

Sur le Pilotage du Mark-Paris Avant sa Fixation Irrevocable

Vincent Brousseau

Résumé

Au début de la phase 3 de l'UEM, les parités de change entre les devises participantes seront irréversiblement fixées. La parité franc-mark, en particulier, est vraisemblablement concernée; sa fixation à un niveau inadéquat serait source de sérieuses difficultés. Ce travail étudie la possibilité d'une action des banques centrales en vue d'amener une parité mark contre autre devise participante à un niveau choisi par elles, sans révéler ce niveau: pour le marché, sa valeur probable se préciserait progressivement du fait de la convergence du cours vers cette cible cachée, mais il ne pourrait pas l'estimer plus finement. Le papier travaille sur un modèle classique (processus de Itô et contrôle stochastique), il démontre des résultats puis les illustre et en évalue la pertinence par des simulations numériques.

Abstract

Stage 3 of EMU will begin with the irrevocable fixing of conversion rates among the currencies of participating countries. Franc/mark parity is particularly concerned and its unappropriate fixing would lead to serious difficulties. This paper shows a possible action of the Central Banks to drive the parity mark against other currencies of participating countries at a level chosen by them without revealing this level. For market participants, this probable value should become precise progressively as the exchange rate would converge to this hidden target, but they wouldn't be able to estimate it more precisely. This paper is based on a classical model (from the Itô process and the stochastic control). It demonstrates results, illustrates them and evaluates their relevance with numerical simulations.

Keywords

Contrôle, diffusion, équation différentielle stochastique (EDS), solution faible, stratégie d'intervention, Wiener (processus de).

INTRODUCTION

La perspective d'une fixation irrévocable des parités de change entre le mark et les autres monnaies participant à l'UEM, qui doit en principe intervenir au premier janvier 1999, pose un dilemme aux autorités monétaires. Si elles n'agissent pas, si elles laissent faire les forces de marché, on risque d'arriver à une valeur finale du mark-Paris (ou du mark-pesete si l'Espagne rentre dans l'UEM) qui "entraînerait des changements brutaux dans la compétitivité relative" des pays concernés (Artus-Lenoir, 1996, page 19). Laissés à eux même en effet, les cours de change ne sont nullement tenus d'évoluer en fonction des données fondamentales. Du fait de l'existence de "pures bulles spéculatives ou les anticipations s'autoréalisent" (Artus-Lenoir, 1996, idem), la valeur finale du cours pourrait être légèrement aberrante, ce qui ne réjouirait personne. D'un autre côté, si les autorités monétaires annoncent un objectif, une valeur finale souhaitée pour le spot, et se disent déterminées à le défendre par des interventions sur le marché des changes, par un système de soutien illimité que les banques centrales concernées s'accordent mutuellement, alors il paraît évident que la spéculation sera tentée de les tester, et il est douteux que le jeu tourne à l'avantage des autorités monétaires. La réalisation d'une union monétaire serait gravement compromise par un succès de la spéculation. D'où la prise en considération du troisième possibilité, dans son principe assez simple : il existe bien une cible, mais sa valeur est tenue secrète ; la convergence du spot vers cette cible est assurée concrètement par des interventions, mais ces interventions ne sont pas annoncées, pas commentées, elles sont masquées. Tant que le marché reste dans l'incertitude quant à la valeur du spot d'arrêt choisie par les autorités monétaires, il lui est difficile de spéculer contre ce spot d'arrêt. La question qui se pose est : n'y a-t-il pas contradiction entre le secret sur le spot cible et la convergence effective du spot vers ce spot cible? En d'autres termes, si l'action des banques centrales est efficace, ne devient-elle pas du même coup visible, donc attaquant, donc menacée?

Le thème de la présente étude est un modèle qui suggère que l'efficacité de ce

pilotage vers la cible n'est pas contradictoire avec le maintien du secret sur la cible. Dans ce modèle, l'effet cumulé des interventions amène le spot, lorsque les parités doivent être gelées, à la valeur choisie par les autorités. De plus aucun moyen statistique, à aucun moment, ne permet d'estimer la valeur du spot cible avec une précision meilleure que celle que l'on a d'habitude, (qui résulte simplement de la volatilité et du temps restant à courir.)

Le plan de l'étude est le suivant : on explique d'abord, dans la section 1, comment modéliser le problème, comment en particulier on représente le contrôle que peuvent exercer les autorités monétaires sur les parités de change entre le mark et telle ou telle autre devise participant à l'UEM. La section 2 introduit ensuite les notations à employer, notations mathématiques d'une part, relatives aux objets du modèle d'autre part. En section 3, les propriétés à attendre du contrôle des autorités sur les parités sont exposées de manière qualitative et leurs définitions sont formalisées. La section 4 présente les résultats mathématiques, et la section 5, les simulations numériques qui les traduisent en termes concrets.

1 MODELISATION

On se place dans le cadre classique du modèle de Garman-Kohlhagen : le logarithme du spot est censé suivre un processus de Ito dont le coefficient de diffusion est constant (donc déterministe). L'action des autorités monétaires que l'on envisage est une suite d'interventions sur le marché spot de la parité à piloter. Chaque intervention, qui est ponctuelle, a pour effet de faire décaler ce cours spot. Modélisée en tant que telle, une intervention isolée serait donc représentée par une discontinuité - un saut - du processus. Cependant, on s'intéresse ici à la stratégie globale d'intervention, qui est donc un ensemble d'interventions. L'idéalisation mathématique de cet ensemble s'obtient en passant au cas limite où il y a une infinité de petites interventions réparties continûment dans le temps. La représentation de la stratégie globale d'intervention est donc un "trend", "drift" ou "terme de transfert" qui s'ajoute à celui du processus de Ito. Ainsi, les autorités monétaires contrôlent le drift total du processus.

Il faut remarquer que cette représentation du contrôle permettra d'en faire une estimation quantitative, parce qu'elle rend le contrôle comparable à des taux courts ou spreads de taux courts. Cette propriété sera utilisée en section 5, consacrée aux simulations numériques.

On suppose donc que les parités considérées suivent une diffusion

1/ dont la **volatilité** est constante et

2/ dont le terme de transfert ou **drift** est contrôlé par les autorités monétaires.

Sous la première hypothèse, on le rappelle, les probabilités risque-neutres associées aux devises sont de même volatilité que la probabilité objective, et de drifts différents, ces drifts dépendent uniquement des taux courts et de la volatilité et sont indépendants du drift de la probabilité objective.

Le drift de la probabilité objective représente le contrôle des autorités monétaires, il s'agit d'une fonction dont la régularité mathématique est suffisante pour que l'équation différentielle stochastique gouvernant l'évolution du spot ait une solution, mais d'un autre côté elle doit pouvoir être telle que cette solution atteigne, à l'instant final, une valeur précise ; on voit donc que cette régularité mathématique ne sera pas bien grande et en particulier on ne peut même pas exiger du drift qu'il soit borné (dans ce cas, la valeur du processus à l'instant final pourrait se trouver dans tout intervalle de \mathbb{R} , c'est justement pourquoi de tels processus sont dits "de diffusion"). Il n'en résulte nullement que la forme du drift qui sera retenue dans cette étude soit dépourvue de signification pratique : des simulations numériques faites à partir du cas théorique permettront de s'en assurer.

2 NOTATIONS

2.1 Notations mathématiques

On note $C[t_0, t_1]$ l'espace mesurable des fonctions continues de $[t_0, t_1]$ dans \mathbf{R} muni de sa tribu des boréliens.

Remarque : Cette tribu est aussi celle de Kolmogorov (i.e. engendrée par les ensembles cylindriques), voir sur ce point Guikhman-Skorokhod, 1983, chap. 9, §2 page 512.

On appelle trajectoire l'élément courant de $C[t_0, t_1]$, et on note une trajectoire z sous les deux formes z et $z(\cdot)$.

La position occupée par une trajectoire z à un instant $t \in [t_0, t_1]$ est notée sous les deux formes $z(t)$ et z_t . On s'autorise l'abus de notation z .

Une mesure ν sur l'espace mesurable $C[t_0, t_1]$ est notée sous les deux formes ν et $\nu(\delta z(\cdot))$. On pourra s'autoriser à user du même symbole pour un processus stochastique et pour la mesure qui lui est associée. En particulier W dénotera un processus de Wiener ou la mesure de Wiener.

La probabilité d'un ensemble A de trajectoires par rapport à la mesure ν est notée sous la forme $P_\nu(A)$. La probabilité d'un événement aléatoire ω est notée sous la forme $P(\omega)$.

Une fonction G sur l'espace mesurable $C[t_0, t_1]$, (que l'on appelle une fonctionnelle parce que les éléments de $C[t_0, t_1]$ sont déjà des fonctions,) est notée sous les deux formes G et $G(z(\cdot))$.

L'espérance de la fonctionnelle G par rapport à la mesure ν est notée sous les deux formes $E_\nu G$ ou $\int G(z(\cdot)).\nu(\delta z(\cdot))$.

Si ν est une mesure sur $C[t_0, t_1]$, l'ensemble des fonctionnelles mesurables de $C[t_0, t_1]$ dans \mathbf{R} , qui de plus sont ν -presque partout définies et ν -intégrables en

valeur absolue, est noté $L^1(C[t_0, t_1], \nu)$.

La solution d'une équation différentielle stochastique de la forme $dZ = a.dW + b.dt$, où W est un processus de Wiener et a et b des fonctions de Z_t et de t , est un processus stochastique, mais de ce processus seule nous intéresse la mesure ou probabilité, sur l'espace $C[t_0, t_1]$ (des trajectoires sur $[t_0, t_1]$), qui lui est associée. On dira que cette mesure est solution faible de l'EDS

Remarque : La mesure est associée au processus par le théorème de Kolmogorov (Guikhman-Skorokhod, 1983 chap. 2 § 2 théorème 5 page 105). Il s'agit d'une mesure sur l'espace des trajectoires muni de la tribu engendrée par les ensembles cylindriques. Mais, comme nous l'avons signalé dans la remarque précédente, cette tribu coïncide avec celle des boréliens dans le cas des espaces $C[t_0, t_1]$. On trouve parfois dans la littérature la solution faible définie dans la littérature comme un processus satisfaisant l'EDS pour W processus de Wiener non spécifié, comme dans Bensoussan, 1980. Si un processus a pour mesure associée une solution faible au sens retenu ici, alors ce processus est solution faible dans l'acceptation de Bensoussan, 1980 et inversement.

2.2 Notations relatives aux objets du modèle

L'instant final, représentant le jour d'entrée en vigueur de la phase 3, est noté T .

La volatilité est notée σ .

Le spot de la parité considérée est noté S_t , (éventuellement indicé par un t qui représente l'instant ou le spot est observé,) et il se comprend comme la contre-valeur de 1 mark dans l'autre devise.

Ce spot peut être représenté par une variable réduite y_t , (éventuellement indicé aussi par t , ou écrite comme fonction de t) définie comme le logarithme du spot divisé par la volatilité, de sorte que y_t diffuse comme un processus brownien de coefficient de diffusion égal à un. (On peut dire aussi que la diffusion de y_t est absolument continue par rapport à celle d'un processus de Wiener.)

La valeur (inconnue) du spot auquel les parités seront fixées est notée S_T , et est dénommée "le spot d'arrêt". La valeur du spot d'arrêt secrètement choisie par les autorités monétaires n'est pas notée, mais est dénommée "le spot cible", le y qui lui correspond est noté Y et dénommé "la cible".

Le drift ou contrôle des autorités monétaires est noté $b = b(y(t),t)$, de sorte que la loi de la trajectoire à venir de y , sachant $y(t_0)$, $t_0 < T$ (loi qui est une probabilité sur l'espace $C[t_0, T]$) est la solution faible de l'équation différentielle stochastique $dy = dW + b(y(t),t).dt$ pour la condition initiale $y(t_0)$, avec w un processus de Wiener. Cette solution faible est notée $\mu = \mu(\delta y(\cdot))$. Le contrôle b , et par voie de conséquence la loi de probabilité μ , dépendent de la cible Y : lorsqu'on voudra expliciter cette dépendance, on aura recours à la notation indicée, on écrira donc b_Y et μ_Y . D'autre part, il va de soi que la solution faible de l'EDS peut être considérée sur n'importe quel sous-intervalle $[t_0, t_1]$ de $[t_0, T]$, on dit alors que c'est une probabilité ou une mesure restreinte à $C[t_0, t_1]$ et on n'altère pas sa notation. On a donc sous la probabilité objective

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{dS}{S} &= \sigma dW + \left(\sigma b + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt \\ dy &= dW + b dt \end{aligned}$$

Par comparaison (mais on ne s'en servira pas), sous la probabilité mark-neutre, S et y diffusent selon

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{dS}{S} &= \sigma dW + (r_N - r_M + \sigma^2) dt \\ dy &= dW + \left(\frac{r_N - r_M}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right) dt \end{aligned}$$

et sous la probabilité neutre pour l'autre devise de l'UEM (cotée à l'incertain) ils diffusent selon

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{dS}{S} &= \sigma dW + (r_N - r_M) dt \\ dy &= dW + \left(\frac{r_N - r_M}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) dt \end{aligned}$$

ou r_M et r_N désignent les taux courts du mark et de l'autre devise de l'UEM.

3 DÉFINITIONS

On convient de dire qu'un contrôle est efficace s'il conduit nécessairement la valeur finale de y à être la cible Y , c'est-à-dire s'il contraint le spot d'arrêt à être le spot cible. Cette définition se formalise sans difficulté comme suit :

DÉFINITION 1 : Le contrôle b est efficace si pour toute condition initiale $t_0, y(t_0)$, l'EDS $dy = dW + b(y(t), t)$ a une solution faible sur $[t_0, t]$, si cette solution est unique, et si elle rend presque sur l'événement $y(T)=Y$ \square

Si on note μ la solution faible de l'EDS, on écrit :

$$(3.1) \quad P_\mu(y(T)=Y) = 1$$

Si le marché connaît l'existence et la forme du contrôle b , mais ne connaît pas la cible Y , cette cible est un paramètre de b , et donc de la loi de la diffusion de y .

On convient de dire qu'un contrôle est indécélable si la connaissance de son existence et de sa forme ne permet pas au marché d'améliorer son anticipation sur le spot d'arrêt.

Sans information sur l'existence du contrôle, et sous nos hypothèses, le marché admet pour le spot d'arrêt une loi lognormale, cette loi est telle que à la date t le logarithme du spot d'arrêt est gaussien de variance $\sigma^2 (T-t)$, et donc $y(T)$ est gaussien de variance $T-t$.

On souhaite donc dire d'un contrôle qu'il est indécélable si sans connaître Y mais en connaissant la forme de ce contrôle, l'observation du passé conduit à donner à Y une loi de variance au plus $T-t$.

Pour formaliser correctement cette définition, on doit entrer dans des considérations de théorie des probabilités d'un caractère plus technique.

Fixons un instant initial t_0 et une position initiale $y(t_0)$. Fixons d'autre part un instant courant t_1 et une position courante $y(t_1)$. On choisit une mesure de référence sur $C[t_0, t_1]$, typiquement celle du processus de Wiener partant en t_0 de la position initiale $y(t_0)$. On la note $W(\delta y(\cdot))$

Si pour tous les Y μ_Y (restreinte à $C[t_0, t_1]$) est absolument continue par rapport à cette mesure de référence, alors on est dans le cas de figure décrit par Koroliouk, 1983., chap. 24 § 6.1 page 539 : en observant la trajectoire passée de y , le marché peut calculer la vraisemblance $\mathfrak{f}(Y)$ des différentes valeurs possibles de Y , ceci afin d'estimer Y par la méthode du maximum de vraisemblance, ou encore de donner à Y une loi de probabilité sur la base de ces vraisemblances.

L'hypothèse d'absolue continuité de μ_Y par rapport à W entraîne en effet, par le théorème de Radon-Nikodym (Guikhman-Skorokhod, 1983, chap. 1, § 1 théorème 13 page 99), l'existence d'une fonction F_Y positive $L^1(C[t_0, t_1], W)$ qui est la densité de μ_Y par rapport à W , ce qui veut dire que pour toute fonctionnelle $G \in L^1(C[t_0, t_1], \mu_Y)$ on a $\int G(z(\cdot)) \cdot \mu_Y(\delta z(\cdot)) = \int G(z(\cdot)) \cdot F_Y(z(\cdot)) \cdot W(\delta z(\cdot))$. On a donc :

$$(3.2) \quad F_Y := \frac{d\mu_Y}{dW} \in L^1(C[t_0, t_1], W)$$

On définit la vraisemblance comme $F_Y(y^r(\cdot))$ où y^r est la trajectoire effectivement réalisée entre t_0 et t_1 , observée par le marché et donc entièrement connue de lui en t_1 .

$$(3.3) \quad v(Y) := F_Y(y^r(\cdot))$$

La valeur de Y qui maximise la quantité $v(Y)$ est appelé l'estimateur du maximum de vraisemblance de Y . D'autre part si existe l'intégrale de $v(Y)$ quand Y décrit \mathbf{R} , en divisant $v(Y)$ par cette intégrale on obtient une densité de probabilité sur \mathbf{R} qui

s'interprète comme celle de Y sachant la trajectoire passée et la forme du drift b . On convient d'appeler la probabilité ainsi définie "loi induite de Y ", et d'en noter la densité ρ_{induit} .

$$(3.4) \quad \rho_{\text{induit}}(Y) := \frac{v(Y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} v(Z) dZ}$$

On définira Y_{induit} comme une variable aléatoire réelle de loi de densité ρ_{induit} , Y_{induit} désigne donc la cible Y tel que la perçoit le marché s'il est informé de l'existence et de la forme du contrôle b .

Remarque : Si on remplace la mesure de référence par une autre telle que l'ancienne soit absolument continue par rapport à la nouvelle, et que la densité de l'ancienne par rapport à la nouvelle est bien définie en $y(\cdot)$, on ne modifie évidemment ni l'estimateur de vraisemblance maximale ni la loi induite. Ces notions sont donc largement indépendante du choix particulier de la mesure de référence ; il se trouve que l'on a pris W mais il n'y a pas de raison spéciale à cela.

On formalise alors la définition du contrôle indécélable comme suit :

DÉFINITION 2 : Le contrôle b est **indécélable** si pour tout sous-intervalle $[t_0, t_1]$ de $]-\infty, T]$ la loi induite de Y existe et a une variance inférieure ou égale à $T-t_1$. \square

$$(3.5) \quad \text{Var}(Y_{\text{induit}}) := \int_{-\infty}^{+\infty} Y^2 \rho_{\text{induit}}(Y) dY - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Y \rho_{\text{induit}}(Y) dY \right)^2 \leq T-t$$

4 RÉSULTATS

Les résultats portent sur une forme précise du contrôle b . Il est mathématiquement plus régulier que le contrôle représentant la défense rigide d'un niveau minimal ou maximal de la parité, et modélise de fait une stratégie d'intervention moins brutale.

On pose :

$$(4.1) \quad b(y, t) := \frac{Y-y}{T-t}$$

On obtient les deux résultats suivants :

THÉORÈME 1

Énoncé

Le contrôle b défini en (4.1) est efficace. \square

Démonstration

Au cours de la démonstration, on exprimera que la solution de l'EDS donne à l'événement $y(T)=Y$ la probabilité 1 en disant qu'elle "converge".

La démonstration se décompose en 3 parties :

1/ On montre que pour une condition initiale aléatoire bien choisie, l'EDS admet une unique solution qui converge.

Si Z est un processus de diffusion qui vérifie l'EDS $dZ = dW + c(Z_t, t).dt$, où $c=c(x,t)$ est un drift de classe C^1 et W est un processus de Wiener, et si $\rho = \rho(x,t)$ la densité de probabilité que $Z_t = x$, où x désigne un réel quelconque, alors ρ satisfait l'équation de Fokker-Planck (voir Koroliouk, 1983, chap. 19, § 1.1, théorème 2 page 130)

$$(4.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho c)$$

On se place sur un sous-intervalle compact $[t_0, t_1]$ de $[t_0, T]$. On utilise le fait que cette équation est invariante sous la transformation $t \rightarrow t^*$, $c \rightarrow c^*$, où t^* est défini par :

$$(4.3) \quad t^* := T - t$$

et c^* est défini par :

$$(4.4) \quad c^* := \frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho) - c$$

Ce point, aperçu en 1966 par Edward Nelson (dans un article de la Physical Review), se démontre au moyen d'un calcul simple : on part de l'équation (4.2) à laquelle on retranche et ajoute $\partial^2 \rho / \partial x^2 = \partial / \partial x (\rho \partial \ln(\rho) / \partial x)$, ce qui donne :

$$(4.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left(c - \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right) \right)$$

et conduit, en changeant le signe des deux cotés, à

$$(4.6) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t^*} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\rho c^*)$$

qui est l'équation de Fokker-Planck pour le temps t^* et pour le drift c^* .

Soit W^* un processus de Wiener à temps inversé valant Y en $t=T$, c'est-à-dire que W^* est tel que $W^*_T = Y$ et pour tous t_1, t_2 tels que $t_1 < t_2 < T$, $W^*_{t_1} - W^*_{t_2}$ est indépendant des $W^*_T, s \in [t_2, T]$, de distribution gaussienne de moyenne 0 et de variance $t_2 - t_1$. Soit ν la mesure sur $C[t_0, T]$ associée à ce processus. Soit $\rho = \rho(x, t)$ la densité de probabilité que $W^*_t = x$, ou x désigne un réel quelconque. Sur tout sous-intervalle compact $[t_0, t_1]$ de $[t_0, T]$, ρ vérifie l'équation de Fokker-Plank

pour le temps t^* et pour le drift 0, puisque W^* est un processus de Wiener pour le temps t^* . Mais alors ρ vérifie l'équation de Fokker-Plank pour le temps t et pour le drift $\partial \ln(\rho)/\partial x$. La forme de ρ est explicitement connue et vaut :

$$(4.7) \quad \rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{(x-Y)^2}{2(T-t)}}$$

de sorte que le drift est précisément le b défini en (4.1). Ainsi, sur tout sous-intervalle compact $[t_0, t_1]$ de $[t_0, T]$, la mesure ν restreinte à $[t_0, t_1]$ est solution faible de l'EDS, pour une condition initiale aléatoire indépendante des dW_t , $t \in [t_0, t_1]$, et dont la loi a pour densité ρ_0 donné par :

$$(4.8) \quad \rho_0(x) := \rho(x, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_0)}} e^{-\frac{(x-Y)^2}{2(T-t_0)}}$$

Qu'elle soit unique pour cette condition initiale est une conséquence triviale de la régularité de b sur $[t_0, t_1]$, ou il est de classe C^1 . Comme t_1 peut être pris arbitrairement proche de T , on obtient immédiatement que ν est l'unique solution faible pour le drift b défini en (4.1) et la condition initiale donnée en (4.8). Et ν converge puisque W^* vaut par construction Y en $t=T$.

$$(4.9) \quad P_\nu(y(T)=Y) := P(W^*_T=Y) = 1$$

2/ On montre que pour presque toute position initiale (déterministe) $y(t_0)$ la solution de l'EDS pour le drift b converge. S'il en était autrement, en intégrant sur la condition initiale (4.8) on arriverait à une contradiction.

3/ On montre que si la solution de l'EDS converge pour presque toutes les conditions initiales $y(t_0)$, $t_0 < T$, alors elle converge pour toutes. Choisissons une condition initiale quelconque $y(t_0)$, $t_0 < T$. Il suffit de prendre un t_1 strictement compris entre t_0 et T et d'utiliser le résultat de l'étape précédente pour ce t_1 ; on

a donc que la solution de l'EDS converge pour presque toutes les conditions initiales $y(t_1)$, $t_1 < T$, or la distribution de $y(t_1)$ sachant $y(t_0)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, donc la solution de l'EDS converge pour la condition initiale particulière par nous choisie. ■

THÉORÈME 2

Énoncé

Le contrôle b défini en (4.1) est indécélabile. □

Démonstration

On se place sur $[t_0, t_1]$, sous-intervalle compact de $[t_0, T]$. On calcule l'estimateur de maximum de vraisemblance et la loi induite de Y , connaissant la forme de b et observant la réalisation de la trajectoire sur $[t_0, t_1]$. On note b_Y le drift et μ_Y la solution faible de l'EDS pour ce drift, afin d'expliciter leur dépendance en Y vu comme un paramètre.

D'après le théorème de Girsanov, (Guikhman-Skorokhod, 1983 chap. 8 § 6, théorème 1 page 493; Koroliouk, 1983, chap. 9 § 4.2 page 213) la mesure μ_Y est absolument continue par rapport à celle de Wiener et sa densité vaut

$$(4.10) \quad F_Y(y(\cdot)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} \left\{ b dy - \frac{b^2}{2} dt \right\}\right)$$

qui est donc une fonction de $L^1(C[t_0, t_1], W)$, définie W -presque partout. La spécification [4.1] de b conduit à

$$(4.11) \quad F_Y(y(\cdot)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{Y-y}{T-t} dy - \frac{1}{2} \frac{(Y-y)^2}{(T-t)^2} dt \right\}\right)$$

La formule de Ito dit que

$$(4.12) \quad d((y-Y)^2) = 2(y-Y)dy + dt$$

En reportant dans (4.11), il vient

$$(4.13) \quad \begin{aligned} F_Y(y(\cdot)) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{dt}{(T-t)} + \frac{d((y-Y)^2)}{(T-t)} + \frac{(Y-y)^2}{(T-t)^2} dt \right\}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{dt}{(T-t)} + d\left(\frac{(y-Y)^2}{T-t}\right) \right\}\right) \end{aligned}$$

ce qui est explicitement intégrable et donne

$$(4.14) \quad F_Y(y(\cdot)) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{T-t_0}{T-t_1}\right) - \frac{(y(t_1)-Y)^2}{T-t_1} + \frac{(y(t_0)-Y)^2}{T-t_0}\right)$$

soit encore

$$(4.15) \quad \begin{aligned} F_Y(y(\cdot)) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{T-t_1} - \frac{1}{T-t_0}\right) Y^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\left(\frac{y(t_1)}{T-t_1} - \frac{y(t_0)}{T-t_0}\right) Y + \left(\ln\left(\frac{T-t_1}{T-t_0}\right) + \frac{y(t_1)^2}{T-t_1} - \frac{y(t_0)^2}{T-t_0}\right) \right\}\right) \end{aligned}$$

$u(Y)$, qui a été définie en (3.3) comme $F_Y(y^r(\cdot))$ où y^r est la trajectoire effectivement réalisée entre t_0 et t_1 , est donc proportionnelle à une densité gaussienne ρ_{induit} qui s'écrit :

$$(4.16) \quad \rho_{\text{induit}}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{1}{T-t_1} - \frac{1}{T-t_0}\right)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T-t_1} - \frac{1}{T-t_0}\right) \left(Y - \left(\frac{y^r(t_1)}{T-t_1} - \frac{y^r(t_0)}{T-t_0}\right)\right)^2\right)$$

ρ_{induit} a pour variance

$$(4.17) \quad \text{Var}(Y_{\text{induit}}) = \frac{1}{T-t_1} - \frac{1}{T-t_0}$$

et pour moyenne

$$(4.18) \quad (\overline{Y}_{\text{induit}}) = \frac{y'(t_1)}{T-t_1} - \frac{y'(t_0)}{T-t_0}$$

Pour tout t_0 , la variance (4.18) est supérieure à $T-t_1$, qui en constitue la limite lorsque t_0 tend vers moins l'infini. Au vu de la définition 2, on a donc que le contrôle b est indécélable. ■

5 SIMULATIONS

5.1 Simulations portant sur l'efficacité du contrôle étudié ci-dessus

5.1.1 Implémentation de la simulation sur un tableur

On a implémenté la simulation sur 2932 pas de discrétisation, soit 4 pas par jour du 12 mars 1996 inclus au 31 décembre 1998 inclus, les samedis et les dimanches étant exclus. La volatilité est supposée répartie également sur chaque pas de discrétisation (c'est-à-dire que la variance du logarithme du spot est la même du jeudi matin au vendredi matin que du vendredi matin au lundi matin, par exemple).

La mise en œuvre s'effectue comme suit : Quatre cases sont affectés à des paramètres globaux représentant le spot cible (\$spotcible), la cible Y (\$cible), la volatilité (\$volat) et le spot de départ (\$spot). Le paramètre \$cible est défini par la formule :

$$100 * @RACINE(1044) * (@LN($SPOTCIBLE) - @LN($SPOT)) / $VOLAT$$

(le nombre 1044 est celui des pas de discrétisation qu'il y a entre le 12/05/96, inclus, et le 12/05/96, exclu.)

Les trois autres paramètres sont entrés comme des constantes numériques.

Une première colonne, représentative du bruit blanc et nommée dw, est emplie de 2932 nombres aléatoires distribués selon une loi gaussienne centrée réduite. Une deuxième colonne, représentant le temps continu, contient les nombres entiers de 1 à 2932. Une troisième colonne, représentant le processus de Wiener et nommée w, contient naturellement des nombres de la forme $+w_1 + dw$, si "_1" désigne le décalage d'une case vers le haut ; il convient de placer dw dans la case du haut. Une quatrième colonne, représentant le drift ou contrôle et nommée b, contient des nombres de la forme $(\$CIBLE - y) / (2933 - t)$. La cinquième colonne, représentant le processus contrôlé, solution de l'EDS, et nommée y, contient des nombres de la forme $+y_1 + dw + b_1$; il convient de placer dw dans la case du haut.

Deux colonnes, représentant l'évolution du spot en l'absence de contrôle, ou en

présence du contrôle b , s'obtiennent facilement à partir des colonnes w et y en utilisant la formule de passage :

$$+\$SPOT* @EXP(W*\$VOLAT/100/@RACINE(1044))$$

dans le premier cas, ou la même en changeant w en y , dans le second.

La visualisation des résultats se fait par un graphique de ces deux dernières colonnes. Pour en faciliter la lecture, on traduit t en dates réelles qui apparaissent sur l'axe des abscisses.

5.1.2 Résultats de la simulation

Les résultats, dont trois exemples sont présentés en annexe 1, sont obtenus pour les conditions suivantes :

une volatilité de 2.5% pour les deux premiers exemples, de 4% pour le troisième
un spot de départ de 3.4242 le 12 mars 1996 au matin
un spot cible de 3.48 figure.

5.1.3 Interprétation des résultats

Il apparait que le processus contrôlé atteint la cible prescrite, on notera en outre que son aspect graphique ne se distingue pas de celui d'un brownien ordinaire (ce qui est naturel puisqu'il équivaut mathématiquement à un brownien de temps inversé, et qui suggère d'autre part que le contrôle est indécélable.)

5.2 Simulations permettant de mesurer l'importance du contrôle

5.2.1 Principe

L'action stabilisatrice de l'autorité monétaire consiste en une série d'interventions sur le marché des changes, dont l'effet est de modifier ("faire décaler") le spot. Si ces interventions sont ponctuelles, leur série peut être vue comme une influence répartie continûment dans le temps. C'est le terme b , drift ou terme de transfert de

y, qui modélise cette influence.

D'autre part, le drift de dS/S s'interprète naturellement comme un taux court. Ce drift vaut $\sigma \cdot b + \sigma^2/2$. Ainsi, le produit $\sigma \cdot b$ est mathématiquement comparable aux taux courts des modèles de Black ou de Garman-Kohlhagen, comme on peut d'ailleurs le voir en comparant les formules (2.1), (2.2) et (2.3).

On peut donc mesurer le contrôle en comparant le produit $\sigma \cdot b$ à des niveaux de taux ou de spread de taux : cela donne déjà une idée de l'ordre de grandeur des interventions requises par la stratégie de stabilisation d'une parité.

Le drift b obtenu dans la simulation précédente doit être annualisé, ce qu'on fait en le multipliant par 1044, le nombre de pas de discrétisation dans un an. Il faut ensuite le multiplier par la volatilité, qui est déjà annualisée mais exprimée en pourcentage. On divise par cent pour obtenir une quantité comparable à un taux court de modèle de Black. On a la quantité

$$(5.1) \quad \text{Taux continu equivalent} = \frac{b\sqrt{1044}}{100}$$

(En toute rigueur, on devrait ajouter ici un terme en $\sigma^2/2$, mais il est petit et indépendant de b , on le néglige.) On va la convertir en un taux court de marché, c'est à dire monétaire ou linéaire, et de base exact sur 360, selon les conventions utilisées pour le mark et pour le franc français. La conversion conduit à

$$(5.2) \quad \text{Taux monétaire equivalent} = \frac{36000}{365} \left(e^{\frac{b\sqrt{1044}}{100}} - 1 \right)$$

il faut prendre garde que le taux monétaire (5.2), à la différence du taux continu (5.1), est exprimé en pourcentage.

5.2.2 Implémentation de la simulation sur un tableur

On utilise ce qui a déjà été implémenté pour la simulation précédente. On ajoute une colonne représentant la valeur absolue du drift traduit en équivalent de taux monétaires monétaires, de base exact/360. Elle contient donc des nombres de la

forme :

$(@EXP(\$VOLAT/100*@RACINE(1044)*@ABS(B))-1)*36000/365$

La visualisation des résultats se fait par un graphique de cette colonne. Il est opportun d'utiliser une échelle logarithmique en ordonnée.

5.2.3 Résultats de la simulation

Les résultats sont présentés en annexe 2 et correspondent aux trois exemples de l'annexe 1.

5.2.4 Interprétation des résultats

L'importance du contrôle traduit en termes de taux de marchés se lit sur les graphiques. On observe que l'influence du contrôle est de l'ordre de quelque pour cent pendant la majeure partie du temps (c'est-à-dire de de l'ordre de grandeur du spread de taux dollar-mark ou franc-mark.) Elle n'atteint une taille importante de 5% ou plus que dans les tous derniers jours du processus *alors que la convergence vers la cible est déjà pratiquement assurée* comme on le constate en se rapportant aux graphiques de l'annexe 1.

Remarque : Les décrochages brutaux vers le bas, que présentent les trois graphiques de l'annexe 2, sont dus à l'échelle logarithmique et correspondent aux cas où y croise la cible ou s'en approche, ce qui entraîne un petit drift.

5.3 Simulations où le contrôle est exagéré ou atténué

5.3.1 Principe

Quand on remplace le contrôle $b=(Y-y)/(T-t)$ par $b'=\mu.b$, où $\mu > 0$ peut être plus ou moins grand que 1, on n'a plus d'expression explicite de la solution faible de l'EDS, peut-être n'en existe-t-il pas, en tout cas la méthode de la section 4 ne

s'applique pas telle quelle. Cependant, il est facile de modifier les simulations pour examiner ces cas.

5.3.2 Résultats de la simulation

Les résultats sont présentés en annexe 3. Ils ne sont pas liés aux trois exemples des annexes 1 et 2, mais proviennent d'un quatrième tirage aléatoire, qui leur est commun, et dont la volatilité est de 2.5%. On montre les trajectoires correspondant aux drifts (sur y) 0, b et $\mu \cdot b$, avec un exemple où μ est grand ($\mu=5$), un exemple où μ est moyen ($\mu=0.65$) et un exemple où μ est petit ($\mu=0.2$). Bien que le contrôle débute, dans cette simulation aussi, à la date du 12 mai 1994, on n'a représenté sur les graphiques que la dernière année pour des questions de lisibilité.

5.3.3 Interprétation des résultats

Ces interprétations sont seulement suggérées, puisqu'on n'a fait ni calcul formel ni démonstration lorsque μ est différent de 1. On observe deux choses intéressantes. Premièrement, pour μ petit la propriété de convergence vers la cible semble se perdre, tandis que pour μ grand la propriété d'indécelabilité se perd. (En ce qui concerne cette dernière, on observe que le spot oscille de manière serrée autour de la valeur cible durant toute la dernière année.) Cela semble indiquer que le contrôle $b=(Y-y)/(T-t)$ constitue un compromis optimal entre les deux exigences.

Deuxièmement, il faut, pour observer une altération du comportement de la trajectoire, s'éloigner significativement de 1. Les simulations sont assez finement discrétisées, puisqu'elles comptent quelque trois mille pas, de sorte qu'on peut présumer que les propriétés d'efficacité et d'indécelabilité ont une certaine robustesse.

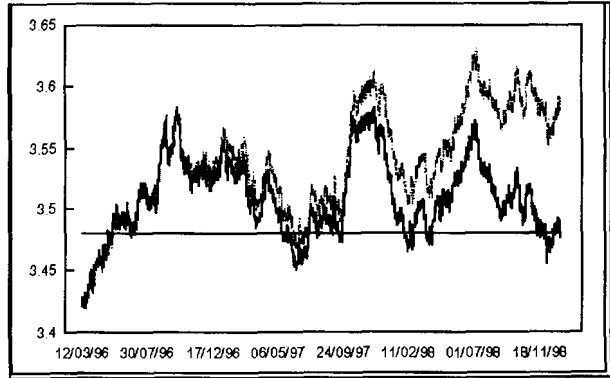
CONCLUSION

Plusieurs questions mériteraient d'être approfondies. Tout d'abord, on sait que la volatilité n'est pas constante. Peut-on adapter la stratégie étudiée à cette réalité? La formulation mathématique paraît difficile à transposer. D'un autre côté, il résulte des simulations du 5.3 que les deux qualités, d'"efficacité" et d'"indécélabilité", sont assez peu sensibles à l'exagération ou à l'atténuation du contrôle ; disons qu'elles se conservent lorsqu'on multiplie le contrôle par un coefficient entre 1/2 et 2. Or le contrôle étudié ici est proportionnel à la volatilité, ce qui semble suggérer que la stratégie fonctionne encore. Un autre développement intéressant serait le suivant : les interventions, modélisées de façon continue par un contrôle stochastique, ont dans la réalité un caractère ponctuel, donc discret (au sens mathématique du terme). Comment transcrire au mieux la stratégie continue, qui est une idéalisation mathématique, en stratégie composée d'un ensemble d'interventions, qui peut prendre place dans le monde réel?

Il reste que le contrôle proposé ici est d'une conception simple et conduit à des valeurs numériques qui ne sont pas démesurées. On peut imaginer que les autorités monétaires tenteront d'appliquer une stratégie de ce genre.

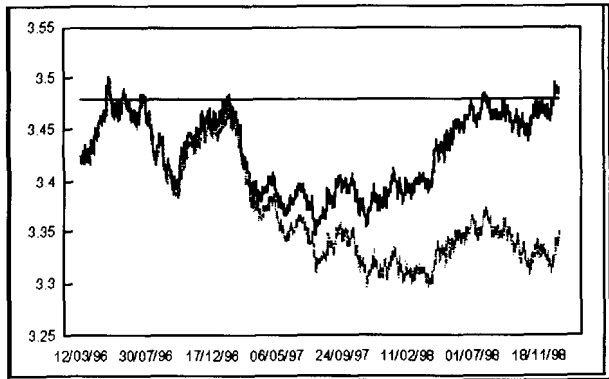
ANNEXE 1 Pilotage du mark-Paris vers 3.48 : trois exemples

Couleur claire :
drift de y nul.



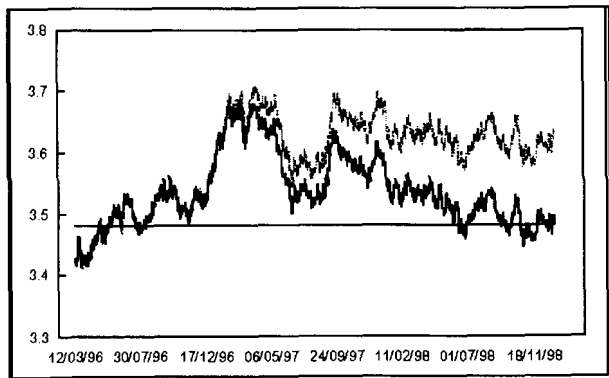
Couleur sombre :
drift de $y = b$.

vol : 2.5%



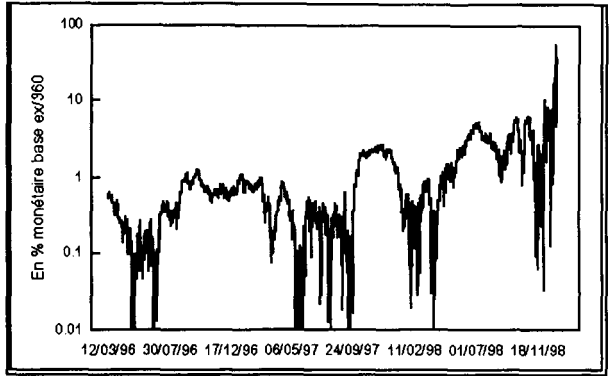
vol : 2.5%

vol : 4%

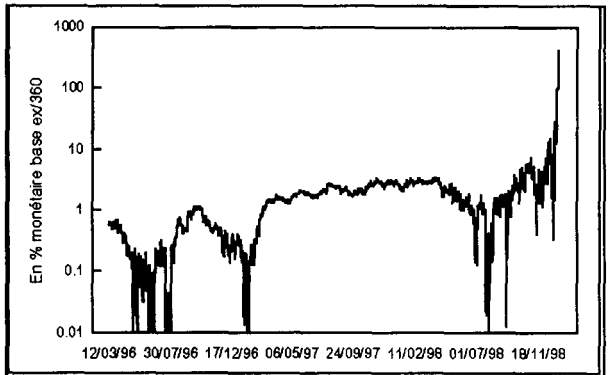


ANNEXE 2 Equivalent du contrôle en terme de taux monétaires pour les trois exemples

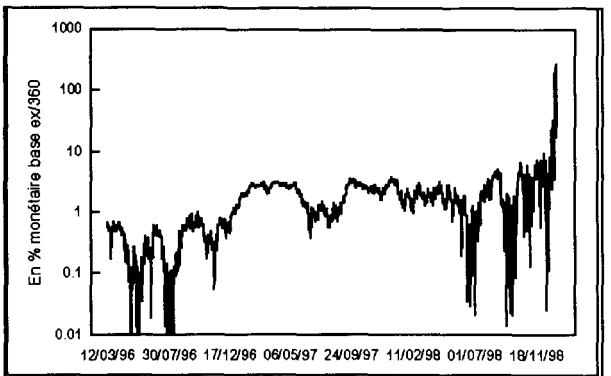
vol : 2.5%



vol : 2.5%



vol : 4%



ANNEXE 3 Un exemple avec contrôles correct et intensifié ou diminué (année finale)

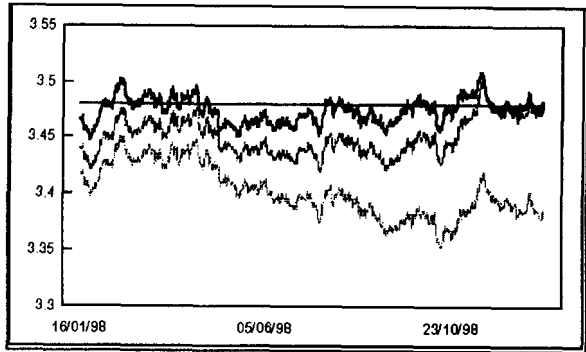
Drift de y

Couleur sombre : μb

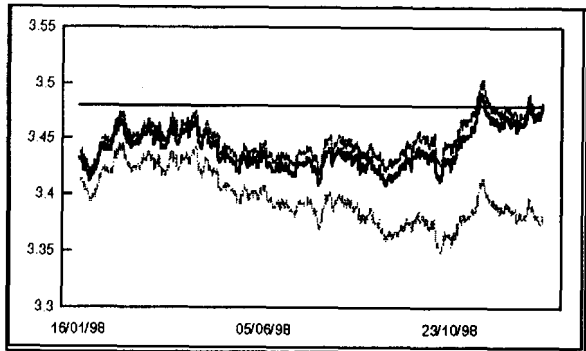
Couleur moyenne : b

Couleur claire : 0

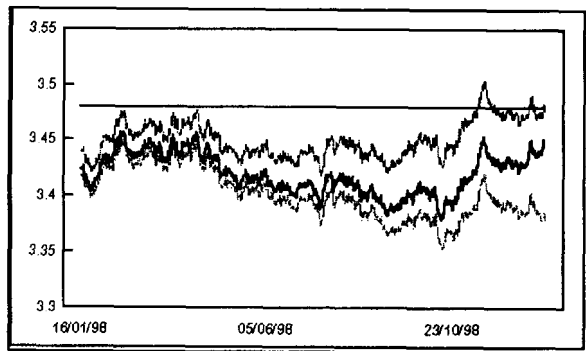
$\mu=5$



$\mu=0.65$



$\mu=0.2$



BIBLIOGRAPHIE

ARTUS P., " Les pièges de l'unification précoce ", CDC Service de la Recherche, Flash n° 96-13, Février 1996

ARTUS P., LENOIR K., " De l'Ecu à l'Euro, quelles conséquences pour les marchés financiers ", CDC Service de la Recherche, Etude, n° spécial, Janvier 1996

BENSOUSSAN A., " Stochastic Control by Functional Analysis Methods ", North-Holland, 1982

GUIKHMAN I., SKOROKHOD A., " Introduction à la théorie des processus aléatoires ", Editions Mir, 1980

KOROLIOUK V ., " Aide mémoire de théorie des probabilités et de statistique mathématique ", Editions Mir, 1983