du call et du put sur future de yield, qui devront être solutions de l'équation aux dérivées partielles de Garman-Kohlhagen.

Le yield Y étant approché par le polynôme utilisé ci-dessus, le yield d'exercice Y_K correspondant au prix d'exercice K s'écrit :

$$Y_K = [(\frac{50C}{B^3} + \frac{100}{B} + Y_0) - 100(\frac{C}{B^3 S_0} + \frac{1}{BS_0})K + \frac{50C}{B^3 S_0^2}K^2] \tag{13}$$

a. Cas du put :

La solution donnant la valeur du put s'exprime comme combinaison linéaire des solutions o_μ de l'équation aux dérivées partielles de Garman-Kohlhagen, définies en

$$o_\mu(S,K,r_M,r_N,\sigma,t) := S^\mu e^{((\mu-1)r_N - \mu r_M + \mu(\mu-1)\frac{\sigma^2}{2})\,t}\,\Phi(\frac{Ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{(r_N - r_M)t}{\sigma\sqrt{t}} + (\mu - 1/2)\sigma\sqrt{t}) \tag{14}$$

annexe 1 par :

Le put est exercé si $Y<Y_K$, soit $S>K$. A l'échéance, si $Y<Y_K$, le put doit donc valoir :

$$\begin{aligned} Y_K - Y := {} & [(\frac{50C}{B^3} + \frac{100}{B} + Y_0) - 100(\frac{C}{B^3 S_0} + \frac{1}{BS_0})K + \frac{50C}{B^3 S_0^2}K^2] \\ & - [(\frac{50C}{B^3} + \frac{100}{B} + Y_0) - 100(\frac{C}{B^3 S_0} + \frac{1}{BS_0})S + \frac{50C}{B^3 S_0^2}S^2] \end{aligned} \tag{15}$$

Les termes en $50C/B^3+100/B+Y_0$ se simplifient. Pour $S>K$ et t proche de 0, $o_\mu(S, K, r_M, r_N, \sigma, t)$ tend vers S^μ. La valeur du put s'écrit par conséquent de manière générale :

$$p := (-100(\frac{C}{B^3 S_0} + \frac{1}{BS_0})K + \frac{50C}{B^3 S_0^2}K^2)o_0 + 100(\frac{C}{B^3 S_0} + \frac{1}{BS_0})o_1 - \frac{50C}{B^3 S_0^2}o_2 \tag{16}$$

b. Cas du call :

La solution donnant la valeur du call s'exprime comme combinaison linéaire des solutions $\hat{o}_\mu$, elles-mêmes ainsi définies :

$$\hat{o}_\mu(S,K,r_M,r_N,\sigma,t) := - S^\mu e^{((\mu-1)r_N-\mu r_M+\mu(\mu-1)\frac{\sigma^2}{2})\,t}\,\Phi\left(-\frac{Ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{(r_N-r_M)t}{\sigma\sqrt{t}} - (\mu-1/2)\sigma\sqrt{t}\right) \tag{17}$$

Le call est exercé si $Y>Y_K$, soit $S<K$. Si $Y>Y_K$, le call doit donc valoir à l'échéance :

$$\begin{aligned} Y-Y_K := & \left[\left(\frac{50C}{B^3}+\frac{100}{B}+Y_0\right) - 100\left(\frac{C}{B^3S_0}+\frac{1}{BS_0}\right)S + \frac{50C}{B^3S_0^2}S^2\right] \\ & - \left[\left(\frac{50C}{B^3}+\frac{100}{B}+Y_0\right) - 100\left(\frac{C}{B^3S_0}+\frac{1}{BS_0}\right)K + \frac{50C}{B^3S_0^2}K^2\right] \end{aligned} \tag{18}$$

Pour S inférieur à K et t proche de 0, $\hat{o}_\mu(S, K, r_M, r_N, \sigma, t)$ tend vers $-S^\mu$. La valeur du call s'écrit par conséquent de manière générale :

$$c := \left(-100\left(\frac{C}{B^3S_0}+\frac{1}{BS_0}\right)K + \frac{50C}{B^3S_0^2}K^2\right)\hat{o}_0 + 100\left(\frac{C}{B^3S_0}+\frac{1}{BS_0}\right)\hat{o}_1 - \frac{50C}{B^3S_0^2}\hat{o}_2 \tag{19}$$

On est arrivé, dans ce cas, à une formule fermée (closed form), au prix de l'approximation au second ordre du yield.

Compte tenu du fait que $\hat{o}_\mu - o_\mu = - f_\mu$, la différence call - put s'exprime :

$$\begin{aligned} c-p := e^{-rt}\Bigg(& \left(100\left(\frac{C}{B^3S_0}+\frac{1}{BS_0}\right)K - \frac{50C}{B^3S_0^2}K^2\right) - 100\left(\frac{C}{B^3S_0}+\frac{1}{BS_0}\right)*S \\ & + \frac{50C}{B^3S_0^2}*e^{\sigma^2t}S^2\Bigg) \end{aligned} \tag{20}$$

ce qui n'est autre que la relation call-put :

$$c - p := e^{-rt}(\mathcal{F}_T - Y_K) \qquad (21)$$

<u>II: Future et options sur prix avec garantie de change.</u>

1. Future sur cours avec garantie de change

Décrivons d'abord ce produit. Nous noterons son sous-jacent par la lettre G. Considérons trois actifs D, E, F dont deux numéraires D et E. G réplique, par rapport au numéraire D, ce que vaut l'actif F par rapport à l' autre numéraire E, dans lequel il est couramment coté. Par exemple, si le Bund, coté en marks, vaut 96, le sous-jacent G du future sur prix avec garantie de change vaut 96 francs. Dans cet exemple, D est le franc, E le mark, F le Bund.
On utilise pour cela le modèle de Garman-Kohlhagen multidevise. Dans ce modèle on note S[illegible] le spot MN, c'est à dire le nombre d'unités de la devise N qui équivalent à une unité de M. La définition de G peut s'écrire

$$S_{GD} = S_{FE} \qquad (22)$$

Si l'on exprime ce cours uniquement en fonction de spots de même numéraire D, on trouve:

$$S_{GD} = \frac{S_{FD}}{S_{ED}} \qquad (23)$$

On convient de noter σ[illegible] la volatilité du spot S[illegible] , ρ[illegible] la corrélation entre les spots S[illegible] et S[illegible] . La solution de l'équation de Garman-Kohlhagen multidevise

$$\frac{\partial}{\partial t}O_D + \left(\frac{\sigma_{ED}^2 S_{ED}^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial S_{ED}^2} + \rho_{ED,FD}\,\sigma_{ED}\,\sigma_{FD} S_{ED} S_{FD}\frac{\partial^2}{\partial S_{ED}\partial S_{FD}} + \frac{\sigma_{FD}^2 S_{FD}^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial S_{FD}^2}\right)O_D \tag{24}$$
$$+ \left((r_D - r_E)S_{ED}\frac{\partial}{\partial S_{ED}} + (r_D - r_F)S_{FD}\frac{\partial}{\partial S_{FD}}\right)O_D - r_D O_D = 0$$

admettant pour conditions aux limites

$$f_D(S_{ED}\ ,\ S_{FD}) := \frac{S_{FD}}{S_{ED}} \tag{25}$$

s'écrit

$$\frac{S_{FD}}{S_{ED}}\exp((\sigma_{ED}^2 - \rho_{ED,FD}\,\sigma_{ED}\,\sigma_{FD} - r_D + r_E - r_F)(T-t)) \tag{26}$$

soit encore, compte tenu des nécessaires relations entre les ρ et les σ,

$$\frac{S_{FD}}{S_{ED}}\exp\left(\left(\frac{(\sigma_{ED}^2 + \sigma_{EF}^2 - \sigma_{DF}^2)}{2} - r_D + r_E - r_F\right)(T-t)\right) \tag{27}$$

Il s'agit de la solution ϕ_1 introduite dans l'annexe 1.

Comme le Bund est un future, on a $r_E = r_F$ .On peut poser $r_D = r$. Si nous notons S_{FE} le sous-jacent (spot du Bund fois nominal fixe en francs), et A_{DEF} la quantité

$$A_{DEF} := \frac{(\sigma_{ED}^2 + \sigma_{EF}^2 - \sigma_{DF}^2)}{2} = (\sigma_{ED}^2 - \rho_{ED,FD}\,\sigma_{ED}\,\sigma_{FD}) \tag{28}$$
$$= \rho_{EF,ED}\,\sigma_{ED}\,\sigma_{EF}$$

la forme du future sur prix avec garantie de change est donc finalement, en monnaie domestique D à la date courante t :

$$\mathscr{F}_{D,t} = S_{FE} \exp((A_{DEF} - r)(T-t)) \tag{29}$$

Le future étant coté en numéraire non de la date courante, mais de la maturité T, on observe finalement que la juste cotation d'un future sur prix avec garantie de change est

$$\mathscr{F}_{D,T} = S_{FE} \exp((A_{DEF})(T-t)) \tag{30}$$

Evaluons l'impact quantitatif de la volatilité, en fonction de la corrélation $\rho_{ED,EF}$ entre le Bund et le mark-Paris, et en supposant que les volatilités σ_{ED} du mark-Paris et σ_{EF} du Bund valent 6%. Donc $\sigma_{ED}\sigma_{EF}(T-t) = 0.0009$ et $A_{DEF}\ (T-t) = 0.0009.\rho_{ED,FD}$. On trouve un ordre de grandeur, pour une maturité de trois mois, qui semble infime, de l'ordre d'un millième que multiplie $\rho_{ED,FD}$. Mais il s'agit ici d'un effet multiplicatif. Un millième du nominal fait **dix ticks de Bund**, ce qui doit être pris en compte. Ainsi donc, 10% de corrélation mark-Paris - Bund produisent pour une maturité de trois mois un décalage d'un tick de cours entre le vrai Bund et le Bund à garantie de change en francs.

2. Options sur cours avec garantie de change

a. Cas du call :

La solution donnant la valeur du call s'exprime comme combinaison linéaire des solutions ω_μ de l'équation de Garman-Kohlhagen multidevise, définies en annexe 1 par :

$$\omega_\mu(S_{ED}, S_{FD}, K_{FE}, r_D, r_E, r_F, \sigma, t) :=$$

$$\left(\frac{S_{FD}}{S_{ED}}\right)^{\mu} e^{\left(\frac{\mu^2}{2}\sigma_{EF}{}^2 + \frac{\mu}{2}(\sigma_{ED}{}^2 - \sigma_{FD}{}^2) - r_D + \mu(r_E - r_F)\right) t} \; * \tag{31}$$

$$\Phi\left(\frac{Ln\left(\frac{S_{FD}/S_{ED}}{K_{FE}}\right)}{\sigma_{EF}\sqrt{t}} + \frac{(r_E - r_F)t}{\sigma_{EF}\sqrt{t}} + \left(\mu\,\sigma_{EF} + \frac{\sigma_{ED}{}^2 - \sigma_{FD}{}^2}{2\,\sigma_{EF}}\right)\sqrt{t}\right)$$

Posons $S_{FE} = S_{FD}/S_{ED}$ (S_{FE} et K_{FE} représentent le strike et le spot du call, et il s'agit de cours normaux, sans garantie de change ; par exemple du cours du Bund normalement exprimé en marks). En utilisant aussi les notations r et A_{DEF} introduites plus haut, on peut réécrire la solution correspondant à μ=1 comme :

$$\omega_1 := S_{FE} e^{(A_{DEF} - r)t} \Phi\left(\frac{Ln(\frac{S_{FE}}{K_{FE}}) + \frac{(2\sigma_{EF}^2 + \sigma_{ED}^2 - \sigma_{FD}^2)}{2} t}{\sigma_{EF}\sqrt{t}}\right) \qquad (32)$$

Le call est exercé si S_{FE} est supérieur à K_{FE}. A l'échéance, si $S_{FE}>K_{FE}$, le call doit donc valoir S_{FE}-K_{FE}. Pour S_{FE} supérieur à K_{FE} et t proche de 0, ω_μ tend vers S_{FE}^μ. La valeur du call s'écrit donc

$$c := \omega_1 - K_{FE}\omega_0 \qquad (33)$$

soit encore

$$c := S_{FE} e^{(A_{DEF} - r)t} \Phi\left(\frac{Ln(\frac{S_{FE}}{K_{FE}}) + A_{DEF} t}{\sigma_{EF}\sqrt{t}}\right) - K_{FE} e^{-rt} \Phi\left(\frac{Ln(\frac{S_{FE}}{K_{FE}}) + (\frac{\sigma_{ED}^2 - \sigma_{FD}^2}{2})t}{\sigma_{EF}\sqrt{t}}\right) \qquad (34)$$

Il est remarquable que l'on soit parvenu, dans ce cas, à une formule exacte et fermée (closed form without approximation).

b. Cas du put :

Là encore, il suffit de remplacer les solutions ω_μ par des solutions $\hat{\omega}_\mu$ définies par :

$$\hat{\omega}_\mu := -S_{FE}^{\mu}\, e^{(\frac{\mu^2}{2}\sigma_{EF}^2+\frac{\mu}{2}(\sigma_{ED}^2-\sigma_{FD}^2)-r)\,t} *$$

$$\Phi(-\frac{Ln(\frac{S_{FD}/S_{ED}}{K_{FE}})}{\sigma_{EF}\sqrt{t}} - \frac{(r_E-r_F)t}{\sigma_{EF}\sqrt{t}} - (\mu\,\sigma_{EF}+\frac{\sigma_{ED}^2-\sigma_{FD}^2}{2\sigma_{EF}})\sqrt{t}) \qquad (35)$$

pour passer de l'expression du call à celle du put.
La valeur du put s'écrit donc

$$p := \hat{\omega}_1 - K_{FE}\hat{\omega}_0 \qquad (37)$$

soit encore

$$p := K_{FE}\, e^{-rt}\Phi(-\frac{Ln(\frac{S_{FE}}{K_{FE}})+(\frac{\sigma_{ED}^2-\sigma_{FD}^2}{2})t}{\sigma_{EF}\sqrt{t}}) - S_{FE}\, e^{(A_{DEF}-r)\,t}\,\Phi(-\frac{Ln(\frac{S_{FE}}{K_{FE}})+A_{DEF}t}{\sigma_{EF}\sqrt{t}}) \qquad (36)$$

A partir des expressions de $\mathcal{F}$, c et p, la parité call-put s'obtient immédiatement.

III: Future et options sur yield avec garantie de change.

1. Future sur yield avec garantie de change

Ce cas combine les deux difficultés que nous avons étudiées de manière séparée dans les deux sections précédentes. L'exemple qui s'impose est celui d'un yield calculé à partir du spot du Bund par une formule donnée, que multiplie un montant fixe en francs. La première chose à faire est d'exprimer correctement ce sous-jacent en fonction des spots cotant la devise D. On peut réutiliser le polynôme d'approximation du yield trouvé en section 1. En l'appliquant au spot S_{FE} , au voisinage de sa valeur courante $S_{FE,0}$, on trouve le yield Y_{FE} , associé à ce spot. Mais nous devons exprimer ce yield en fonction des spots cotant la devise D. Mais comme nous pouvons écrire

$$S_{FE} = \frac{S_{FD}}{S_{ED}} \tag{38}$$

cela nous permet d'exprimer correctement le sous-jacent comme

$$\begin{aligned} P(S_{FE}) := {} & \left(\frac{50C}{B^3} + \frac{100}{B} + Y_{FE,0}\right) - 100\left(\frac{C}{B^3 S_{FE,0}} + \frac{1}{B S_{FE,0}}\right)\frac{S_{FD}}{S_{ED}} \\ & + \frac{50C}{B^3 S_{FE,0}^2}\left(\frac{S_{FD}}{S_{ED}}\right)^2 \end{aligned} \tag{39}$$

où $S_{FE,0}$ est une valeur du spot S_{FE} proche de la valeur courante, où $Y_{FE,0}$ est le yield correspondant à $S_{FE,0}$, où B est la sensibilité du yield par rapport au spot S_{FE} , et C sa convexité.

La solution de l'équation de Garman-Kohlhagen multidevise **(24)** admettant pour conditions aux limites

$$f_D(S_{ED}\ ,\ S_{FD}) := \left(\frac{S_{FD}}{S_{ED}}\right)^2 \tag{40}$$

s'écrit

$$\left(\frac{S_{FD}}{S_{ED}}\right)^2 \exp((3\,\sigma_{ED}^2 - 4\,\rho_{ED,FD}\,\sigma_{ED}\,\sigma_{FD} + \sigma_{FD}^2 - r_D + 2r_E - 2r_F)(T-t)) \tag{41}$$

soit encore, compte tenu des nécessaires relations entre les ρ et les σ,

$$\left(\frac{S_{FD}}{S_{ED}}\right)^2 \exp((\sigma_{ED}^2 + 2\,\sigma_{EF}^2 - \sigma_{DF}^2) - r_D + 2r_E - 2r_F)(T-t)) \tag{42}$$

Il s'agit de la solution $\phi_2$introduite dans l'annexe 1.

Comme le Bund est un future, on a $r_E = r_F$, et on pose $r_D = r$. Nous notons B_{DEF} la quantité

$$B_{DEF} := (\sigma_{ED}^2 + 2\sigma_{EF}^2 - \sigma_{DF}^2) = 3\sigma_{ED}^2 - 4\rho_{ED,FD}\sigma_{ED}\sigma_{FD} + \sigma_{FD}^2$$
$$= \sigma_{EF}^2 - 2\rho_{ED,EF}\sigma_{ED}\sigma_{EF} \qquad (43)$$

La forme du future sur prix avec garantie de change est donc finalement, en monnaie domestique D à la date courante t:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{D,t} &= \exp(-r(T-t)) \; \{ (\frac{50C}{B^3} + \frac{100}{B} + Y_{FE,0}) \\ &- 100(\frac{C}{B^3} + \frac{1}{B})\frac{S_{FE}}{S_{FE,0}} \exp(A_{DEF}(T-t)) \\ &+ \frac{50C}{B^3}(\frac{S_{FE}}{S_{FE,0}})^2 \exp(B_{DEF}(T-t)) \; \}\end{aligned} \qquad (44)$$

Notons par Y_{FE} le sous-jacent (yield long terme de la devise E que multiplie nominal fixe en devise D). Le future étant coté en numéraire non de la date courante, mais de la maturité T, on observe finalement que la juste cotation d'un future sur prix avec garantie de change s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{D,T} &= Y_{FE} \\ &- 100(\frac{C}{B^3} + \frac{1}{B})(\frac{S_{FE}}{S_{FE,0}})(\exp(A_{DEF}(T-t)) - 1) \\ &+ \frac{50C}{B^3}(\frac{S_{FE}}{S_{FE,0}})^2(\exp(B_{DEF}(T-t)) - 1)\end{aligned} \qquad (45)$$

Il est judicieux de recourir à une approximation en remplaçant l'exponentielle par son développement :

$$\mathcal{F}_{D,T} = Y_{FE} - 100(\frac{C}{B^3} + \frac{1}{B})(\frac{S_{FE}}{S_{FE,0}})A_{DEF}(T-t) + \frac{50C}{B^3}(\frac{S_{FE}}{S_{FE,0}})^2 B_{DEF}(T-t) \qquad (46)$$

Le cas étudié dans la présente section généralise tant celui de la première que celui de la deuxième section. Nous pouvons donc opérer deux vérifications.

* Premièrement, supposons que le yield soit formellement remplacé par le spot lui même. Il en résulte que B doit être égal à -100/ S_{FE} et que l'effet de convexité doit être nul (C=0). Remplaçons, dans la formule ci-dessus, B et C par leurs valeurs ainsi particularisées. Il vient :

$$\mathcal{F}_{D,T} = S_{FE} + S_{FE}\, A_{DEF}(T-t) \tag{47}$$

et comme le yield Y_{FE} est alors remplacé formellement par le *spot* S_{FE} , on retrouve bien la formule du future sur spot avec garantie de change.

* Deuxièmement, supposons que les devises D et E coïncident. Il en résulte que $A_{DEF} = 0$ et que $B_{DEF} = \sigma_{EF}^2$. En remplaçant A_{DEF} et B_{DEF} par leurs valeurs ainsi particularisées, il vient:

$$\mathcal{F}_{D,T} = Y_{FE} + \frac{50C}{B^3}\left(\frac{S_{FE}}{S_{FE,0}}\right)^2 \sigma_{EF}(T-t) \tag{48}$$

et donc on retrouve bien la formule du future sur yield sans garantie de change.

Evaluons l'impact quantitatif de la volatilité, en fonction de la corrélation $\rho_{ED,EF}$ entre le Bund et le mark-Paris, et en supposant que les volatilités σ_{ED} du mark-Paris et σ_{EF} du Bund valent 6%. Nous supposons encore que la maturité du future est de trois mois, et que le Bund vaut 96. Au voisinage de ce point, on a:

$$\begin{gathered} \frac{50\ C}{B^3} \approx 10 \\ 100\left(\frac{C}{B^3} + \frac{1}{C}\right) \approx 37 \end{gathered} \tag{49}$$

En introduisant dans la formule (45) les valeurs numériques, on trouve encore que A_{DEF} (T-t) = 0.0009.$\rho_{ED,EF}$ et d'autre part B_{DEF} (T-t) = O.0009.(1-2.$\rho_{ED,EF}$). L'écart entre le future sur yield avec garantie de change et le yield sous-jacent est donc de l'ordre de (1 - 5 $\rho_{ED,EF}$) points de base, et est donc compris, pour une maturité de trois mois, entre moins quatre et plus six points de base de taux.

2. Options sur yield avec garantie de change

a. Cas du put :

La solution donnant la valeur du put s'exprime comme combinaison linéaire des solutions ω_μ de l'équation de Garman-Kohlhagen multidevise.

Le put est exercé si $Y_{FE}<Y_{FE,K}$, soit $S_{FE}>K_{FE}$. A l'échéance, si $Y_{FE}<Y_{FE,K}$, le put doit donc valoir :

$$
\begin{aligned}
Y_{FE,K} - Y_{FE} := {} & [(\frac{50C}{B^3} + \frac{100}{B} + Y_{FE,0}) - 100(\frac{C}{B^3 S_{FE,0}} + \frac{1}{B S_{FE,0}}) K_{FE} + \frac{50C}{B^3 S_{FE,0}^2} K_{FE}^2] \\
& - [(\frac{50C}{B^3} + \frac{100}{B} + Y_{FE,0}) - 100(\frac{C}{B^3 S_{FE,0}} + \frac{1}{B S_{FE,0}}) S_{FE} + \frac{50C}{B^3 S_{FE,0}^2} S_{FE}^2]
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Les termes en $50C/B^3+100/B+Y_{FE,0}$ se simplifient, et donc la valeur du put s'écrit :

$$
\begin{aligned}
p := {} & (-100(\frac{C}{B^3 S_{FE,0}} + \frac{1}{B S_{FE,0}}) K_{FE} + \frac{50C}{B^3 S_{FE,0}^2} K_{FE}^2) \omega_0 + \\
& 100(\frac{C}{B^3 S_{FE,0}} + \frac{1}{B S_{FE,0}}) \omega_1 - \frac{50C}{B^3 S_{FE,0}^2} \omega_2
\end{aligned}
\tag{51}
$$

avec

$$\omega_2 := S_{FE}{}^2 e^{(B_{DEF} - r)\,t}\,\Phi\left(\frac{Ln\left(\frac{S_{FE}}{K_{FE}}\right) + \frac{(4\sigma_{EF}^2 + \sigma_{ED}^2 - \sigma_{FD}^2)}{2}t}{\sigma_{EF}\sqrt{t}}\right) \tag{52}$$

b. Cas du call :

La solution donnant la valeur du call s'exprime comme combinaison linéaire des solutions $\acute{\omega}_\mu$, définies précédemment.

Le call est exercé si $Y_{FE} > Y_{FE,K}$, soit $S_{FE} < K_{FE}$. Si $Y_{FE} > Y_{FE,K}$, le call doit donc valoir à l'échéance :

$$\begin{aligned} Y_{FE} - Y_{FE,K} := {} & [(\frac{50C}{B^3} + \frac{100}{B} + Y_{FE,0}) - 100(\frac{C}{B^3 S_{FE,0}} + \frac{1}{B S_{FE,0}})S_{FE} + \frac{50C}{B^3 S_{FE,0}^2} S_{FE}^2] \\ & - [(\frac{50C}{B^3} + \frac{100}{B} + Y_{FE,0}) - 100(\frac{C}{B^3 S_{FE,0}} + \frac{1}{B S_{FE,0}})K_{FE} + \frac{50C}{B^3 S_{FE,0}^2} K_{FE}^2] \end{aligned} \tag{53}$$

Après simplification, la valeur du call s'écrit par conséquent de manière générale :

$$\begin{aligned} c := {} & (-100(\frac{C}{B^3 S_{FE,0}} + \frac{1}{B S_{FE,0}})K_{FE} + \frac{50C}{B^3 S_{FE,0}^2} K_{FE}^2)\,\acute{\omega}_0 + \\ & 100(\frac{C}{B^3 S_{FE,0}} + \frac{1}{B S_{FE,0}})\,\acute{\omega}_1 - \frac{50C}{B^3 S_{FE,0}^2}\,\acute{\omega}_2 \end{aligned} \tag{54}$$

Compte tenu du fait que $\acute{\omega}_\mu - \omega_\mu = -\phi_\mu$ (tel que défini en annexe 1), la différence call - put s'exprime :

$$\begin{aligned} c - p := {} & e^{-rt}((100(\frac{C}{B^3 S_{FE,0}} + \frac{1}{B S_{FE,0}})K_{FE} - \frac{50C}{B^3 S_{FE,0}^2} K_{FE}^2) \\ & - 100(\frac{C}{B^3 S_{FE,0}} + \frac{1}{B S_0}) * S_{FE}\, e^{A_{DEF} t} + \frac{50C}{B^3 S_{FE,0}^2} S_{FE}^2 e^{B_{DEF} t}) \end{aligned} \tag{55}$$

ce qui n'est autre que la relation call-put :

$$c - p := e^{-rt}(\mathcal{F}_{D,T} - Y_{FE,K}) \qquad (56)$$

IV: Future sur spread de yields avec garantie de change.

Ce cas s'obtient simplement à partir du précédent, au moyen d'une simple soustraction. Conservons la lettre F pour désigner le Bund, et notons le Notionnel par H. On trouve, dans le cas d'un spread Notionnel-Bund libellé en francs:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{D,T} &= (Y_{HD} - Y_{FE}) + 100\left(\frac{C}{B^3} + \frac{1}{B}\right)\left(\frac{S_{FE}}{S_{FE,0}}\right)A_{DEF}(T-t)\\ &+ \frac{50C}{B^3}\left(\frac{S_{FE}}{S_{FE,0}}\right)^2(\sigma_{DH}^2 - B_{DEF})(T-t)\end{aligned} \qquad (57)$$

La méthode trouve ses limites pour ce qui est de l'option sur spread de yield. On comprend d'ailleurs qu'il faudrait spécifier 6 volatilités, ou 3 volatilités et 3 corrélations, que le marché ne donnera pas de valeur à tous ces 6 niveaux, et qu'en définitive une résolution formelle du problème de pricing aurait de ce fait un intérêt pratique limité. Mais cette résolution formelle échappe à la méthode parce que la condition d'exercice du call ou du put ne peut être mise sous une forme linéaire en les logarithmes des spots. Le problème ne se posait pas dans le cas de l'option sur yied avec garantie de change parce que la condition d'exercice se ramenait à S_{FE} plus grand ou plus petit que K_{FE} , de sorte que l'intégration de la loi normale de dimension 3, que suppose en principe la résolution du pricing, se ramène à une intégration de loi normale de dimension 1. Cependant, le problème se serait posé si l'on avait cherché à étudier le cas d'une option sur spread de cours, et il se pose bien entendu pour celle sur spread de yield. La résolution du pricing nécessiterait dans ces deux cas d'intégrer une loi normale de dimension 3 sur un domaine dont la frontière est courbe, ce qui, comme bien l'on pense, ne risque pas de conduire à une formule fermée. Une solution serait d'approcher cette frontière courbe par une variété plane, cela rajouterait toutefois une approximation de plus. La solution pratique est sans doute de type numérique.

ANNEXE 1

Solutions des équations aux dérivées partielles.

1 : Cas monodimensionnel.

On pose

$$L_\mu(z,q,r_M,r_N,\sigma,t) := \frac{(z-q)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{(r_N-r_M)t}{\sigma\sqrt{t}} + (\mu-1/2)\sigma\sqrt{t}$$

$$D_\mu(S,K,r_M,r_N,\sigma,t) := L_\mu(Ln(S),Ln(K),r_M,r_N,\sigma,t)$$

Alors la fonction o_μ définie par

$$o_\mu(S,K,r_M,r_N,\sigma,t) := S^\mu e^{((\mu-1)r_N-\mu r_M+\mu(\mu-1)\frac{\sigma^2}{2})\,t}\,\Phi(D_\mu(S,K,r_M,r_N,\sigma,t))$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale :

$$\Phi(x) := \frac{1+erf(\frac{x}{\sqrt{2}})}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

est solution de l'équation aux dérivées partielles de Garman-Kohlhagen :

$$\frac{\partial}{\partial t}f + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}f + (r_N - r_M)S\frac{\partial}{\partial S}f - r_N f = 0$$

Nous avons opéré la vérification au moyen d'un logiciel de calcul formel. Cette fonction est, dans le cas unidimensionnel, la solution la plus générale que nous ayons à utiliser dans cet article. Elle admet plusieurs cas particuliers ou limites intéressants. Tout d'abord, en faisant o_1- K o_0 , on retrouve la formule du call européen :

$$o_1 - Ko_0 := Se^{-r_M t}\Phi(D_1(S,K,r_M,r_N,\sigma,t)) - Ke^{-r_N t}\Phi(D_0(S,K,r_M,r_N,\sigma,t))$$

d'autre part en définissant la fonction limite f_μ par :

$$f_\mu := \lim_{K \to -\infty} o_\mu$$

ce qui s'explicite par :

$$f_\mu(S,K,r_M,r_N,\sigma,t) := S^\mu e^{((\mu-1)r_N - \mu r_M + \mu(\mu-1)\frac{\sigma^2}{2})\,t}$$

on a encore une solution de l'EDP. Ses cas particuliers pour μ égal à 0 ou à 1 sont tout simplement représentatifs de montants unitaires en devise N ou M.

Nous utilisons les solutions f pour le pricing des contrats futures et les solutions o pour celui des options.

La fonction $\hat{o}_\mu$ définie par

$$\hat{o}_\mu(S,K,r_M,r_N,\sigma,t) := - S^\mu e^{((\mu-1)r_N - \mu r_M + \mu(\mu-1)\frac{\sigma^2}{2})\,t}(1 - \Phi(D_\mu(S,K,r_M,r_N,\sigma,t)))$$

représente aussi une solution de l'EDP.

2 : Cas multidimensionnel

On pose

$$\Lambda_\mu(z,q,r_E,r_F,\sigma,t) := \frac{(z-q)}{\sigma_{EF}\sqrt{t}} + \frac{(r_E - r_F)t}{\sigma_{EF}\sqrt{t}} + (\mu\,\sigma_{EF} + \frac{\sigma_{ED}^2 - \sigma_{FD}^2}{2\,\sigma_{EF}})\sqrt{t}$$

$$\Delta_\mu(S,K,r_D,r_E,r_F,\sigma,t) := \Lambda_\mu(Ln(S),Ln(K),r_D,r_E,r_F,\sigma,t)$$

où σ désigne la matrice de volatilité ; son carré a pour termes diagonaux σ_{ED} et σ_{FD} , et pour terme non-diagonal $\rho_{ED\,,\,FD}\ \sigma_{ED}\ \sigma_{FD}$; la donnée de σ est équivalente à la donnée de ces trois termes, ou encore à la donnée des trois volatilités scalaires σ_{ED} , σ_{FD} et σ_{EF} . Alors la fonction ω_μ définie par

$$\omega_\mu(S_{ED},S_{FD},K_{FE},r_D,r_E,r_F,\sigma,t) :=$$
$$\left(\frac{S_{FD}}{S_{ED}}\right)^\mu e^{\left(\frac{\mu^2}{2}\sigma_{EF}{}^2+\frac{\mu}{2}(\sigma_{ED}{}^2-\sigma_{FD}{}^2)\ -\ r_D\ +\ \mu(r_E-r_F)\right)\,t}\,\Phi\left(\Delta_\mu\left(\frac{S_{FD}}{S_{ED}},K_{FE},r_D,r_E,r_F,\sigma,t\right)\right)$$

est solution de l'équation aux dérivées partielles de Garman-Kohlhagen (multidimentionnelle) :

$$\frac{\partial}{\partial t}f + \left(\frac{\sigma_{ED}^2 S_{ED}^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial S_{ED}^2} + \rho_{ED,FD}\,\sigma_{ED}\,\sigma_{FD}S_{ED}S_{FD}\frac{\partial^2}{\partial S_{ED}\partial S_{FD}} + \frac{\sigma_{FD}^2 S_{FD}^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial S_{FD}^2}\right)f$$
$$+ \left((r_D-r_E)S_{ED}\frac{\partial}{\partial S_{ED}} + (r_D-r_F)S_{FD}\frac{\partial}{\partial S_{FD}}\right)f - r_D f = 0$$

Là encore, la vérification a été opérée au moyen d'un logiciel de calcul formel.

En faisant ω_1- K ω_0 , on obtient la formule du call européen sur l'actif F (coté normalement en devise E) avec garantie de change en devise D : en particulier, si on élimine l'effet de garantie de change en faisant coïncider D et E, donc en annulant σ_{ED} et en égalisant σ_{FD} et σ_{EF} , on retrouve o_1- K o_0 , qui est comme on l'a dit ci-dessus la formule du call européen normal.

En définissant la fonction limite ϕ_μ par :

$$\phi_\mu := \lim_{K\to-\infty} \omega_\mu$$

ce qui s'explicite par :

$$\phi_\mu(S_{ED},S_{FD},K_{FE},r_D,r_E,r_F,\sigma,t) :=$$
$$S^\mu e^{(\frac{\mu^2}{2}\sigma_{EF}{}^2+\frac{\mu}{2}(\sigma_{ED}{}^2-\sigma_{FD}{}^2) - r_D + \mu(r_E-r_F))\, t}$$

on a encore une solution de l'EDP. Son cas particulier pour μ égal à 0 représente un montant unité en devise D Son cas particulier pour μ égal à 1 représente un future sur un montant unité de l'actif F (coté normalement en devise E) avec garantie de change en devise D.

Nous utilisons les solutions ϕ pour le pricing des contrats futures et les solutions ω pour celui des options.

<u>ANNEXE 2</u> : Exemples de vérification des solutions des EDP de Garman-Kohlhagen par un logiciel de calcul formel.

a : Cas scalaire, fonctions o_μ

```
ClearAll["Global`*"]
Gaussienne[t_,x_]=Exp[-x*x/2/t]/Sqrt[2*Pi]/Sqrt[t];
Gauss[t_,x_]=(1+Erf[x/Sqrt[2]/Sqrt[t]])/2;
Phi[y_]=(1+Erf[y/Sqrt[2]])/2;
D[Gaussienne[t,x],{x,2}]==D[2 Gaussienne[t,x],t]
D[Gauss[t,x],x]==Gaussienne[t,x]
D[Gauss[t,x],{x,2}]==D[2 Gauss[t,x],t]
Phi[x/Sqrt[t]]==Gauss[t,x]
True
True
True
True
(* Définitions des opérateurs fonctionnels *)
Garman[f_]=(-D[f[#1,#2,#3,#4,#5,#6,#7],#6]
+#5^2 #1^2/2 D[f[#1,#2,#3,#4,#5,#6,#7],{#1,2}]
+(#4-#3) #1 D[f[#1,#2,#3,#4,#5,#6,#7],#1]
-#4 f[#1,#2,#3,#4,#5,#6,#7])&;
(* Définition des fonctions de calcul *)
Forward[s_,rusd_,rdem_,t_]=s Exp[(rdem-rusd) t];
Lun[z_,q_,rusd_,rdem_,y_,t_]=
  (z-q)/y-(rusd-rdem)t/y+y/2;
Ldeux[z_,q_,rusd_,rdem_,y_,t_]=
  (z-q)/y-(rusd-rdem)t/y-y/2;
Lmu[z_,q_,rusd_,rdem_,y_,t_,mu_]=
  (z-q)/y-(rusd-rdem)t/y+y*(mu-1/2);
```

```
Dun[s_,k_,rusd_,rdem_,y_,t_]=
 Lun[Log[s],Log[k],rusd,rdem,y,t];
Ddeux[s_,k_,rusd_,rdem_,y_,t_]=
 Ldeux[Log[s],Log[k],rusd,rdem,y,t];
Dmu[s_,k_,rusd_,rdem_,y_,t_,mu_]=
 Lmu[Log[s],Log[k],rusd,rdem,y,t,mu];
OptionMu[s_,k_,rusd_,rdem_,sigma_,t_,mu_]=
  s^mu Exp[((mu-1) rdem-mu rusd+mu(mu-1)sigma^2/2) t];
CallMu[s_,k_,rusd_,rdem_,sigma_,t_,mu_]=
  s^mu Exp[((mu-1) rdem-mu rusd+mu(mu-1)sigma^2/2) t]*
  Phi[Dmu[s,k,rusd,rdem,sigma*Sqrt[t],t,mu]];
Garman[CallMu][s,k,rusd,rdem,sigma,t,mu]//ExpandAll//Together
0
```

b : Cas vectoriel, fonctions ω_μ

```
ClearAll["Global`*"]
Gaussienne[t_,x_]=Exp[-x*x/2/t]/Sqrt[2*Pi]/Sqrt[t];
Gauss[t_,x_]=(1+Erf[x/Sqrt[2]/Sqrt[t]])/2;
Phi[y_]=(1+Erf[y/Sqrt[2]])/2;
MultiGarman[f_]=(
 -D[f[#1,#2,#3,#4,#5,#6,#7,#8,#9,#10,#11],#11]
+#8^2 #1^2/2 D[f[#1,#2,#3,#4,#5,#6,#7,#8,#9,#10,#11],{#1,2}]
+#10 #8 #9 #1 #2 D[
 f[#1,#2,#3,#4,#5,#6,#7,#8,#9,#10,#11],#1,#2]
+#9^2 #2^2/2 D[f[#1,#2,#3,#4,#5,#6,#7,#8,#9,#10,#11],{#2,2}]
+(#5-#6) #1 D[f[#1,#2,#3,#4,#5,#6,#7,#8,#9,#10,#11],#1]
+(#5-#7) #2 D[f[#1,#2,#3,#4,#5,#6,#7,#8,#9,#10,#11],#2]
-#5 f[#1,#2,#3,#4,#5,#6,#7,#8,#9,#10,#11])&;
Lmu[z1_,z2_,q1_,q2_,rD_,rE_,rF_,y_,t_,mu_]=
  (z2-q2-z1+q1)/y+(rE-rF)t/y+y*mu;
Dmu[s1_,s2_,k1_,k2_,rD_,rE_,rF_,y_,t_,mu_]=
 Lmu[Log[s1],Log[s2],Log[k1],Log[k2],rD,rE,rF,y,t,mu];
OptionMu[sED_,sFD_,kED_,kFD_,rD_,rE_,rF_,
        sigED_,sigFD_,rho_,t_]=
 (sFD/sED)^mu Exp[
 (mu^2/2*sigEF^2+
  mu/2*(sigED^2-sigFD^2)-rD+mu*rE-mu*rF )t]*
 Phi[Dmu[sED,sFD,kED,kFD,rD,rE,rF,sigEF*Sqrt[t],t,mu]+
    (sigED^2-sigFD^2)*Sqrt[t]/2/sigEF];
MultiGarman[OptionMu][
 sED,sFD,kED,kFD,rD,rE,rF,sigED,sigFD,
 -(sigEF^2-sigFD^2-sigED^2)/2/sigED/sigFD,t]//
ExpandAll//Together
0
```