EVALUATION D'OPTIONS COULOIRS

SUR TAUX D'INTERÊT

François QUITTARD - PINON

Université de Lyon I
Institut de Science Financiere et d'Assurances

43, Boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne- FRANCE

Téléphone : 72-43-11
Télécopieur : 72-43-11-76
e-mail : quittard@cismsun.univ-lyon1.fr

Résumé :

Dans cet article nous évaluons quelques options exotiques sur taux d'intérêt, en partculier des options digitales, double-digitales et des titres couloirs.

Mots-clés :
finance en temps continu, arbitrage, martingale, probabilités risque-neutre et forward-neutre, option sur taux d'intérêt, digitales, couloirs, corridors, produits dérivés.

Evaluation d'options couloirs sur taux d'intérêt.

François Quittard - Pinon

Université de Lyon, Institut de Science Financière et d'Assurances, 43 Boulevard du 11 Novembre 1918, 69 622 Villeurbanne, cedex, France

Résumé :

Dans cet article nous évaluons quelques options exotiques sur taux d'intérêt, en particulier des options digitales, double-digitales et des obligations couloirs.

Mots-clés :

finance en temps continu, arbitrage, martingale, probabilités risque-neutre et forward-neutre, option sur taux d'intérêt, digitales, double digitales, obligation à couloir, produits dérivés.

INTRODUCTION

Le recours à l'utilisation des produits dérivés financiers est devenu de plus en plus fréquent et ce, en dépit d'une certaine désaffection en 1995. Bien que les principaux contrats des marchés organisés ou de gré à gré soient concentrés sur des instruments futures ou forward, les pratiques financières des trésoriers et gérants de portefeuilles se sont enrichies de techniques de couverture ou d'investissement s'appuyant sur les options. Fort de ce succès, le processus d'innovation financière s'est accéléré à la fin des années 1980 et a livré une large gamme d'options sur taux répondant à des besoins spécifiques et très variés. Mais des faillites retentissantes, une certaine opacité des dérivés et une relative étroitesse du marché ont nui à la réputation de ces instruments. L'affaire Barings en 1995 et la perte en 1994 de 157 millions de dollars par la firme Procter et Gamble dans une opération de swap de taux d'intérêt ne peut qu'inciter à la réflexion sur leurs usages.

L'appréhension des risques de ce type de produits financiers dépend implicitement du modèle choisi pour décrire l'évolution du sous-jacent. Dans des travaux précédents nous avions, à l'aide du modèle linéaire gaussien à un aléa, cas particulier du modèle de Heath, Jarrow et Morton, obtenus des formules explicites pour valoriser des caps, floors, collars et options asiatiques sur taux d'intérêt. Nous avions utilisés systématiquement l'univers forward - neutre et les formules de El Karoui et Geman pour évaluer les produits à paiements différés. Nous utilisons à nouveau dans cet article la même méthode pour évaluer quelques autres options exotiques[1] sur taux d'intérêt. Les options que nous envisageons ici, sont souvent à la base des produits structurés. Ces produits tiennent compte des cours passés et permettent de garantir une valeur planché augmentée de revenus indexés sur l'évolution d'un ou de plusieurs sous-jacents. Dans cet article nous nous intéressons plus particulièrement aux titres de type couloir ou "Range Notes" en anglais. Turnbull (1995) en a proposé une valorisation cependant l'approche que nous suivons ici est différente et plus générale. L'article est composé de la façon suivante : le premier paragraphe rappelle le modèle de taux choisi et le second étudie la valorisation des options digitales, double digitales et les titres à taux flottant borné dont les obligations corridors ou les obligations couloir sont de ce type.

I MODELISATION CHOISIE POUR LA STRUCTURE DES TAUX

Dans ce paragraphe nous précisons le modèle de taux que nous considérons et nous rappelons quelques définitions.

Définitions

Une obligation coupon-zéro est un titre financier versant sûrement à une échéance fixée au début de sa vie un seul flux monétaire, normalisé, par convention à une unité monétaire. Avec le passage du temps, l'échéance se rapproche et on appelle maturité la durée de vie résiduelle. Nous notons P(t,s) (avec $s \geq t$) la valeur à la date t d'un coupon-zéro d'échéance s. On définit le rendement à l'échéance, Y(t,s), par :
$Y(t,s) = -\frac{1}{s-t}\ln(P(t,s))$. Pour t fixé et T variable Y(t,T) décrit une courbe appelée courbe des taux. On parle également de structure par terme des taux d'intérêt (STTI). On définit également les taux, R(t,T), au comptant pour l'échéance T, encore appelés taux actuariels, à l'aide de la relation : $P(t,T) = \frac{1}{(1+R(t,T))^{T-t}}$

On définit aussi un taux proportionnel ρ pour la période [t,T] par :

$$\rho(t,T) = \frac{1}{T-t}[\exp\{(T-t)Y(t,T)\} - 1]$$

---

[1]Nous qualifions d'option exotique tout actif conditionnel n'ayant pas les caractères d'une option européenne ou d 'une option américaine standard.

Le taux à terme implicite, à l'instant t, pour la période $[T_1,T_2]$ noté $\phi(t;T_1,T_2)$ est défini par:

$$\phi(t;T_1,T_2)=\frac{(T_2-t)Y(t,T_2)-(T_1-t)Y(t,T_1)}{T_2-T_1}=\frac{1}{T_2-T_1}\ln\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}$$

notons que :

$$\phi(0;t,T)=\frac{TY(0,T)-tY(0,t)}{T-t}$$

et :

$$\phi(0;t,T)=\frac{1}{T-t}\ln\frac{P(0,t)}{P(0,T)}$$

Le taux à terme instantané est défini, lorsque la limite existe, par :

$$f(t,T)=\lim_{T_2\downarrow T}\phi(t,T,T_2)$$

On obtient facilement les résultats importants suivants :

$$f(t,T)=-\frac{\partial\ln P(t,s)}{\partial s}\Big|_{s=T}$$

$$Y(t,T)=\ln(1+R(t,T))\quad \text{ou :}\quad R(t,T)=e^{Y(t,T)}-1$$

$$Y(t,T)=\frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,u)du$$

$$f(t,T)=Y(t,T)+(T-t)\frac{\partial Y(t,T)}{\partial T}$$

$$P(t,T)=\exp\{-\int_t^T f(t,u)du\}$$

Ainsi la connaissance du prix des zéro-coupon, des taux de rendement, ainsi que des taux à terme peuvent se déduire les uns des autres et permettent l'étude de la STTI.
On définit le taux instantané, ou taux sans risque, noté r(t), par :

$$r(t)\overset{\Delta}{=}\lim_{T\to t}[-\frac{1}{T-t}\ln P(t,T)]=\lim_{T\to t}Y(t,T)$$

On notera que cette définition implique que ce taux n'est pas observable car r(t) est une limite de taux. Nous notons $\delta(t)$ la fonction :

$$\delta(t)\overset{\Delta}{=}\exp\{-\int_0^t r(u)du\}$$

que nous appelons parfois et abusivement fonction d'actualisation et de façon plus générale nous notons :

$$\delta(s,t) \stackrel{\Delta}{=} \exp\{-\int_s^t r(u)du\}$$

Modèle de taux

De façon classique nous considérons que l'incertitude est représentée par l'espace filtré: $(\Omega, \{F_t\}, \Pi)$ où Ω est l'espace fondamental usuel, $\{F_t\}$ $(t \geq 0)$ est la filtration représentant, en pratique, l'information disponible en t, Π désigne la mesure de probabilité historique. Parmi les approches possibles de l'étude de l'équilibre des taux, nous retenons le modèle à un aléa avec une structure de volatilité déterministe, i.e, nous supposons que le prix du coupon-zéro vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dP}{P} = \mu(t,T)dt - \sigma(t,T)dz$$

$\mu(t,T)$ est le rendement instantané espéré du coupon-zéro sous Π, $\sigma(t,T)$ est la structure de volatilité sous Π et z est un $\Pi - F_t$ mouvement brownien. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on sait qu'il existe un processus $\lambda(r,t)$, appelé prime de risque, qui est tel que :
$\mu(t,T) = r(t) + \lambda(r,t)\sigma(t,T)$
En utilisant le théorème de Girsanov, on peut changer la dérive μ de l'EDS , de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$\frac{dP}{P} = r(t)dt - \sigma(t,T)d\hat{z} \qquad (1)$$

où $\hat{z}$ est un brownien sous Q défini par : $\hat{z}(t) = z(t) - \int_0^t \lambda(r,u)du$.

Ce théorème permet de changer d'univers : on passe de l'univers historique $(\Omega, \{F_t\}, \Pi)$ à l'univers d'évaluation $(\Omega, \{F_t\}, Q)$ où Q est la nouvelle mesure de probabilité, définie techniquement dans le théorème de Girsanov. Plus précisement, la mesure Q est définie par : $\frac{dQ}{d\Pi} = \exp\{\int_0^T \lambda(r,t)dz - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(r,t)dt\}$. Elle contient de façon implicite les primes de risque, ce qui fait qu'en espérance le rendement instantané de tout coupon zéro est égal au taux de l'actif sans risque ($E_Q(\frac{dP}{P}) = rdt$). Ceci justifie le nom de probabilité risque-neutre. Un résultat fondamental de théorie financière assure que dans l'univers risque-neutre, et en absence d'opportunité d'arbitrage, (AOA), les processus de gain d'un actif financier (cours plus revenu) actualisés au taux de l'actif sans risque, sont des Q-martingales . C'est l'un des résultats que nous allons systématiquement utiliser dans cet exposé. On a donc, en particulier la très importante relation :

$P(t,T) = E_Q[\exp-\int_t^T r(u)du / F_t] = E_Q[\delta(t,T)/F_t]$. C'est P(t,T) qui constitue en fait la véritable fonction d'actualisation. Nous supposons dans cet article que la structure de volatilité, $\sigma(t,T)$, est déterministe, ce qui entraîne que nous nous situons dans un contexte gaussien de taux d'intérêt. Cette hypothèse gênante en théorie s'avère , toutefois, assez robuste en pratique. P(0,T) étant connu, on obtient après intégration :

$$P(t,T) = P(0,T)\exp\left\{\int_0^t r(u)du - \int_0^t \sigma(u,T)d\hat{z}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,T)du\right\} \tag{1'}$$

Compte tenu du fait que P(t,t) = 1 et en écrivant P(t,t)=P(0,t)exp{...}, il vient :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left\{\int_0^t -(\sigma(u,T) - \sigma(u,t))d\hat{z}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t))du\right\} \tag{2}$$

En faisant intervenir un instant v non nécessairement calé sur l'origine, on a également:

$$P(t,T) = \frac{P(v,T)}{P(v,t)}\exp\{-\int_v^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t)d\hat{z}(u) - \frac{1}{2}\int_v^t (\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t))du\}$$

Il est donc clair qu'avec ce modèle deux éléments seulement sont nécessaires et suffisants pour étudier la structure par échéance des taux d'intérêt : la connaissance de la courbe des taux à l'instant initial (ou à l'instant courant d'évaluation) et la structure de volatilité. Le rendement à l'échéance s'écrit, après avoir posé $\tau = T - t$:

$$Y(t,T) = \phi(0;t,T) + \frac{1}{\tau}\int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t))d\hat{z}(u) + \frac{1}{2\tau}\int_0^t (\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t))du$$

L'univers forward-neutre

La probabilité risque neutre est liée à un changement de numéraire : c'est la probabilité qui rend martingale le cours (avec son éventuel revenu cumulé) exprimé en unité de compte d'un actif qui capitalise 1FRF au taux r. La probabilité forward-neutre est liée à un autre changement de numéraire. Précisément les actifs sont exprimés non plus en francs mais en coupon-zéro d'échéance donnée. Il y a donc potentiellement autant de probabilité forward-neutres que d'échéances fixées. Considérons le rapport :

$$F(t;w,T) := \frac{P(t,T)}{P(t,w)} \qquad 0 \leq t \leq w \leq T$$

Remarquons d'abord que s'il existait un marché à terme ayant pour support un zéro-coupon d'échéance T, F(t;w,T) serait très exactement le prix à terme d'équilibre associé à un contrat conduisant à la livraison en w d'un zéro-coupon d'échéance T. Remarquons ensuite que ce prix à terme est lié au taux à terme par la relation :

$$\phi(t;w,T) = -\frac{1}{T-w} \ln F(t;w,T)$$

Compte tenu de l'équation (2) on obtient après calculs :

$$F(t;w,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,w)} \exp\{-\int_0^t [\sigma(s,T) - \sigma(s,w)][d\hat{z}(s) + \sigma(s,w)ds] - \frac{1}{2}\int_0^t [\sigma(s,T) - \sigma(s,w)]^2 ds\}$$

Cette forme appelle une utilisation directe du théorème de Girsanov qui conduit à définir un nouveau brownien $\hat{z}_w$ qui vérifie : $d\hat{z}_w = d\hat{z} + \sigma(s,w)ds$. La mesure de probabilité Q_w associée à ce brownien s'exprime au travers de sa densité par rapport à Q:

$$\frac{dQ_w}{dQ} = \exp\{\int_0^t -\sigma(s,w)d\hat{z}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s,w)ds\}$$

compte tenu de (1)' on peut écrire :

$\frac{dQ_w}{dQ} = \frac{P(t,w)}{P(0,w)}\delta(0,t)$; posons $\varsigma_t^w = \frac{P(t,w)}{P(0,w)}\delta(0,t)$; ς_t^w est une Q-martingale positive d'espérance unité. Le prix à terme s'écrit :

$$F(t;w,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,w)} \exp\{-\int_0^t [\sigma(s,T) - \sigma(s,w)]d\hat{z}_w(s) - \frac{1}{2}\int_0^t [\sigma(s,T) - \sigma(s,w)]^2 ds\}$$

On en déduit que F(t;w,T) est une Q_w martingale. La dynamique de F peut êtrre obtenue en utlisant le lemme d'Itô, il vient : $\frac{dF}{F} = -\ [\sigma(s,T) - \sigma(s,w)]d\hat{z}_w(s)$. La probabilité w-forward-neutre Q_w sur F_t est définie par sa densité : $\frac{dQ_w}{dQ} = \varsigma_t^w$. Sur F_w cette densité s'écrit : $\frac{dQ_w}{dQ} = \frac{\delta(0,w)}{P(0,w)}$.

Etant donné un processus de prix X(t), son prix à terme $\frac{X(t)}{P(t,w)}$ est F_t mesurable et compte tenu des propriétés de ς_t^w le théorème de changement de probabilité dans les espérances conditionnelles s'écrit[2] :

$$E_{Q_w}\left[\frac{X(t)}{P(t,w)}/F_s\right]=\frac{E_Q\left[\frac{X(t)}{P(t,w)}\varsigma_t^w/F_s\right]}{E_Q\left[\varsigma_t^w/F_s\right]} \qquad s\leq t$$

or $\frac{E_Q\left[\frac{X(t)}{P(t,w)}\varsigma_t^w/F_s\right]}{E_Q\left[\varsigma_t^w/F_s\right]}=\frac{E\left[X(t)\delta(t)/F_s\right]}{P(s,w)\delta(s)}=\frac{X(s)}{P(s,w)}$ donc : $E_{Q_w}\left[\frac{X(t)}{P(t,w)}/F_s\right]=\frac{X(s)}{P(s,w)}$

On obtient alors le résultat très important : à l'équilibre les prix à terme sont des Q_w martingales. Résultat que l'on peut décliner sous les formes suivantes :

$$X(s)=P(s,w)E_{Q_w}[\frac{X(t)}{P(t,w)}/F_s]$$
$$X(s)=E_Q[\delta(s,w)/F_s]E_{Q_w}[\frac{X(t)}{P(t,w)}/F_s]$$

Nous utilisons fréquemment la forme :

$$X(s)=E_Q[\delta(s,w)/F_s]E_{Q_w}[X(w)/F_s]=P(s,w)E_{Q_w}[X(w)/F_s]$$

Dans l'univers t-forward-neutre la valeur d'un coupon- zéro se réécrit :

$$P(t,T)=\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left\{\int_0^t-(\sigma(u,T)-\sigma(u,t))d\hat{z}_t(u)-\frac{1}{2}\int_0^t[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)]^2du\right\}$$

d'où :

$$Y(t,T)=\phi(0;t,T)+\frac{1}{T-t}\int_0^t[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)]d\hat{z}_t(u)+\frac{1}{2(T-t)}\int_0^t[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)]^2du \quad (4$$

Compte tenu du choix d'une structure de volatilité déterministe, on obtient :

[2] Cf. Michael Dothan. Prices in financial markets. Oxford University Press (1990) p.288. Consulter également R.A Dana et M.Jeanblanc- Picqué (1994) p 170 et 171.pour la présentation de l'univers forward-neutre.

$$E_{Q_t}[Y(t,T)] = \phi(0;t,T) + \frac{1}{2(T-t)}\int_0^t [\sigma(u,T)-\sigma(u,t)]^2 du \tag{5}$$

$$\mathrm{Var}_{Q_t}[Y(t,T)] = \frac{1}{(T-t)^2}\int_0^t [\sigma(u,T)-\sigma(u,t)]^2 du = \mathrm{Var}_Q[Y(t,T)] = \mathrm{Var}_\Pi[Y(t,T)]. \tag{6}$$

Les variances sont identiques dans les univers, historique, risque-neutre et forward-neutre. Dans le cas de l'évaluation de produits sur taux flottants il est fréquent de prendre en considération le décalage entre la date de paiement des coupons et la date de révision du taux. Appelons h ce décalage. On a, par exemple, en t le paiement de la somme : Y(t-h, t-h+θ) où θ désigne le terme (la maturité) du taux de référence. Il est donc naturel d'introduire le Brownien $\hat{z}_{t-h}$ défini par $d\hat{z}_{t-h} = d\hat{z} + \sigma(u,t-h)du$.

Un calcul évident conduit à :

$$\begin{aligned} Y(t-h,t-h+\theta) = {} & \phi(0;t-h,t-h+\theta) + \frac{1}{\theta}\int_0^{t-h}[\sigma(u,t-h+\theta)-\sigma(u,t-h)]d\hat{z}_t(u) \\ & -\frac{1}{\theta}\int_0^{t-h}[\sigma(u,t-h+\theta)-\sigma(u,t-h)]\,[\sigma(u,t)-\sigma(u,t-h)]du \\ & +\frac{1}{2\theta}\int_0^{t-h}[\sigma(u,t-h+\theta)-\sigma(u,t-h)]^2 du \end{aligned} \tag{4'}$$

L'intérêt de cette expression est d'exprimer le rendement à l'échéance Y(t-h,t-h+θ) à l'aide du brownien $\hat{z}_t$. Ceci permet d'évaluer facilement et rapidement certains produits financiers à paiement différé . Avec une structure déterministe, il vient :

$$\begin{aligned} E_{Q_t}[Y(t-h,t-h+\theta)] = {} & \phi(0;t-h,t-h+\theta) + \frac{\theta}{2}\mathrm{Var}[Y(t-h,t-h+\theta] \\ & - h\mathrm{Cov}[Y(t-h,t-h+\theta),Y(t-h,t)] \end{aligned} \tag{5'}$$

$$\mathrm{var}_{Q_t}[Y(t-h,t-h+\theta)] = \mathrm{var}_Q[Y(t-h,t-h+\theta)] = \mathrm{var}_\Pi[Y(t-h,t-h+\theta)] \tag{6'}$$

Ce résultat est à la base de l'évaluation de très nombreux produits dérivés de taux d'intérêt, en particulier de la valorisation de ceux à taux flottants (El Karoui et Geman (1991,1993)). C'est l'un des résultats majeurs sur lequel nous nous appuyons dans cet article. Les intégrales suivantes interviennent très fréquemment comme calculs intermédiaires dans l'évaluation des produits financiers que nous considérons ici

$$I^2(t,T,T) = \int_t^T [\sigma(u,T)-\sigma(u,T)]^2 du$$

$$J(t,T,T') = \int_t^T [\sigma(u,T+\theta) - \sigma(u,T)][\sigma(u,T') - \sigma(u,T)]du$$

$$K(t,T,T',T^*) = \int_t^T [\sigma(u,T^*) - \sigma(u,T')][\sigma(u,T) - \sigma(u,T')]du$$

. Dans le cas d'une structure de volatilité linéaire , on a les résultats suivants :

$$I^2(t,T,T') = \sigma^2(T'-T)^2(T-t)$$

$$J(t,T,T') = \sigma^2\theta[T'-T][T-t]$$

$$K(t,T,T',T^*) = \sigma^2[T^*-T'][T-T'][T-t]$$

. Dans le cas d'une structure de volatilité exponentielle, on a les résultats suivants :

$$I^2(t,T,T') = \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{1-\exp\{-2a(T-t)\}}{a}\right]\left[\frac{1-\exp\{-a(T'-T)\}}{a}\right]^2$$

$$J(t,T,T') = \sigma^2\left[\frac{1-\exp\{-2a(T-t)\}}{2a}\right]\left[\frac{1-\exp\{-a(T'-T)\}}{a}\right]\left[\frac{1-\exp\{-a\theta\}}{a}\right]$$

$$K(t,T,T',T^*) = \left(\frac{\sigma}{a}\right)^2[\exp\{-aT'\} - \exp\{-aT^*\}][\exp\{-aT'\} - \exp\{-aT\}]\left[\frac{\exp\{2aT\} - \exp\{2at\}}{2a}\right]$$

On peut définir le taux forward également comme rendement à l'échéance d'un coupon-zéro forward noté provisoirement $Y^f(t, T^*,T)$ avec $t \leq T \leq T^*$. On a ainsi :

$$\exp\{-(T^*-T)Y^f(t,T^*;T)\} = P^f(t,T^*;T)$$

ou : $\exp\{-(T^*-T)Y^f(t,T^*;T)\} = \dfrac{P(t,T^*)}{P(t,T)}$

soit : $Y^f(t,T^*;T) = \dfrac{(T^*-t)Y(t,T^*)-(T-t)Y(t,T)}{T^*-T} = \phi(t;T,T^*)$

Avec le modèle de taux retenu, on a :

$$\begin{aligned}\phi(t;T_1,T_2) &= \phi(0;T_1,T_2) \\ &+ \frac{1}{2(T_2-T_1)}\int_0^t [\sigma(u,T_2)+\sigma(u,T_1)-2\sigma(u,t)][\sigma(u,T_2)-\sigma(u,T_1)]du \\ &+ \frac{1}{T_2-T_1}\int_0^t [\sigma(u,T_2)-\sigma(u,T_1)]d\hat{z}_t(u)\end{aligned}$$

Dans les applications il est assez fréquent d'utiliser l'univers Q_{T_1} forward-neutre, on a :

$$\begin{aligned}\phi(t;T_1,T_2) = \phi(0;T_1,T_2) &+ \frac{1}{2(T_2-T_1)}\int_0^t [\sigma(u,T_2)-\sigma(u,T_1)^2 du \\ &+ \frac{1}{T_2-T_1}\int_0^t [\sigma(u,T_2)-\sigma(u,T_1)]d\hat{z}_{T_1}(u)\end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$E_{QT1}\phi(t;T_1,T_2) = \phi(0;T_1,T_2) + \frac{1}{2(T_2-T_1)}\int_0^t [\sigma(u,T_2)-\sigma(u,T_1)^2 du$$

$$\operatorname{var}\phi(t;T_1,T_2) = \frac{1}{(T_2-T_1)^2}\int_0^t [\sigma(u,T_2)-\sigma(u,T_1)]^2 du$$

$$E_{QT1}\phi(t;T_1,T_2) = \phi(0;T_1,T_2) + \frac{(T_2-T_1)}{2}\operatorname{var}\phi(t;T_1,T_2)$$

II DIGITALES, DOUBLE DIGITALES, ET OBLIGATIONS A COULOIR

Nous étudions dans ce paragraphe la valorisation des options digitales, double digitales et les titres à taux flottant borné dont les obligations corridors ou les obligations couloir sont de ce type

Les options digitales

Ces options ont pour support un taux variable proportionnel de maturité θ. Elles sont de type européen et leur solde à l'échéance est égal à un si le taux de référence est supérieur à une borne fixée *a priori*, et à zéro, sinon. Nous analysons successivement le cas où le paiement se fait à l'échéance T de l'option et le cas où le paiement est différé à la date T_1. Nous notons t l'instant courant que nous considérons comme date d'évaluation ($t \leq T \leq T_1$) et CD(t,T, θ, k) la valeur de cette option en t. Le C signale que l'on appelle parfois call digital une telle option. Rappelons que l'on a par définition du taux proportionnel ρ :

$$1+\theta\rho(T,T+\theta)=\exp\{\theta Y(T,T+\theta)\}$$

ou :

$$\rho(T,T+\theta)=\frac{1}{\theta}[\exp\{\theta Y(T,T+\theta)\}-1]$$

donc :

$$\rho(T,T+\theta)>k \quad \Leftrightarrow \quad \theta Y(T,T+\theta)>\ln(1+k\theta)$$

A l'échéance T de l'option on a donc[3] :

$$CD(T,T,\theta,k)=1_{\rho(T,T+\theta)>k}.$$

Puisque dans l'univers T-forward-neutre les prix T-forward sont des Q_T martingales on a :

$$CD(t,T,\theta,k)=P(t,T)E_{Q_T}\{1_{\rho(T,T+\theta)>k}/F_t\}$$

or :

$$E_{Q_T}\{1_{\rho(T,T+\theta)>k}/F_t\}=Q_T[\rho(T,T+\theta)>k]$$

ou[4] :

$$Q_T[\theta Y(T,T+\theta)>\ln(1+\theta k)]=N\left[\frac{E_{Q_T}\{\theta Y(T,T+\theta)\}-\ln(1+\theta k)}{\sqrt{\operatorname{var}\{\theta Y(T,T+\theta)\}}}\right]$$

$$E_{Q_T}\{\theta Y(T,T+\theta)\}=\theta\phi(t;T,T+\theta)+\frac{1}{2}\int_t^T[\sigma(u,T+\theta)-\sigma(u,T)]^2du$$

[3] 1_A désigne la fonction indicatrice de l'événement A.

[4] N(x) est la valeur en x de la fonction de répartition de la loi normale standard N(0,1).

$$\text{var}\{\theta Y(T,T+\theta)\} = \int_t^T [\sigma(u,T+\theta) - \sigma(u,T)]^2 du$$

Nous avons déjà calculé ces valeurs dans le cas linéaire et exponentiel. Remarquons que l'on peut exprimer $\theta\phi(t;T,T+\theta)$ sous la forme : $\theta\phi(t;T,T+\theta) = \ln\frac{P(t,T)}{P(t,T+\theta)}$, donc :

$$CD(t,T,\theta,k) = P(t,T)N\left[\frac{\ln\left[\frac{P(t,T)}{P(t,T+\theta)(1+\theta k)}\right] + \frac{1}{2}I^2(t,T,T+\theta)}{I(t,T,T+\theta)}\right] \quad (8)$$

Dans le cas d'un paiement différé en T_1 on a :

$$C\hat{D}(t,T,T_1,\theta,k) = E_Q[1_{\rho(T,T+\theta)>k}\,\delta(t,T_1)/F_t]$$

$$C\hat{D}(t,T,T_1,\theta,k) = P(t,T_1)E_{Q_{T_1}}[1_{\rho(T,T+\theta)>k}/F_t]$$

d'où :

$$C\hat{D}(t,T,T_1,\theta,k) = P(t,T_1)N\left[\frac{\ln\frac{P(t,T)}{P(t,T+\theta)(1+\theta k)} - J(t,T,T_1) + \frac{1}{2}I^2(t,T,T+\theta)}{I(t,T,T+\theta)}\right] \quad (9)$$

Notons que si $T = T_1$ on retrouve la formule de valorisation d'une digitale non retardée. En effet, en ce cas $J(t,T,T_1) = 0$. Remarquons également que le calcul peut être conduit uniquement en terme du cours de zéro-coupon. En effet :

$\rho(T,T+\theta) > k \quad \Leftrightarrow \quad P(T,T+\theta) < K \qquad$ [avec $K = \frac{1}{1+\theta k}$]

Le calcul du call non retardé s'écrit donc :

$CD(t,T,\theta,k) = Q_T\ [P(T,T+\theta) < K]$

Le calcul peut se poursuivre en utilisant l'expression du prix du coupon zéro dans l'univers T-forward neutre (Cf. p 7) et bien entendu on retrouve la formule (8).

Les options double digitales

A partir des options digitales on peut considérer des options européennes dont le solde à l'échéance T est égal à un si le taux proportionnel de référence est compris entre deux bornes m et M fixées *a priori* (m < M). Le profil à l'échéance est représenté sur la figure 1. Il est clair que l'on peut exprimer ce solde sous la forme : $1_{p<M} - 1_{p<m}$ ou $1_{p>m} - 1_{p>M}$, c'est-à-dire sous la forme de la différence d'options digitales. Nous considérons que le paiement du solde est effectué en T_1 ($T_1 \geq T$) et nous appelons double-digitales ces options dont nous notons dd la valeur. On a donc :

$$dd(t,T,T_1,\theta,m,M) = C\hat{D}(t,T,T_1,\theta,m) - C\hat{D}(t,T,T_1,\theta,M) \qquad (10)$$

Les options à paiement contingent

Une autre extension immédiate des options digitales sont les options à paiement contingent. Leur solde à l'échéance T est égal à $P(T,T_1)$ si le taux de référence est strictement supérieur à une borne k. Nous notons $CP(t,T,T_1, q, k)$ leur prix en t.

$$CP(T,T,T_1,\theta,k) = P(T,T_1)1_{p(T,T+\theta)>k}$$

ou encore, compte tenu de la remarque précédente :

$$CP(T,T,T_1,\theta,k) = P(T,T_1)1_{P(T,T+\theta)<K}$$

Leur valeur en t est donc :

$$\begin{aligned} CP(t,T,T_1,\theta,k) &= E_Q[P(T,T_1)1_{P(T,T+\theta)<K}\,\delta(t,T)/F_t] \\ &= P(t,T)E_{Q_T}[P(T,T_1)1_{P(T,T+\theta)<K}/F_t] \end{aligned}$$

ce qui s'écrit après calculs :

$$CP(t,T,T_1,\theta,k) = P(t,T_1)N\left[\frac{\ln\left[\dfrac{KP(t,T)}{P(t,T+\theta)}\right] + \dfrac{1}{2}I^2(t,T,T+\theta)}{I(t,T,T+\theta)} - I(t,T,T_1)\right] \qquad (11)$$

Si $T_1 = T$ on a une option digitale simple et on retrouve la formule (8) (en effet $I(t,T,T)=0$). En outre, pour notre modèle, on a : $\dfrac{J(t,T,T_1)}{I(t,T,T+\theta)} = I(t,T,T_1)$ il en résulte que $CP(t,T_1,\theta,k) = C\hat{D}(t,T_1,\theta,k)$. Ce résultat n'est pas étonnant car le paiement retardé en T_1 du call digital correspond très exactement à payer le call à paiement contingent en T. On peut également considérer des options doubles. Notons dCP leur valeur. Elles ont un solde à l'échéance défini par :

$$dCP(T,T,T_1,\theta,m,M) = P(T,T_1)1_{m\leq p(T,T+\theta)\leq M}$$

donc :

$$dCP(t,T,T_1,\theta,m,M) = CP(T,T_1,\theta,m) - CP(T,T_1,\theta,M) = dd(t,T,T_1,\theta,m,M) \qquad (12)$$

Dans son article Turnbull (1995) n'utilise pas l'univers forward-neutre et prend appui sur les options à paiement contingents pour évaluer les titres couloirs. Ici notre approche est très différente. Nous la considérons comme plus simple et plus rapide, en outre elle permet de paramètrer la structure de volatilité et de donner des formules utilisables à la fois pour le cas linéaire et le cas exponentiel.

Les titres couloirs

Un couloir ou corridor est un titre qui verse un coupon dont la valeur dépend à la fois d'un taux variable de référence et du nombre de jours que ce taux est resté à l'intérieur d'une bande ou couloir fixé à l'avance. Pour préciser davantage nous considérons un titre d'échéance T_N dont le versement le plus récent s'est effectué en T_0 et dont les versement suivants se feront en T_{j+1} (j=0,...,N-1). Ces versements sont calculés sur la base d'un taux proportionnel de référence relevé en T_j et du nombre de jours, $H(T_j, T_{j+1})$, durant lesquels le taux est resté dans le couloir durant $[T_j, T_{j+1}]$. Nous considérons que les paiements aux dates T_{j+1} sont :

$$v_{T_{j+1}} = \left[\frac{\rho(T_j, T_j + \theta_j) + \Delta_j}{N_D}\right] H(T_j, T_{j+1}) \quad j = 0, \ldots, N-1 \tag{13}$$

Δ_j est un spread de taux rajouté au taux proportionnel ρ. N_D désigne le nombre de jours dans l'année et $T_j + i$ le ième jour après la date T_j. Nous cherchons à évaluer ce titre en t $(T_0 \leq t < T_1)$ et nous distinguons la période $[T_0, T_1]$ des périodes $[T_j, T_{j+1}]$. En effet, durant la première période le taux de référence est connu en t, ce qui ne sera plus le cas pour les autres périodes. Nous notons $m(T_0 + i)$ et $M(T_0 + i)$ le couple définissant l'intervalle filtre et n_0 le nombre de jours entre t et T_1. On a donc comme valeur à l'échéance de ce titre limité à la première période[5] :

$$V(t, T_1; T_0, \theta_0) = E_Q\left[\frac{[\rho(T_0, T_0 + \theta_0) + \Delta_0]}{N_D}\left[H(T_0, t) + \sum_{i=1}^{n_0} 1_{m(T_0+i) \leq \rho(T_0+i, T_0+i+\theta_0) \leq M(T_0+i)}\right]\delta(t, T_1)\right]$$

La valeur d'équilibre en t est donc :

[5] L.Assoun, C.Chaussade et D.Khougazian (1994) ont évalué, dans le cas d'une structure de volatilité linéaire des titres de ce type.

$$V(t,T_1;T_0,\theta_0)=P(t,T_1)E_{Q_{T+1}}\left[\frac{[\rho(T_0,T_0+\theta_0)+\Delta_0]}{N_D}\left[H(T_0,t)+\sum_{i=1}^{n_0}1_{m(T_0+i)\le\rho(T_0+i,T_0+i+\theta_0)\le M(T_0+i)}\right]\right]$$

Le terme générique dans la somme correspond exactement au solde à l'échéance d'options double digitales avec paiement différé en T_1, les autres éléments intervenant dans l'espérance sont déterministes, il en résulte que :

$$V(t,T_1;T_0,T_0+\theta_0)=\frac{[\rho(T_0,T_0+\theta_0)+\Delta_0]}{N_D}\left[H(T_0,t)P(t,T_1)+\sum_{i=1}^{n_0}dd(t,T_0+i,\theta_0,m(T_0+i),M(T_0+i)\right] \tag{14}$$

L'évaluation pour les périodes suivantes est plus difficile du fait de l'ignorance dans laquelle on est en t de ce que seront les taux futurs en général et des taux de référence en particulier. Le paiement versé en T_{j+1} par ce titre est :

$$V(T_{j+1},T_{j+1};T_j,T_j+\theta_j)=\frac{[\rho(T_j,T_j+\theta_j)+\Delta_j]}{N_D}H(T_j,T_{j+1})$$

Posons : $T_j'=T_j+\theta_j$; $T_{ji}=T_j+i$; $T_{ji}'=T_{ji}+\theta_j$

n_j désignant le nombre de jours entre T_j et T_{j+1}, on a :

$$H(T_j,T_{j+1})=\sum_{i=1}^{n_j}1_{m(T_{ji})\le\rho(T_{ji},T_{ji}')\le M(T_{ji})}$$

La valeur d'équilibre en t, correspondant à ce flux que nous appellerons couloir élémentaire sur $[T_j,T_{j+1}]$ est :

$$V(t,T_{j+1};T_j,T_j+\theta_j)=E_Q\left[\frac{[\rho(T_j,T_j+\theta_j)+\Delta_j]}{N_D}H(T_j,T_{j+1})\delta(t,T_{j+1})/F_t\right]$$

$$V(t,T_{j+1};T_j,T_j+\theta_j)=\frac{P(t,T_{j+1})}{N_D}E^t_{Q_{T_{j+1}}}\left[[\rho(T_j,T_j+\theta_j)+\Delta_j]H(T_j,T_{j+1})\right] \tag{15}$$

Le calcul un peu délicat est celui de :

$$E^{t}_{Q_{T_{j+1}}}\left[\rho(T_j, T_j + \theta_j)H(T_j, T_{j+1})\right]$$

Il conduit à calculer d'abord des expressions du type :

$$E^{t}_{Q_{T_{j+1}}}\left[\rho(T_j, T_j + \theta_j)1_{\rho(T_{ji}, T_{ji}') > m(T_{ji})}\right]$$

qui s'écrivent après développement :

$$\frac{1}{\theta_j}\left\{E^{t}_{Q_{T_{j+1}}}\left[\exp\theta_j Y(T_j, T_j')1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji}, T_{ji}')\} > 1+\theta_j m(T_{ji})}\right] - E^{t}_{Q_{T_{j+1}}}\left[1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji}, T_{ji}')\} > 1+\theta_j m(T_{ji})}\right]\right\}$$

La première espérance s'écrit après calculs :

$$E^{t}_{Q_{T_{j+1}}}\left[\exp\theta_j Y(T_j, T_j')1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji}, T_{ji}')\} > 1+\theta_j m(T_{ji})}\right] =$$
$$\frac{P(t, T_j)}{P(t, T_j')}\exp\left\{K(t, T_j, T_j', T_{j+1}) + \frac{1}{2}I^2(t, T_j, T_j')\right\}N\left[x(t, T_j; i, \theta_j, m(T_{ji}))\right]$$

avec :

$$x(t, T_j; i, \theta_j, m(T_{ji})) = I(t, T_j, T_j') + \frac{\ln\left\{\dfrac{P(t, T_{ji})}{P(t, T_{ji}')(1+\theta_j m(T_{ji}))}\right\} + K(t, T_{ji}, T_{ji}', T_{j+1})}{I(t, T_{ji}, T_{ji}')}$$

La seconde:

$$E^{t}_{Q_{T_{j+1}}}\left[1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji}, T_{ji}')\} > 1+\theta_j m(T_{ji})}\right] = Q_{T_{j+1}}\left[\theta_j Y(T_{ji}, T_{ji}') > \ln(1+\theta_j m(T_{ji}))\right]$$

expression d'un type que nous avons déjà calculé, en fait il est plus intéressant de la regrouper avec les termes en Δ pour faire apparaître une option double digitale. En effet l'espérance dans (15) est de la forme :

$$\frac{1}{\theta_j}\left\{E^t_{Q_{T_{j+1}}}[A^j_i - B^j_i] + [\theta_j\Delta_j - 1]E^t_{Q_{T_{j+1}}}\{[1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji},T_{ji}')\}>1+\theta_j m(T_{ji})} - 1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji},T_{ji}')\}>1+\theta_j M(T_{ji})}\}\right\}$$

Il est clair que dans la seconde espérance apparaît le solde à l 'échéance d'une option double digitale exerçable en T_{ji}. En utilisant les résultats précédent on peut écrire la valeur d'équilibre du couloir élémentaire sous la forme :

$$V(t,T_{j+1};T_j,T_j+\theta_j) =$$

$$\frac{P(t,T_{j+1})}{N_D\theta_j}\frac{P(t,T_j)}{P(t,T_j')}\exp\{K(t,T_j,T_j',T_{j+1})+\frac{1}{2}I^2(t,T_j,T_j')\}\sum_{i=1}^{n_j}\left\{N\left[x(t,T_j;i,\theta_j,m(T_{ji})\right]-N\left[x(t,T_j;i,\theta_j,M(T_{ji})\right]\right\} +$$
$$\frac{1}{N_D}[\Delta_j - \frac{1}{\theta_j}]\sum_{i=1}^{n_j} dd(t,T_j,T_{ji}',\theta_j,m_{ji},M_{ji}) \tag{16}$$

Le titre couloir en valeur d'équilibre en t s'écrit donc :

$$Co(t,T_0,T_N) = V(t,T_1;T_0,T_0+\theta_0) + \sum_{j=1}^{N-1} V(t,T_{j+1};T_j+\theta_j) \tag{17}$$

CONCLUSION

Nous avons obtenu, à l'aide du modèle linéaire gaussien à un aléa, des formules explicites pour les options digitales, double-digitales, avec paiement retardé et évalué une obligation couloir. Dans ce dernier cas, la formule d'évaluation est un peu plus longue que la formule des digitales mais elle est tout à fait exploitable et nous l'avons présentée de façon paramétrable, au sens informatique du terme, de telle sorte qu'il est possible d'utiliser un modèle avec une structure de volatilité linéaire aussi bien qu'exponentielle. Il n'est pas surprenant que l'on obtienne des solutions fermées car les structures à volatilités déterministes conduisent à des taux gaussiens. Nous avons à nouveau remarqué tout l'intérêt d'un recours systématiques aux univers forward neutre et la très grande efficacité des formules permettant une analyse aisée des instruments à paiement retardé. Le prolongement de cette étude pourrait se faire à la fois sur le plan empirique : en confrontant les formules d'évaluation obtenues avec les données de marché, sur le plan théorique en utilisant des taux non gaussiens. Enfin il serait intéressant d'approfondir l'analyse des titres couloirs et envisager, leur mode de cotation, leurs extensions, ainsi que leurs couvertures.

Bibliographie

ASSOUN L, CHAUSSADE C et KHOUGAZIAN D., " Obligations structurées : une option sur l'exotisme", Quants (revue du Crédit Commercial de France), juin 1994.

AUGROS J.C., Les options sur taux d'intérêt. Economica, 1989.

BRACE, A. and MUSIELA, M., "A Multifactor Gauss-Markov implementation of Heath, Jarrow and Morton, Mathematical Finance,2 1994.

BRIYS . E , CROUHY M and SCHÖBEL R.,"The Pricing of Default-free Interest Rate Cap, Floor and Collar Agreements," *The Journal of Finance*, 1991.

DANA R.A et M.JEANBLANC - PICQUE., Marchés Financiers en Temps Continu Valorisation et Equilibre, Economica, 1994.

EL KAROUI. N and GEMAN.H , "A Stochastic Approach to the Pricing of FRNs," *RISK*, march, 1991.

EL KAROUI. N and GEMAN.H , "The Valuation of General Floating-Rate Notes and Swaps: A Probabilistic Approach", *Working paper, Université Paris VI et ESSEC*, 1991.

EL KAROUI N. and ROCHET, J.C, "A Pricing Formula for Options on Coupon-Bonds," *papier de recherche, Université de Paris VI*, 1989.

GEMAN H. and YOR M., "Bessel Processes, Asian Options, and Perpetuities", *Mathematical Finance*, 1993.

HULL J., Options, Futures, and other Derivatives Securities, second edition, Prentice-Hall, 1993.

HULL J., and WHITE. A., "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, 1993.

JAMSHIDIAN,. F.,"An Exact Bond Option Formula, "*The Journal of Finance*, 1989.

QUITTARD - PINON F., "Evaluation de produits dérivés de taux d'intérêt à l'aide du modèle linéaire gaussien à un aléa .," Séminaire d'Etudes et de Statistiques Appliquées à la Modélisation en Economie, septembre 1994.

QUITTARD - PINON F., "Formules fermées pour caps floors et options asiatiques sur taux d'intérêt ", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, décembre, 1995.

TURNBULL S., "Interest Rate Digital Options and Range Notes," *The Journal of Derivatives*, Fall 1995.