Extension de Concepts Financiers en Calcul Flou et Application à l´Adossement de Flux

Guillaume Bouet et Richard Dalaud

Résumé

La prise en compte de l´incertain en finance s´opère traditionellement au moyen de la théorie des probabilités. En pratique, cette approche se heurte parfois à des obstacles lorsque l´incertitude est grande. D´une part, le phénomène étudié est parfois répété un nombre insuffisant de fois pour en déduire une mesure de probabilité objective fiable. D´autre part, le décideur n´est pas toujours capable d´identifier tous les événements possibles (mutuellement disjoints) et de leur affecter une probabilité subjective qui mesure son sentiment d´incertitude. En fait, le calcul de probabilités n´est pas adapté à un corps de connaissances très imprécis. Le calcul flou en revanche est une technique plus souple qui offre une réponse pratique.

Le recours à des quantités floues n´est pas nouveau en finance. Cet article propose une méthode systématique pour transformer les concepts habituels de la finance en quantités floues. Trop souvent en effet cette transformation rest limitée à un concept particulier et est entâchée d´arbitraire. Nous faisons pour cela un usage intensif du "principe d´extension des mathématiques floues" de Zadeh. Ce principe étend aux nombres flous toutes les opérations usuelles sur les nombres réels. Il nous permet de définir rigoureusement l´équivalent flou de concepts financiers et économiques tels que la duration et l´utilité, et de les interpréter. Nous illustrons cette démarche sur l´exemple de l´adossement de flux dont les dates d´occurrence sont incertaines, question qui, à notre connaissance, est traitée extensivement pour la première fois en calcul flou.

Mots clefs

Adossement de flux, duration, immunisation, nombres flous, principe d´extension, utilité.

Abstract

Taking uncertainty into account in finance is usually operated through the theory of probability. In practice, this approach sometimes encounters obstacles when uncertainty is important. On one hand, the phenomenon under study is sometimes repeated an insufficient number of times in order to deduce a reliable objective probability measure. On the other hand, the reader is not always capable of identifying all possible events (mutually disjoint) and attributing a subjective probability which measures his feeling of uncertainty. In fact, probability calculus is not adapted to a very imprecise corpus of knowledge. Fuzzy calculus is a more supple technique which gives a pragmatic answer.

Calling upon fuzzy numbers is not new in finance. This paper proposes a systematic method of transforming usual financial concepts into fuzzy numbers. Most of the time indeed this transformation is restrained to a particular concept and is tainted with arbitrariness. In order to do that, we make an intensive use of the "extension principle of fuzzy mathematics" of Zadeh. This principle extends any mathematical operations that can be performed on real numbers to fuzzy numbers. It allows us to rigorously define the fuzzy equivalent of financial and economical concepts such as duration and utility, and to interpret them. Our example of the matching of cash-flows whose occurrence dates are uncertain, an issue that, to our knowledge, is extensively examined for the first time in fuzzy calculus, illustrates this method.

Keywords

Cash-flow matching, duration, extension principle, fuzzy numbers, immunization, utility.

Direction Recherche et Innovation, Credit Commercial de France, 103, Avenue des Champs-Elysées, F - 75008 Paris (France); Tel: + 33-1-40 70 34 89, Fax: + 33-1-40 70 30 31, E-mail: dri@calvacom.fr

1. Introduction

Jusqu'à il y a peu, dans les problèmes de décision, tout ce qui n'était pas connu avec certitude était modélisé dans le cadre du calcul de probabilités. Cela est vrai en particulier pour les incertitudes relatives à l'occurrence d'événements, domaine où la théorie des probabilités a été utilisée abusivement sans se soucier de savoir si ses axiomes étaient satisfaits, notamment la loi des grands nombres. Plus généralement, on ne se préoccupait pas de savoir si ces événements pouvaient réellement être décrits de façon univoque. De nouveaux concepts se sont développés depuis une vingtaine d'années pour modéliser aussi bien l'occurrence que la description d'événements incertains : théories de l'évidence, des ensembles flous et des possibilités. Ces deux dernières théories ont déjà connu des apllications en finance (voir 2], [3] et [4]).

Mais comme toute nouvelle technique, le calcul de quantités floues n'a pas échappé au cycle de l'appropriation humaine qui part d'un intérêt légitime pour les choses neuves, passe par l'enthousiasme de voir se résoudre des questions autrement difficiles, et conduit parfois à l'overdose que provoque un recours excessif. Le calcul flou est en train de quitter ce cycle de jeunesse pour entrer dans celui de la maturité : il s'agit maintenant de bien baliser le domaine dans lequel il peut être appliqué. L'objectif de cet article est de s'interroger sur le « quand » et le « comment » du calcul flou en finance, à travers un exemple qui sert de fil rouge : l'adossement de flux.

Pour répondre à ces questions de méthode, il faut au préalable se pencher sur les différents types d'incertitudes qui entachent toute décision. Il y a d'abord l'incertitude sur l'univers des choix possibles. Cette incertitude naît d'un défaut d'imagination, de l'immensité des alternatives, et de l'imprécision des spécifications. Il y a ensuite l'incertitude sur les conséquences de ces choix ; on la modélise généralement par les « états du monde possibles », que l'on résume par des variables d'état. Ce sont les valeurs que peuvent prendre ces variables qui vont rendre certains états plus vraisemblables que d'autres, hiérarchie qui pourra être établie en fonction du degré d'informations dont on dispose. Enfin il y a l'incertitude sur les préférences. On admet généralement en économie qu'un décideur est au moins capable d'ordonner les conséquences de ses actes selon une utilité ordinale (aucune opération arithmétique ne peut être menée, c'est juste un classement). En finance, la théorie est allée plus loin en prêtant au décideur la capacité d'une mesure numérique de sa satisfaction (utilité cardinale de Von Neuman Morgernsten), réduite de surcroît à un critère unique (voir [11]).

Ces éléments nous permettent de dire quand il faut avoir recours au calcul flou. Celui-ci est adapté lorsque l'imprécision sur les tenants et les aboutissants d'un choix (deux premiers types d'incertitudes) est trop prononcée pour être probabilisée, mais obéit à un minimum exigible. C'est l'objet de la section 2 de cet article que de distinguer les situations d'incertain risqué et d'incertain régulier. L'autre moment privilégié d'utilisation du calcul flou intervient lorsque le décideur dispose d'une structure de préférence minimale (une utilité ordinale), mais qu'il est incapable de dire « combien » il préfère une situation à une autre : c'est l'objet de la section 4, qui traite aussi du cas plus général où la satisfaction est multicritère.

Quant au « comment » du calcul flou en finance, il nous est apparu nécessaire de proposer une démarche systématique qui évite les choix trop souvent arbitraires qui consiste à réécrire tous les concepts financiers comme des quantités floues. Nous proposons de bien distinguer l'espace des attributs de celui des objets : la duration par exemple est un objet financier, dont la valeur dépend de celles de ses attributs que sont le niveau des taux d'intérêt, les flux et l'horizon de l'instrument financier étudié. Fondamentalement, l'incertitude sur l'objet provient de l'incertitude sur ses attributs. La section 3 illustre comment la représentation floue d'un objet financier peut être déduite de façon univoque de celle de ses attributs, et ce en utilisant le principe d'extension des mathématiques floues de Zadeh qui est présenté dans la section 2.

2. Eléments de calcul flou en finance

2.1 Croyances, probabilités et possibilités

Soient un univers de référence X et B un sous-ensemble de X. On affecte à tout sous-ensemble B un coefficient de croyance m(B) de sorte que : $\sum_{B \subseteq X} m(B) = 1$. Si m(B) est non-nul, B est appelé élément focal de X. Pour tout événement (sous-ensemble) A de X, on définit un degré de croyance calculé à partir de tous les éléments focaux B qui rendent A nécessaire (c'est-à-dire $B \subseteq A$), et un degré de plausibilité calculé à partir de tous les éléments focaux B qui rendent A possible (c'est-à-dire $B \cap A = \varnothing$) :

- un degré de croyance : $Cr(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$
- un degré de plausibilité : $Pl(A) = \sum_{A \cap B \neq \varnothing} m(B)$.

On montre que $Cr(A) \leq Pl(A)$ et que $Cr(A) = 1 - Pl(\overline{A})$ où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans X. On trouvera le développement complet de la théorie de l'évidence dans [8].

Deux cas particuliers jouent un rôle essentiel. Si les éléments focaux sont des singletons, les deux degrés coïncident et donnent une mesure de probabilité : $Cr(A) = Pl(A) = P(A)$ et en particulier : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si les éléments focaux sont emboîtés, alors :

- Pl(A) définit un degré de possibilité : $Pl(A) = \Pi(A)$ et $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$
- Cr(A) définit un degré de nécessité : $Cr(A) = N(A)$ et $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$

Ces cas particuliers se distinguent suivant deux axes importants qui donnent la clé du « quand » utiliser un mode de calcul plutôt qu'un autre et que nous allons détailler :

- d'une part, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ mais $N(A) = 1 - \Pi(\overline{A})$;
- d'autre part, $N(A) \leq P(A) \leq \Pi(A)$.

Le premier axe illustre qu'alors que la probabilité d'un événement définit celle de son contraire, les possibilités de deux événements contraires ne sont que faiblement liées. Cela vient de ce qu'en probabilité, on est capable de partitionner un événement en événements élémentaires disjoints (les éléments focaux sont des singletons). Une mesure de probabilité synthétise donc un corps de connaissances précises et différenciées. A l'inverse, une mesure de possibilité reflète des connaissances imprécises mais cohérentes.

Le deuxième angle illustre qu'une mesure de possibilité définit implicitement une mesure de probabilité. Inversement, si l'on ne peut qu'imparfaitement donner la probabilité d'un événement, mais que l'on peut fournir un intervalle dans lequel elle se situe, alors le calcul flou est adapté. Cela distingue l'incertain risqué, où l'incertitude peut être modélisée par des lois de probabilité, de l'incertain régulier, où elle est au mieux définie par l'enveloppe de ces lois.

Au total, une condition nécessaire pour le recours au calcul flou est que le calcul de probabilité s'avère inopérant. Mais cette condition n'est pas suffisante, car le calcul flou ne s'adapte pas à tout type d'incertitude et exige un minimum de structure dans les croyances.

2.2 Quantités floues et principe d'extension

A partir d'une mesure de possibilité Π, on construit une distribution de possibilité π et inversement :

$\forall x \in X \ \pi(x) = \Pi(\{x\})$

$\forall A \in 2^X \ \Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x)$ où 2^X est l'ensemble des parties de X.

La distribution π permet de construire une mesure de nécessité :

$\forall A \in 2^X \ N(A) = \inf_{x \notin A}(1 - \pi(x))$

On construit aussi des distributions de possibilité conjointe, marginale et conditionnelle (voir [7]).

De même qu'un sous-ensemble classique A de X est défini par sa fonction caractéristique χ_A de X vers la paire $\{0,1\}$, un sous-ensemble flou est défini par sa fonction d'appartenance π_A de X vers l'intervalle $[0,1]$. La fonction d'appartenance peut naturellement être vue comme une distribution de possibilité. Une quantité floue est un sous-ensemble flou de l'ensemble des réels.

Une question récurrente dans le calcul flou en finance est la suivante : étant donné une fonction sur des nombres réels (par exemple la valeur nette présente d'une séquence de flux), que devient-elle lorsque les données manipulées sont des quantités floues (par exemple les montants des cash-flows, ou les taux d'actualisation) ? La réponse est que l'image par la fonction est aussi une quantité floue, dont la fonction d'appartenance est rigoureusement définie par le principe d'extension de Zadeh.

<u>Principe d'extension de Zadeh</u>
Soit une fonction f de X vers Y, et A un sous-ensemble flou de X.

$$\forall y \in Y \ \pi_{f(A)}(y) = \sup_{x \in X}\{\pi_A(x) / y = f(x)\} \quad \text{si} \quad f^{-1}(y) \neq \varnothing$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad f^{-1}(y) = \varnothing$$

<u>Conséquence pour l'adossement de flux</u>
Dans l'exemple financier que nous illustrons, il sera fait un usage intensif de ce principe sur des produits cartésiens :

$$\pi_{f(A,B)}(u) = \sup_{(a,b) \in A \times B}\{\min(\pi_A(a), \pi_B(b)) / f(a,b) = u\}$$

Cette formulation laisse entrevoir que le calcul de quantités flous dans l'adossement de flux conduit à résoudre des programmes d'optimisation non linéaires. Les techniques utilisés ne seront pas évoquées ici car elles présentent des difficultés mathématiques qu'il serait trop long d'exposer ici (voir [10], [12], [13], et [14] pour les techniques courantes).

Par ailleurs, la distribution de possibilité image $\pi_{f(A)}$ n'est pas nécessairement continue, même lorsque la fonction f et la distribution de possibilité π_A sont infiniment dérivables. Nous avons établi un théorème de continuité pour les distributions usuelles que nous utiliserons (la démonstration est disponible auprès des auteurs ; elle s'appuie sur la différentiabilité floue exposée dans [5]) :

Théorème :
Soit f une fonction réelle indéfiniment dérivable, Q une quantité floue dont la distribution de possibilité est trapézoïdale. Soient $D = \{y / f(x) = y \text{ et } f'(x) = 0\}$ et $D' = \left\{y / \left(\exists! x = x_0 \ f(x) = y \text{ et } \pi_{f(Q)}(y) = \pi_Q(x)\right) \text{et } f'(x_0) = 0\right\}$.

(i) $\pi_{f(Q)}$ est continue sur tout ouvert de l'image de f disjoint de D

(ii) $\pi_{f(Q)}$ n'est continue en aucun point de D'.

3. Eléments de la gestion Actif Passif

3.1. Recherche de la valeur de marché du flux

La gestion actif-passif passe par le calcul de plusieurs « objets » financiers : duration, convexité, sensibilité ... .Ces objets dépendent d'attributs :

$r(T_k)$, la gamme des taux zéro-coupon,

G_k, le montant des flux,

T_k, l'échéance des flux,

PV, la valeur de marché.

Si l'on représente maintenant ces attributs par des nombres flous, comment se calculent ces objets ? Certains auteurs ont directement représenté les objets par des quantités floues ; il en résulte souvent des incohérences sur la représentation implicite des attributs. Buehlmann et Berliner[3] ont évité cet écueil en calculant la valeur de marché d'un flux composé de cash flows dont les montants sont des quantités floues lorsque les taux forward sont eux-mêmes flous. Ils indiquent que ce calcul peut être effectué lorsque tous les paramètres sont flous. En fait dans la plupart des cas, ces calculs restent laborieux, et il n'y a pas toujours de solution explicite. Nous proposons de systématiser le passage à une représentation floue en reprenant les fondements de la théorie des possibilités.

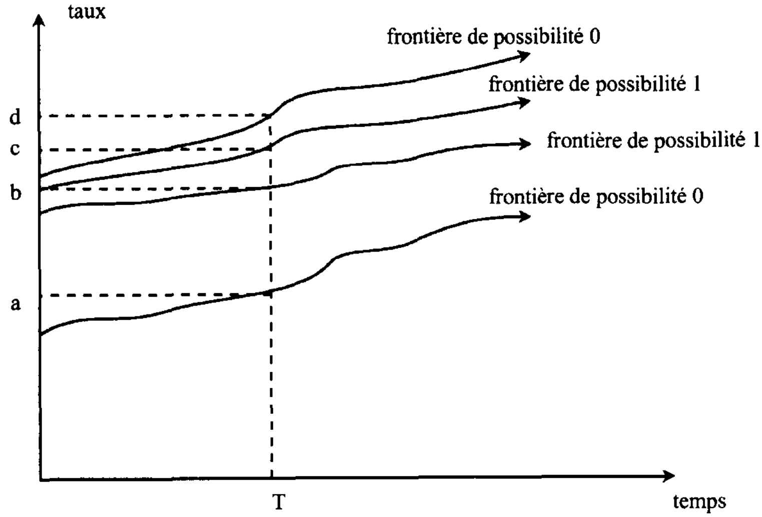
Considérons la valeur nette présente d'une séquence de flux $PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{G_k}{(1+r_k)^{T_k}}$. Si les attributs (taux zéro-coupon, montant et échéance des flux) sont flous, alors la valeur de marché est floue. En appliquant le principe d'extension, la distribution de possibilité de la quantité floue PV est obtenue en résolvant le programme d'optimisation suivant :

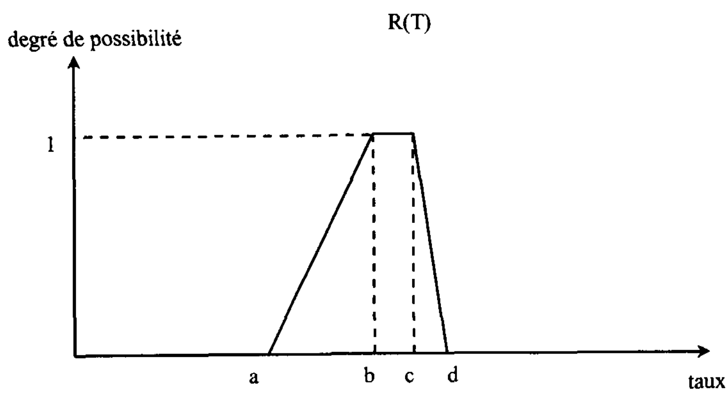
$$\pi_{PV}(u) = \sup_{\substack{w_{G_1}, w_{T_1}, w_{r_1}, \\ \ldots, w_{G_n}, w_{T_n}, w_{r_n}}} \left(\min_i \left(\pi_{G_i}(w_{G_i}); \pi_{T_i}(w_{T_i}); \pi_R(w_{r_i}; w_{T_i}) \right) \middle| \sum_{k=1}^{n} \frac{w_{G_k}}{(1+w_{r_k})^{w_{T_k}}} = u \right)$$

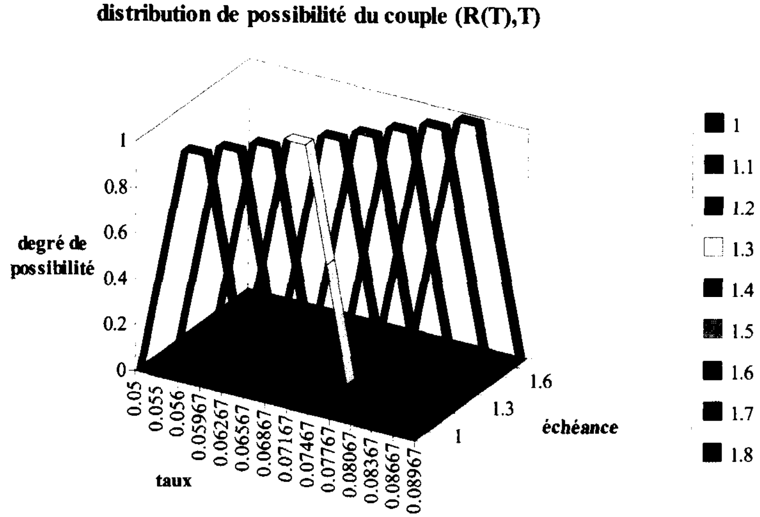
$\pi_R(w_{r_n}; w_{T_n})$ représente la distribution de possibilité conjointe du taux zéro-coupon et de l'échéance. Cette distribution peut être scindée comme le minimum de la distribution conditionnelle du taux sachant l'échéance et la distribution marginale de l'échéance : $\pi_R(w_{r_n}; w_{T_n}) = \min\left(\pi_{T_n}(w_{T_n}); \pi_{r_{w_{T_n}}}(w_{r_n})\right)$

avec $\pi_{r_{w_{T_n}}}(w_{r_n})$ représentant la distribution de possibilité du nombre flou $r_{w_{T_n}}$.

On peut aussi voir R comme une relation floue qui à w_{T_n} fait correspondre un nombre flou, $r_{w_{T_n}}$. En revanche, La variable $r_{w_{T_n}}$ n'est pas liée à la variable w_{T_n}. L'application de la définition du produit cartésien de deux quantités floues non interactives donne la décomposition précédente. Ces nombres flous seront donnés sous la forme de quatre frontières :


taux
frontière de possibilité 0
frontière de possibilité 1
frontière de possibilité 1
frontière de possibilité 0
d
c
b
a
T
temps


R(T)
degré de possibilité
1
a
b
c
d
taux



Comme quel que soit k, les variables $w_{G_k}, w_{T_k}, w_{r_k}$ et $w_{G_{k+1}}, w_{T_{k+1}}, w_{r_{k+1}}$ sont non liées, on peut séparer cette optimisation en n optimisations distinctes.

$$\pi_{PV_k}(u) = \sup_{w1,w2,w3}\left(\min\left(\pi_r(w1;w2);\pi_{T_k}(w2);\pi_{G_k}(w3)\right) \middle| \frac{w3}{(1+w1)^{w2}} = u \right)$$

On obtient ainsi la distribution de possibilité $\pi_{PV_k}(u)$ de la quantité floue PV_k qui représente le k ième flux actualisé en date 0, de sorte que $PV = \sum_{k=1}^{n} PV_k$.

3.2. Etude de trois cas particuliers

Nous allons expliciter ce calcul dans trois cas particuliers : les montants des flux sont flous et tous les autres paramètres sont réels, les taux des zéro-coupon sont flous et tous les autres paramètres sont réels et enfin, les échéances sont floues. Ces calculs illustrent combien le principe d'extension est un outil puissant, et aussi que la représentation des concepts financiers est rarement simple dès lors que l'on adopte une représentation des attributs.

Cas 1: les montants des flux flous

Supposons que les montants des flux soient donnés sous la forme de trapèzes :
Gk = (g1k,g2k,g3k,g4k)
La valeur de marché après calculs est :

$$PV=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{g1k}{(1+r_k)^\wedge T_k},\sum_{k=1}^{n}\frac{g2k}{(1+r_k)^\wedge T_k},\sum_{k=1}^{n}\frac{g3k}{(1+r_k)^\wedge T_k},\sum_{k=1}^{n}\frac{g4k}{(1+r_k)^\wedge T_k}\right)$$

Ce calcul immédiat coïncide avec le résultat de Buehlmann et Berliner[3].

Cas 2 : les taux des zéro-coupons flous

Le montant et l'échéance des flux sont certains, on a donc :

$$\pi_{PV}(u)=\sup_{w_{r_1},\dots,w_{r_n}}\left(\min\left(\pi_r\left(w_{r_1};T_1\right);\dots;\pi_r\left(w_{r_n};T_n\right)\right)\middle|\sum_{k=1}^{n}\frac{G_k}{(1+w_{G_k})^{T_k}}=u\right)$$

Les variables représentées par les quantités floues r1,...,rn sont indépendantes. On calcule donc PVk.

$$\pi_{PV_k}(u)=\sup_{w1}\left(\pi_r(w1;T_k)\middle|\frac{G_k}{(1+w1)^{T_k}}=u\right)$$

On suppose que les taux zéro-coupon, rk, sont représentés par des quantités floues (r1k,r2k,r3k,r4k). Alors les distributions de possibilité des quantités PVk sont données par :

si $z<\frac{G_k}{(1+r_{4k})^{T_k}}$ alors $\pi_{PV_k}(z)=0$

si $\frac{G_k}{(1+r_{4k})^{T_k}}<z<\frac{G_k}{(1+r_{3k})^{T_k}}$ alors $\pi_{PV_k}(z)=-\frac{\left(\frac{G_k}{z}\right)^{\frac{1}{T_k}}-1-r_{4k}}{r_{4k}-r_{3k}}$

si $\frac{G_k}{(1+r_{3k})^{T_k}}<z<\frac{G_k}{(1+r_{2k})^{T_k}}$ alors $\pi_{PV_k}(z)=1$

si $\frac{G_k}{(1+r_{2k})^{T_k}}<z<\frac{G_k}{(1+r_{1k})^{T_k}}$ alors $\pi_{PV_k}(z)=\frac{\left(\frac{G_k}{z}\right)^{\frac{1}{T_k}}-1-r_{1k}}{r_{2k}-r_{1k}}$

si $\frac{G_k}{(1+r_{1k})^{T_k}}<z$ alors $\pi_{PV_k}(z)=0$

Ainsi à partir de taux d'intérêt flous dont la distribution de possibilité est une fonction affine par morceaux, on obtient une valeur de marché floue qui présente comme distribution de possibilité une fonction qui n'est plus affine par morceaux. Plus précisément, les côtés non parallèles de la représentation ne sont plus des segments mais des courbes hyperboliques. Les opérateurs classiques, addition et autres, ne s'expriment plus aussi facilement que précédemment. Pour calculer PV, il convient alors de revenir à la définition dérivée du principe d'extension :

$$\pi_{PV}(u) = \sup_{w_{PV_1},\dots,w_{PV_n}} \left(\min\left(\pi_{PV_1}\left(w_{PV_1}\right);\dots;\pi_{PV_n}\left(w_{PV_n}\right)\right) \middle| \sum_{k=1}^{n} w_{PV_k} = u \right)$$

Cas 3 : les échéances floues et tous les autres paramètres réels.

Les variables représentées par les quantités floues $T_1,\dots,T_n$ sont supposées indépendantes. La gamme des taux est plate. On peut donc séparer en "n" optimisations distinctes. L'expression de $\pi_{PV_k}(u)$ devient :

$$\pi_{PV_k}(u) = \sup_{w2} \left(\pi_{T_k}(w2) \middle| \frac{G_k}{(1+r)^{w2}} = u \right)$$

Les quantités floues Tk sont représentées par des trapèzes (ak,bk,ck,dk)

si $u \le \frac{G_k}{(1+r)^{d_k}}$ alors $\pi_{PV_k}(u) = 0$

si $\frac{G_k}{(1+r)^{d_k}} \le u \le \frac{G_k}{(1+r)^{c_k}}$ alors $\pi_{PV_k}(u) = -\frac{\frac{\ln\left(\frac{G_k}{u}\right)}{\ln(1+r)} - d_k}{d_k - c_k}$

si $\frac{G_k}{(1+r)^{c_k}} \le u \le \frac{G_k}{(1+r)^{b_k}}$ alors $\pi_{PV_k}(u) = 1$

si $\frac{G_k}{(1+r)^{b_k}} \le u \le \frac{G_k}{(1+r)^{a_k}}$ alors $\pi_{PV_k}(u) = \frac{\frac{\ln\left(\frac{G_k}{u}\right)}{\ln(1+r)} - a_k}{b_k - a_k}$

si $\frac{G_k}{(1+r)^{a_k}} \le u$ alors $\pi_{PV_k}(u) = 0$

4. L'adossement de flux

4.1. Problématique

La problématique peut être celle du bénéficiaire d'un projet d'infrastructure lourde qui s'étale sur plusieurs années ; il doit effectuer des paiements partiels à des dates qui correspondent à des stades prédéfinis d'avancement des travaux. Dans ce genre de projet les dates charnières ne sont connues qu'avec imprécision ; quelques projets de la même nature ont certes déjà été menés, mais ils sont trop peu nombreux pour inférer une distribution de probabilité sur les échéances, et de surcroît les spécificités sont telles que l'on maîtrise assez mal les échéances. En bref, nous sommes dans le cadre d'une incertitude non probabilisable, mais le maître d'ouvrage est capable de borner les dates charnières, et d'indiquer si certaines sont plus possibles que d'autres. La question qui est posée dans ce cas est l'actif à acheter aujourd'hui en vue de d'effectuer les paiements futurs.

L'exemple que nous allons traiter est donc un cas particulier d'un problème plus général : l'adossement de flux dont les dates d'occurrences sont incertaines. Les objectifs poursuivis ici ne sont pas ceux que l'on pourrait avoir dans d'autres situations, comme celle d'une banque qui collecte des dépôts à vue pour lesquels on ne dispose pas toujours de statistiques sur le délai qui s'écoule jusqu'à ce qu'ils soient retirés. Plutôt que de traiter un cas général, nous avons préféré focaliser notre attention sur un cas précis et pédagogique.

Dans l'exemple susvisé, les échéances floues, T_k, sont données sous la forme de trapèze (a_k,b_k,c_k,d_k), où $a_k<b_k<c_k<d_k$. Cela signifie pour la k ième échéance qu'une date comprise entre b_k et c_k est complètement possible (degré de possibilité égale à 1), impossible avant a_k et après d_k (degré de possibilité égale à 0), et plus ou moins possible entre a_k et b_k et entre c_k et d_k (degré de possibilité variant linéairement, respectivement entre 0 et 1 et entre 1 et 0). Une telle représentation est conforme à une échelle qui n'a pour ambition que de classer la vraisemblance des occurrences, sans préjuger de mesurer cette vraisemblance. Le montant des paiements, M_k, est réel. La gamme des taux est réelle : à chaque échéance, t, correspond un unique taux zéro-coupon, r(t). On souhaite déterminer les zéro-coupons de montant M_k à acheter pour couvrir au mieux les engagements.

4.2. Formulation des objectifs

Il va de soit que si l'on souhaite assurer coûte que coûte le respect des échéances, il faut acheter des titres zéro-coupon dont la maturité est un tant soit peu possible (c'est-à-dire d'échéance a_k). Mais si l'on est sensible au prix à payer, des instruments plus longs procure une satisfaction supplémentaire qui peut contrebalancer le risque de perte que l'on encoure. Nous nous plaçons dans cette hypothèse où deux objectifs contradictoires sont poursuivis : le coût de la couverture et le respect des échéances. En raisonnant en termes de nécessité et de possibilité, ces deux objectifs ont été caractérisés par, d'une part, "Le prix de la couverture est nécessairement un prix modéré", et d'autre part, "l'échéance du $k^{ième}$ remboursement est nécessairement supérieure à la maturité du $k^{ième}$ zéro-coupon". Ces deux nécessités se notent respectivement : $\mathrm{Nec}(P \subseteq P_m)$ et $\mathrm{Nec}(T_k \geq t_k)$.

"Le prix de la couverture est un prix modéré" s'interprète comme "le prix de la couverture est inclus dans l'ensemble flou représentant les prix modérés". Une définition de la nécessité de l'inclusion de deux nombres flous a été donnée par Dubois et

Prade[1]. C'est cette dernière que nous reprenons. Il s'agit donc de la nécessité pour que, d'une part, les plus petites valeurs que peut prendre P soient supérieures aux plus petites valeurs que peut prendre P_m et que, d'autre part, les plus grandes valeurs que peut prendre P_m soient supérieures aux plus grandes valeurs que peut prendre P. Dans le cas particulier où le prix de la couverture est un nombre réel $P = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{(1+r(t_k))^{t_k}}$, l'expression devient alors :

$$\mathrm{Nec}(P \subseteq P_m) = \pi_{P_m}(P)$$

Le degré de nécessité associé à "l'échéance du remboursement est supérieure à la maturité du zéro-coupon" est :

$$\mathrm{Nec}(T_k \geq t_k) = 1 - \sup_{u \leq v}\{\min(\pi_{T_k}(u); \pi_{t_k}(v))\}$$

or tk est un réel, l'expression devient donc :

si tk<ak alors $\mathrm{Nec}(T_k \geq t_k) = 1$

si ak<tk<bk alors $\mathrm{Nec}(T_k \geq t_k) = 1 - \pi_{T_k}(t_k)$

si bk<tk alors $\mathrm{Nec}(T_k \geq t_k) = 0$

Dès lors que l'on s'autorise un non respect possible des échéances, un autre critère naturel à prendre en compte est la sensibilité de l'actif aux taux d'intérêt, l'objectif étant d'immuniser le passif. La sensibilité du passif étant une grandeur floue, l'immunisation sera réalisée avec un degré de nécessité qui peut être inférieur à l'unité. L'écart que l'on tolère par rapport à 1 est assimilable à une tolérance au risque. On peut considérer qu'il est implicitement contenu dans l'appréciation (en terme de modération) du prix de la couverture. Il y a une relation bi-univoque entre la forme de la fonction 'prix modéré' et la tolérance au risque de taux, de sorte que ce critère est redondant.

4.3. Agrégation des critères

Trois attitudes fondamentales sont envisageables pour l'agrégation de critères en un unique critère (pour plus de développements voir [9] ou [15]):
- le critère agrégé doit être inférieur au minimum des deux critères de base si l'on désire exprimer la satisfaction simultanée des objectifs ;
- le critère agrégé doit être supérieur au maximum des deux critères de base si l'on désire exprimer la redondance des objectifs ;
- le critère agrégé doit avoir une valeur intermédiaire entre les deux bornes implicites précédentes pour traduire une attitude hybride.

Seules la première et la troisième attitudes sont adaptées ici. Parmi la multitude des choix envisageables, nous avons choisi de représenter le critère agrégé comme le minimum des deux critères de base. Il s'écrit alors :

(t1,...,tn) est meilleur que (t'1,...,t'n)

si et seulement si

$$\min(\mathrm{Nec}(T_1 > t_1;\ldots;T_n > t_n); \mathrm{Nec}(P \subseteq P_m)) > \min(\mathrm{Nec}(T_1 > t'_1;\ldots;T_n > t'_n); \mathrm{Nec}(P' \subseteq P_m))$$

Cette attitude est neutre au sens où elle revient à ne pas pondérer d'objectif particulier. Elle est à la satisfaction ce que la minimaxité est à la fonction de coût en statistique théorique : une assurance contre le pire. Cette attitude peut sembler conservatrice car l'objectif affiché est la maximisation de la satisfaction minimale, mais on conclurait à tort si l'on disait que l'on prête aux deux critères le même poids. Les deux objectifs sont certes d'égale importance, mais l'importance relative d'un critère par rapport à l'autre apparaît à travers la représentation des distributions de nécessité.

D'autre part, la fonction $U(t_1;\ldots;t_n) = \min(\mathrm{Nec}(T_1 > t_1;\ldots;T_n > t_n); \mathrm{Nec}(P \subseteq P_m))$ est une fonction continue et non strictement décroissante, et elle a le bon goût de vérifier les axiomes définissant une fonction de préférence : réflexivité, transitivité, préordre, existence et unicité de la valeur intermédiaire et enfin préservation de l'ordre. Ainsi, $U(t_1;\ldots;t_n)$ s'avère être une fonction d'utilité ordinale dans le cadre d'un modèle de calcul flou. En revanche, on montre que cette fonction ne vérifie pas l'axiome de linéarité : $U(t_1,\ldots,t_n)$ n'est donc pas une fonction d'utilité cardinale. Ce résultat était prévisible, car la linéarité de l'utilité de Von Neuman Morgenstern est dérivée de l'axiome d'indépendance des probabilités (la somme des probabilités de deux événements contraires est égale à l'unité). Or cet axiome n'est pas vérifié en calcul des possibilités (c'est la seule différence dans les axiomatiques). Cet état de choses n'est pas gênant, car en calcul flou la donnée d'une distribution de nécessité est destinée non pas de quantifier mais d'ordonner un choix

Remarque : Bien entendu, il existe de nombreuses autres fonctions d'utilité. En s'inspirant de la théorie des probabilités, une autre fonction d'utilité serait l'espérance actualisée de la perte qu'occasionnerait le décalage entre la date de maturité du zéro-coupon et celle du remboursement de l'engagement. La formule en serait :

$$U(t_1;\ldots;t_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{t_i} \mathrm{Nec}(T_i = t) * \left(\frac{M_i}{(1 + r(t_i))^{t_i}} - \frac{M_i}{(1 + r(t))^{t}} \right) * dt$$

En substituant à la nécessité une mesure de possibilité, on obtiendrait une seconde utilité. L'obtention de ces deux espérances possibilistes permettrait d'encadrer la mesure de probabilité portant sur l'occurrence de la date Tk. Mais un tel choix, en traçant un lien implicite entre les deux objectifs poursuivis, est équivalent à se donner une fonction 'prix modéré' particulière, et un objectif multicritère dégénéré en un objectif sur un critère unique.

4.4. Résolution

Nous avons choisi un modèle avec deux flux ; la généralisation est immédiate. La gamme des taux est strictement croissante. Au passif, le flux 1 (respectivement 2) est défini par M1, T1 (respectivement M2, T2). T1 et T2 sont les seules variables floues. A l'actif, on choisit 2 zéro-coupons de montant M1 et M2 et d'échéance t1 et t2.

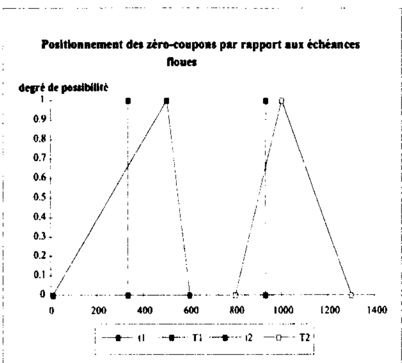
Pour chaque série, deux graphiques sont proposés. Le premier représente la distribution de possibilité de T1 et T2 (nombres flous) et de t1 et t2 (nombres réels). Le deuxième concerne la distribution de possibilité de la quantité floue 'prix modéré' et la distribution du prix réel de l'actif.

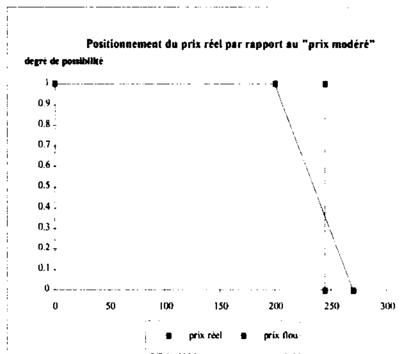
$$\underset{t_1,t_2}{\text{Maximiser}} \quad U(t_1,t_2) = \min\left(\mathrm{Nec}(t_1 \leq T_1); \mathrm{Nec}(t_2 \leq T_2); \mathrm{Nec}(P \subseteq P_m)\right)$$

$$\text{s.c} \quad t_1, t_2 \geq 0$$

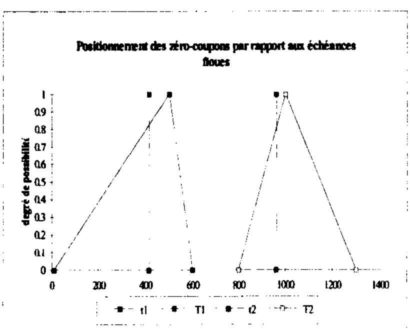
Les trois séries suivantes permettent de saisir l'effet de la pente du 'prix modéré'. Celle-ci représente en particulier la tolérance au risque de taux, qui est d'autant plus faible que la pente est forte, et inversement.

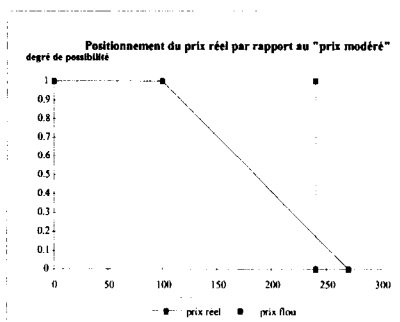
Adossement avec une pente moyenne



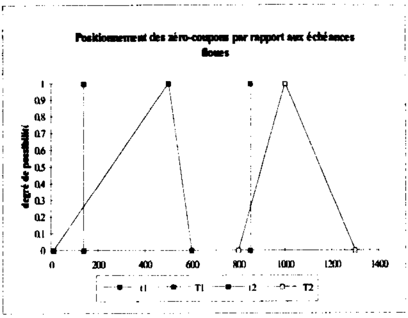


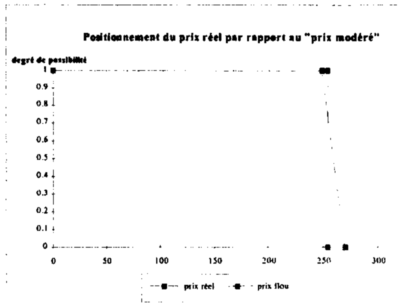
Adossement avec une pente faible





Adossement avec une pente forte





Chacun de ces résultats conduit à une relation floue entre la sensibilité de l'actif, un nombre précis, et celle du passif, un nombre flou, relations que nous n'avons pas reproduit ici.

5. Conclusion

Le propos de cet article est double : cerner le champ d'application de la théorie des possibilités en finance, et exhiber une démarche systématique qui permettent un calcul flou rigoureux et théoriquement fondé. Pour ce qui est de ce dernier point, nous avons vu que la représentation floue de concepts financiers ne pouvait pas être abusivement simplifiée sans produire des hypothèses incohérentes. Le principe d'extension de Zadeh est la pierre angulaire de notre démarche ; il nous conduit à des calculs qui peuvent s'avérer délicats puisqu'il s'agit de la résolution de programmes non linéaires dont la solution n'est pas toujours triviale. Pour ce qui est de circonscrire le domaine d'application du calcul flou en finance, nous défendons la position d'une technique par défaut, c'est-à-dire lorsqu'une représentation probabiliste est hors de propos. Mais même dans ce cas, le recours à une représentation floue est soumis à des contraintes minimales. Nous avons dans ce cadre illustré que des situations pour lesquelles on pouvait définir au moins une fonction d'utilité ordinale, mais pas plus, étaient adaptées.

A notre avis, la représentation floue doit être regardée comme une interface entre la réalité incertaine et complexe et l'univers risqué et plus simplifié des probabilités. C'est avant tout une technique opérationnelle, destinée à traiter numériquement des situations que l'on ne peut décrire que qualitativement : « qualitative is nothing but poor quantitative ».

Bibliographie

[1] H. Dubois et H. Prade : "Théorie des possibilités" ; Ed. Masson ; 1988.
[2] J.J. Buckley : "The fuzzy mathematics of finance" ; Fuzzy Sets and Systems 21 (1987) 257-273 ; North-Holland
[3] N. Buehlmann et B. Berliner : "A generalization of the fuzzy zooming of cash flows" ; AFIR
[4] L. Bellity : "Optimiation floue" ; Banque et Marchés ; N°10 ; Novembre-décembre 1993.
[5] M. Lahlouh : "Géométrie différentielle floue" ; thèse ; Université Claude Bernard - Lyon ; 1991.
[6] A. Kaufmann : "Introduction to fuzzy arithmetic, theory and applications" ; 1989.
[7] B. Bouchon-Meunier : "Logique floue" ; Que sais-je n° 2702 ; PUF.
[8] G. Shafer : "A mathematical theory of evidence" ; Princeton University Press ; Princeton N.J ; 1976.
[9] R. Slowinski et J. Teghem : " Sthocastic versus fuzzy approaches to multiobjective mathemetical programming under uncertainty " ; Theory and decision library ; Kluwer Academic Publishers ; 1990.
[10] R. Slowinski et J. Teghem : "Optimization models unsing fuzzy sets and possibility theory" ; Theory and decision library ; Kluwer Academic Publishers ; 1990.
[11] R. A. Jarrow : "Finance theory" ; Prentice-Hall International Editions ; 1988.
[12] M. Sakawa et H. Yano ; "An interactive satisficing method for multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters"; optimization models unsing fuzzy sets and possibility theory; Theory and decision library ; Kluwer Academic Publishers ; 1990 ; pp. 258-271.
[13] H. Tanaka, T. Okuda, K. Asai ; "On fuzzy-mathematical Programming" ; Journal of Cybernetics ; 1974 ; 3 ; 4 ; pp. 37-46.
[14] Y-J Lai, C-L Hwang ; "Interactive fuzzy linear programming" ; Fuzzy sets and systems 45 ; North-Holland ; 1992 ; pp. 169-183.
[15] D. Dubois ; "The analysis of fuzzy information" ; CRC press ; 1985 ; pp. 241-263.