

MODELE D'EVALUATION D'UN ACTIF CONTINGENT AUX TAUX D'INTERET ET A DEUX ACTIFS RISQUES

Jean-Claude AUGROS

Professeur à l'Université Claude Bernard LYON I
et à L'Institut de Science Financière
et d'Assurances (ISFA)

Michel QUERUEL

Docteur en Sciences de Gestion
Ingénieur de Marché
Société de Bourse AUREL

ISFA

43 Bd du 11 Novembre 1918
Campus de la Doua, bat. 101
69622 Villeurbanne cedex
Tel : 04.72.43.11.75
Fax : 04.72.43.11.76
e-mail isfa@cismsun.univ-lyon1.fr

Résumé

L'objet du modèle présenté dans cet article est de permettre la valorisation d'un actif contingent à la fois aux taux d'intérêt et à deux actifs risqués. Il repose sur la combinaison de deux modèles de base, celui de Ho et Lee généralisé, développé par Bonnassieux et Brunel (1993) pour modéliser l'évolution de la structure des taux, et celui de Cox, Ross et Rubinstein (1979) pour la modélisation du prix des actifs risqués. La démarche séquentielle proposée constitue une généralisation du modèle de Kishimoto [1989]. Cette approche octonominale permet de prendre en compte la corrélation des variations du prix des deux actifs risqués sous-jacents avec les taux d'intérêt. En outre, à la différence du modèle de Kishimoto, le modèle développé ici permet de différencier la volatilité des taux d'intérêt en fonction de la maturité à laquelle ils se rapportent. Une application à la valorisation d'une option sur le maximum (ou le minimum) de deux actifs, en présence de taux d'intérêt stochastiques, est proposée.

Mots clés : option sur deux actifs, corrélation avec les taux d'intérêt, univers risque neutre, duration effective.

Key words : option on two assets, correlation with interest rates, risk-neutral world, effective duration.

MODELE D'EVALUATION D'UN ACTIF CONTINGENT AUX TAUX D'INTERET ET A DEUX ACTIFS RISQUES

L'objet du modèle présenté dans cet article est de permettre la valorisation d'un actif contingent à la fois aux taux d'intérêt et à deux actifs risqués. Il repose sur la combinaison de deux modèles de base, celui de Ho et Lee généralisé, développé par Bonnassieux et Brunel (1993) pour modéliser l'évolution de la structure des taux, et celui de Cox, Ross et Rubinstein (CRR) (1979) pour la modélisation du prix des actifs risqués. La démarche séquentielle proposée constitue une généralisation du modèle de Kishimoto (1989). Cette approche octonomiale permet de prendre en compte la corrélation des variations du prix des deux actifs risqués sous-jacents avec les taux d'intérêt. En outre, à la différence du modèle de Kishimoto, le modèle développé ici permet de différencier la volatilité des taux d'intérêt en fonction de la maturité à laquelle ils se rapportent.

L'article est organisé de la façon suivante : dans la première section, un modèle à un seul actif sous-jacent est présenté. Afin de permettre un champ d'application plus vaste, une extension à deux actifs risqués est proposée dans la deuxième section. Enfin, dans la dernière section, une application à la valorisation d'une option sur le maximum (ou le minimum) de deux actifs est développée.

I - MODELE A UN SEUL ACTIF SOUS-JACENT

Cette section est scindée en trois parties. La première est consacrée à la description du processus d'évolution des taux de Ho et Lee généralisé, tandis que la deuxième expose les hypothèses de l'approche séquentielle. Enfin la troisième propose de valoriser un actif contingent.

1 - Présentation du modèle de Ho et Lee généralisé

Le modèle de Ho et Lee généralisé présente l'avantage majeur par rapport au modèle de Ho et Lee (1986) d'intégrer une structure de volatilité des taux d'intérêt par maturité et de la faire évoluer dans le temps de façon déterministe. Ceci représente un avantage indéniable si l'actif contingent a une maturité longue.

Le marché est supposé sans coût de transaction et tous les actifs sont supposés être parfaitement divisibles.

Le temps est considéré comme une variable discrète. Celui-ci est donc indexé par des dates entières $n=1,2,3,\dots$, etc. La date 0 correspond à l'instant présent, et la période qui sépare deux dates est l'unité de temps.

La courbe des taux est supposée se déformer selon un arbre binomial comparable à celui de Ho et Lee. La structure des taux initiale est déterminée par les facteurs d'actualisation pour différentes maturités exprimées en nombre de périodes. Soit $P(\tau)$ le prix d'un zéro-coupon rapportant 1 F à l'échéance et dont la maturité intervient dans τ périodes.

A la date n , il existe $n+1$ valeurs possibles de la structure des taux. Chaque structure des taux est donc identifiée par la date n et par le nombre de hausse des facteurs d'actualisation noté i ; cette structure est notée $P_i^n(\cdot)$. Ainsi à une date n et pour un état de la nature i , la valeur d'une obligation rapportant 1 F dans τ périodes est donnée par $P_i^n(\tau)$.

Tandis que dans le modèle de Ho et Lee les fonctions perturbatrices, contribuant à la hausse ou à la baisse des facteurs d'actualisation, ne dépendent que de la maturité τ , celles définies par Bonnassieux et Brunel [1993], pour obtenir des volatilités non constantes au cours du temps, dépendent également de la date. Soient $h(n,\tau)$ et $h^*(n,\tau)$ ces fonctions telles que :

$$P_{i+1}^{n+1}(\tau) = \frac{P_i^n(\tau+1)}{P_i^n(1)} h(n,\tau) \text{ à la hausse} \quad 1.$$

$$P_i^{n+1}(\tau) = \frac{P_i^n(\tau+1)}{P_i^n(1)} h^*(n,\tau) \text{ à la baisse} \quad 2.$$

La constitution d'un portefeuille d'arbitrage et l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage permettent d'établir la relation suivante

$$\pi h(n,\tau) + (1-\pi)h^*(n,\tau) = 1 \text{ pour tout } n,\tau. \quad 3.$$

où π représente la probabilité risque-neutre de hausse des facteurs d'actualisation.

Une hausse suivie d'une baisse des taux d'intérêt doit conduire au même facteur d'actualisation qu'une baisse suivie d'une hausse. L'indépendance du chemin suivi et la relation (3) conduisent aux fonctions de perturbations suivantes :

$$h(n,\tau) = \frac{1}{\pi + (1-\pi) \frac{\delta(\tau+n)}{\delta(n)}} \quad 4.$$

$$h^*(n,\tau) = \frac{\frac{\delta(\tau+n)}{\delta(n)}}{\pi + (1-\pi) \frac{\delta(\tau+n)}{\delta(n)}}$$

où $\delta(k)$ est un paramètre dont dépend la volatilité des taux de maturité k ¹.

Soit $r_i^n(\tau)$ le taux d'intérêt continu relatif à la maturité τ tel que $r_i^n(\tau) = -\frac{1}{\tau} \ln P_i^n(\tau)$ et p_1 la probabilité réelle de hausse des fonctions d'actualisation. La volatilité annualisée du taux $r_i^n(\tau)$, vue depuis la date 0, est donnée par² :

$$Vol = -n_0^{3/2} \sqrt{p_1(1-p_1)} \ln \left(\left(\frac{\delta(\tau+n)}{\delta(n)} \right)^{\frac{1}{\tau}} \right) \quad 5.$$

où n_0 désigne le nombre de périodes par an.

Par comparaison, dans le modèle de Ho et Lee classique, la volatilité annualisée des taux est donnée par :

$$Vol = -n_0^{3/2} \sqrt{p_1(1-p_1)} \ln(\delta) \quad 6.$$

Cette volatilité est indépendante de l'état de la nature et de la maturité. La formule 5 fait apparaître une volatilité clairement dépendante de la date et de la maturité.

A partir des équations 1, 2 et 4 on obtient le prix d'un zéro-coupon pour un état (n,i) quelconque, en fonction de la courbe initiale des taux, soit :

$$P_i^n(\tau) = \frac{P(\tau+n)}{P(n)} \frac{h(0, \tau+n-1) \dots h(n-1, \tau)}{h(0, n-1) \dots h(n-2, 1)} \left[\frac{\delta(n+\tau)}{\delta(n)} \right]^{n-i} \quad 7.$$

En particulier, le prix d'un zéro-coupon de maturité une période est donné par :

$$P_i^n = \frac{P(n+1)}{P(n)} \frac{h(0, n) \dots h(n-1, 1)}{h(0, n-1) \dots h(n-2, 1)} \left[\frac{\delta(n+1)}{\delta(n)} \right]^{n-i} \quad 8.$$

2 - Evolution séquentielle de la structure par terme et du prix de l'actif risqué

Les hypothèses H1 à H8 de Kishimoto sont reprises ici. Toutefois, le processus d'évolution des taux n'est plus celui de Ho et Lee mais celui de Ho et Lee généralisé (H5).

- (H1) Le temps restant à courir jusqu'à la maturité de l'actif contingent est subdivisé en N périodes de longueurs identiques. Chaque période est elle même subdivisée en deux sous périodes, la seconde étant très courte par rapport à la première. Les transactions s'opèrent à chaque début de sous-période.
- (H2) Le marché est sans friction. Il n'y a pas de taxe, pas de coût de transaction et pas de restriction sur les ventes à découvert. Tous les titres sont parfaitement divisibles.
- (H3) Le marché est supposé complet dans le sens qu'il existe une obligation zéro-coupon sans risque de défaut pour toute maturité τ , avec $\tau=0, \frac{1}{2}, 1, 1+\frac{1}{2}, 2, \dots, N$.
- (H4) Durant la première sous-période le risque de taux d'intérêt prend place et, à la fin de cette sous-période, chaque facteur d'actualisation a deux valeurs possibles. Durant la seconde sous-période, les facteurs d'actualisation restent inchangés, et les taux d'intérêt ne varient donc pas.
- (H5) Les taux d'intérêt suivent le processus de Ho et Lee généralisé décrit dans la section précédente.

Un des principaux apports du modèle est de permettre de faire dépendre, à l'aide d'un processus discret, le rendement de l'actif sous-jacent du niveau des taux d'intérêt. A cette fin, le mouvement du prix de l'actif est décomposé en deux phases. La première, pendant la première sous-période, capture la composante dépendante des taux d'intérêt, et la seconde, pendant la seconde sous-période, décrit la variation de la composante spécifique de l'actif. Ceci se traduit par les deux hypothèses suivantes :

- (H6-1) Pendant la première sous-période, de l'instant n à l'instant $n+\frac{1}{2}$, si une hausse de la structure par terme ³ se produit, le prix de l'actif est multiplié par un facteur u_i^n / P_i^n et, si une baisse se produit, le prix de l'actif est multiplié par d_i^n / P_i^n .

Les facteurs u_i^n et d_i^n permettent de décrire l'évolution de l'actif dépendant des taux d'intérêt. Ces facteurs dépendent de la fonction d'actualisation à l'instant n et à l'état i . Les

termes u_i^n / P_i^n et d_i^n / P_i^n représentent $1 +$ le rendement de l'actif risqué sur la période lié aux variations des taux d'intérêt.

(H6-2) Pendant la seconde sous-période, si une hausse de l'actif se produit, le prix de l'actif est multiplié par un facteur \bar{u} ; si une baisse se produit, le prix est multiplié par un facteur \bar{d} . Ces deux facteurs représentent la composante d'évolution spécifique de l'actif et sont supposés indépendants de l'instant-état (n,i) ⁴.

L'évolution du prix de l'actif $S(n,i,j)$, atteint à la date n après i hausses des facteurs d'actualisation et j hausses de la composante spécifique de l'actif, peut être représentée, au cours d'une période générique $(n,n+1)$, par le schéma suivant :

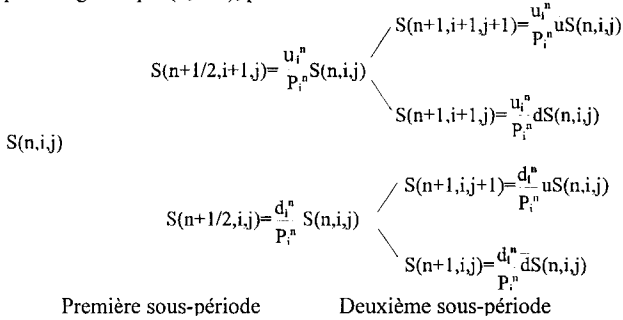


figure 1. Evolution du prix de l'actif sous-jacent

Les propositions 1 à 4 de Kishimoto sont également reprises ici, tout en étant élargies au cas plus général où la volatilité des taux est différenciée selon la maturité.

En l'absence d'opportunité d'arbitrage entre l'actif risqué et n'importe quelle obligation sans risque de défaut, on démontre (voir annexe) la proposition ci-dessous :

Proposition 1 : u_i^n et d_i^n doivent vérifier la relation suivante 9.

$$\pi u_i^n + (1 - \pi) d_i^n = 1$$

Le calcul de la variance du rendement de l'actif risqué sur une période conduit à :

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \tag{10.}$$

où
$$\sigma_1^2 = p_1(1 - p_1) \left\{ \ln \left[\frac{u_i^n}{d_i^n} \right] \right\}^2 \tag{11.}$$

et
$$\sigma_2^2 = p_2(1 - p_2) \left\{ \ln \left[\frac{\bar{u}}{\bar{d}} \right] \right\}^2 \tag{12.}$$

et où p_1 désigne la probabilité réelle de hausse de la structure par terme et p_2 la probabilité réelle de hausse de la composante spécifique de l'actif.

Cette variance est bien sûr dépendante de l'état i de la structure par terme et de l'instant n . Elle varie donc dans le temps.

Le coefficient de corrélation ρ , entre le rendement de l'actif risqué et le taux d'intérêt sans risque de défaut correspondant à une période, est donné par :

$$\rho = -\frac{\sigma_1}{\sigma} \quad 13.$$

où

$$\sigma_1 = \sqrt{p_1(1-p_1)} \ln\left(\frac{u_i^n}{d_i^n}\right)$$

L'écart-type correspondant à la première sous-période est alors égal à la valeur absolue de σ_1 .

Le signe de la corrélation est déterminé par u_i^n . Si $u_i^n > 1$, l'actif est négativement corrélé avec le taux d'intérêt sans risque. Inversement, si $u_i^n < 1$, l'actif est positivement corrélé avec ce taux d'intérêt.

(H7) Le prix de l'actif à l'instant n est entièrement déterminé par le nombre de hausses de la structure par terme et par le nombre de hausses spécifiques du prix de l'actif qui se sont produites avant l'instant n .

Cette hypothèse est équivalente à la relation suivante :

$$u_i^n \left(\frac{1 - \pi u_{i+1}^{n+1}}{1 - \pi} \right) = u_i^{n+1} \left(\frac{1 - \pi u_i^n}{1 - \pi} \right) \frac{\delta(n)}{\delta(n+1)} \quad 14.$$

(démonstration en annexe)

Proposition 2 : Soit U le vecteur donné par u_i^{N-1} , $i=0,1,\dots,N-1$. Alors la donnée des paramètres π , $\delta(1)$, ..., $\delta(n+\tau)$, \bar{u} , \bar{d} , et U définit un processus d'évolution unique de la structure par terme et du prix de l'actif.

(démonstration en annexe)

Une simplification du modèle peut être obtenue en imposant la contrainte suivante :

(H8) : $u_i^{N-1} = \gamma$ pour $i=0,1,\dots,N-1$, où $N-1$ représente le début de la dernière période et γ une constante.

Ceci signifie que, sur la dernière période $[N-1,N]$, la sensibilité de l'actif au taux d'intérêt, est indépendante de l'état i de la structure par terme des taux d'intérêt.

L'hypothèse H8 implique alors :

$$u^n = \frac{u^{n+1}}{\frac{\delta(n+1)}{\delta(n)} + \pi u^{n+1} - \pi \frac{\delta(n+1)}{\delta(n)} u^{n+1}} \quad 15.$$

Il s'en suit que, quelle que soit la date, la sensibilité de l'actif est indépendante de l'état de la structure par terme des taux d'intérêt.

L'expression générale définissant le prix de l'actif risqué est alors donnée par la proposition suivante :

Proposition 3 : Soient S et $S_{i,j}^n$ les prix de l'actif risqué à l'instant 0 et à l'instant (n, i, j) . Alors :

$$S_{i,j}^n = \frac{F_1(n, i; \pi, \Delta, \gamma) F_2(n, j, \bar{u}, \bar{d}) S}{P(n)} \quad 16.$$

où

$$F_1(n, i; \pi, \Delta, \gamma) = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} u^{(k)} \prod_{k=i}^{n-1} \frac{1 - \pi u^{(k)}}{1 - \pi}}{h(0, n-1) \dots h(n-2, 1) \delta(n-1)^{n-i-1}} \quad 17.$$

$$F_2(n, j, \bar{u}, \bar{d}) = \bar{u}^j \bar{d}^{n-j} \quad 18.$$

$$u^{(n)} = \frac{u^{(n+1)}}{\frac{\delta(n+1)}{\delta(n)} + \pi u^{(n+1)} - \pi \frac{\delta(n+1)}{\delta(n)} u^{(n+1)}} \quad n=0, \dots, N-2 \quad 19.$$

avec la condition limite $u^{(N-1)} = \gamma$

Δ désigne l'ensemble des $\delta(i)$ pour $i=1, \dots, n$.

(démonstration en annexe)

Le terme $F_1(n, i; \pi, \Delta, \gamma)/P(n)$ représente $(1 +$ le rendement gagné par la composante dépendant des taux d'intérêt jusqu'à l'instant $n)$. Le terme $F_2(n, j; \bar{u}, \bar{d})$ représente $(1 +$ le rendement acquis par la composante spécifique de l'actif).

3 - Valorisation d'un actif contingent

3.1. Formule d'évaluation

Au cours d'une période, le prix de l'actif contingent suit le schéma suivant :

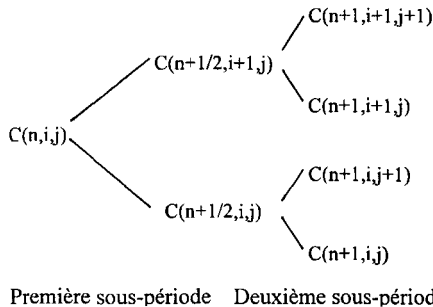


figure 2. Evolution du prix de l'actif contingent

En constituant un portefeuille d'arbitrage sur chacune des sous-périodes, on obtient la relation suivante :

$$C(n, i, j) = P_i^n [\pi q C(n+1, i+1, j+1) + \pi(1-q)C(n+1, i+1, j) + (1-\pi)qC(n+1, i, j+1) + (1-\pi)(1-q)C(n+1, i, j)] \quad 20.$$

$$\text{avec } q = \frac{1-\bar{d}}{u-\bar{d}}$$

(démonstration en annexe)

La probabilité risque neutre de CRR est égale à $(r - \bar{d}) / (\bar{u} - \bar{d})$ où r désigne 1+le taux sans risque sur la période qui se réduit à 1 si le taux est nul.

La relation 20 permet le calcul de la valeur espérée, sous la probabilité risque neutre, de l'actif à l'instant $n+1$ actualisée par le facteur prévalant à l'instant n .

Il est possible de déterminer le prix de l'actif contingent en reprenant le raisonnement récursif de Ho et Lee. Il suffit pour cela de connaître la fonction de paiement de l'actif à son échéance.

Soit $\phi(i, j)$ cette fonction, et N le nombre de périodes jusqu'à la maturité de l'option.

Puisque le prix de l'actif contingent doit être à son échéance égal à la fonction terminale de paiement, on a :

$$C(N, i, j) = \phi(i, j), \quad i, j = 0, 1, \dots, N \quad 21.$$

L'actif contingent peut avoir des valeurs limites à la hausse ou à la baisse. Soient $H(n, i, j)$ et $B(n, i, j)$ la limite à la hausse et à la baisse, à l'instant n , pour l'état (i, j) . On a alors :

$$B(n, i, j) \leq C(n, i, j) \leq H(n, i, j) \quad \text{pour tout } (n, i, j) \quad 22.$$

A partir de la valeur terminale de C (équation 21), de la relation risque-neutre (équation 20) et des conditions limites (équation 22), on peut déterminer le prix de l'actif contingent à la date $N-1$.

Soit $C^*(N-1, i, j)$ le prix de l'actif à l'instant $N-1$ obtenue à partir de l'équation 20 ; la valeur de l'actif $C(N-1, i, j)$ est alors donnée par :

$$C(N-1, i, j) = \max[B(N-1, i, j), \min(C^*(N-1, i, j), H(N-1, i, j))]. \quad 23.$$

Le même raisonnement appliqué de proche en proche permet d'obtenir le prix de l'actif contingent à l'instant présent.

Cependant, si l'actif contingent n'a aucun flux ni condition intermédiaire, son prix peut être calculé sans décrire tout l'arbre de retour de l'actif contingent. Pour ce faire, il suffit de calculer le prix d'un actif d'Arrow-Debreu.

Proposition 4 : Le prix $A(n, i, j)$ d'un actif d'Arrow-Debreu, qui distribue un franc à l'instant n si et seulement si l'état (i, j) se produit, est donné par :

$$A(n, i, j) = P(n)H_1(n, i; \pi, \Delta)H_2(n, i, j; \pi, q) \quad 24.$$

où

$$H_1(n, i; \pi, \Delta) = \frac{g'(n, n-i, i)h(0, n-1)\dots h(n-2, 1)}{C_n^i} \quad 25.$$

$$H_2(n, i, j; \pi, q) = C_n^i C_n^j \pi^i (1-\pi)^{n-i} q^j (1-q)^{n-j} \quad 26.$$

$$g'(n, n-i, i) = \left[\frac{\delta(n-1)}{\delta(n-2)} \right]^{n-i} g'(n-1, n-i, i-1) + \left[\frac{\delta(n-1)}{\delta(n-2)} \right]^{n-i-1} g'(n-1, n-1-i, i) \quad 27.$$

avec les conditions limites :

$$g'(k, 1, 0) = g'(k, 0, 1) = 1 \text{ et } g'(k, u, v) = 0 \text{ si } u \text{ ou } v < 0.$$

(démonstration en annexe)

$A(n, i, j)$ représente l'espérance de la valeur actualisée au taux sans risque de l'actif d'Arrow-Debreu sous la probabilité risque neutre. $P(n)H_1(n, i; \pi, \delta)$ représente le « facteur d'actualisation » espéré conditionnel à l'événement (i, j) , c'est à dire 1 plus le rendement cumulé moyen d'un investissement sans risque obtenu sur les différents chemins conduisant de l'état initial à l'état (n, i, j) . Le terme $H_2(n, i, j; \pi, q)$ correspond quant à lui à la probabilité d'arriver à l'instant n en l'état (i, j) . Comme l'actif d'Arrow-Debreu ne distribue 1 F que si l'état (i, j) se produit, l'espérance du flux final se résume alors à la probabilité d'atteindre l'état (n, i, j) . Au total le prix de l'actif d'Arrow-Debreu peut donc s'interpréter comme le produit de deux espérances.

La valeur de l'actif contingent, sans flux ni condition intermédiaire, est alors donnée par :

$$C = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N A(N, i, j) \phi(i, j) \quad 28.$$

où $\phi(i, j)$ est la fonction de paiement à l'instant N , pour l'état (i, j) .

3.2 - Estimation des paramètres

Le nombre important des paramètres du modèle nous a conduit à rechercher une procédure d'estimation de ces paramètres. Certains sont mesurables statistiquement à partir de données de marché, d'autres nécessitent un traitement supplémentaire.

Cette méthode se décompose en deux phases. La première consiste à estimer les paramètres du modèle d'évolution de la structure des taux de Ho et Lee généralisé, et la seconde permet ensuite d'évaluer les paramètres dépendants de l'actif risqué.

Estimation des paramètres du modèle de Ho et Lee généralisé :

Il convient d'estimer la fonction δ intervenant dans la fonction perturbatrice h , et la probabilité risque neutre π de hausse de la structure des taux.

Ces paramètres étant indépendants de l'actif risqué, leur estimation peut se faire sur n'importe quel actif contingent. Cette première phase consiste donc à valoriser un actif

dépendant uniquement des taux d'intérêt à partir du modèle de Ho et Lee généralisé et à rechercher les paramètres permettant de caler le prix théorique de cet actif sur le prix de marché. On peut utiliser des options sur taux d'intérêt, comme des options sur contrat Matif, de maturités et de prix d'exercice différents.

La faible sensibilité du modèle aux variations de la probabilité π et la complexité de la recherche du couple (π, δ) ⁵ pour le modèle de Ho et Lee (qui constitue un cas particulier du modèle de Ho et Lee généralisé) ont conduit Ho à proposer de prendre $\pi=0.5$. Il ne reste plus alors que la fonction $\delta(k)$ à estimer.

Cette recherche peut être « simplifiée » en admettant une hypothèse supplémentaire.

Sous l'hypothèse des anticipations locales, on peut montrer que^{6,7} :

$$\delta(k) = \exp\left(-\frac{k \times \sigma(k)}{n_0^{3/2} \sqrt{\pi(1-\pi)}}\right) \quad 29.$$

où $\sigma(k)$ désigne la volatilité annualisée initiale du taux annuel continu de maturité k , et n_0 le nombre de périodes par an.

Dans ces conditions, la connaissance des paramètres du modèle de Ho et Lee généralisé se résume à l'estimation de la structure de volatilité des taux d'intérêt.

La volatilité actuelle du taux correspondant à τ périodes est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma(k) &= -\frac{n_0^{3/2} \sqrt{p_1(1-p_1)}}{k} \ln(\delta(k)) \\ &= -\sum_{n=0}^{k-1} \frac{n_0^{3/2} \sqrt{p_1(1-p_1)}}{k} \ln\left(\frac{\delta(n+1)}{\delta(n)}\right) \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{k-1} Vol_n(1)}{k} \end{aligned}$$

où $Vol_n(1)$ désigne la volatilité annualisée du taux en base annuelle, de maturité une période, à la date n .

Ainsi, la volatilité d'un taux de maturité quelconque apparaît comme la moyenne des volatilités des taux futurs de maturité une période. La structure de volatilité aujourd'hui conditionne donc les volatilités futures.

Toutefois, ce résultat est établi en supposant une fonction δ décroissante. Ceci se traduit, sous l'hypothèse des anticipations locales, par une condition sur la structure de volatilité actuelle.

L'équation 29 donne⁸ :

$$\sigma(n+1) > \frac{n}{n+1} \sigma(n) \quad 30.$$

Cette condition est indispensable pour avoir une fonction perturbatrice à la hausse, h , supérieure à 1.

Estimation des paramètres de l'actif risqué :

Kishimoto propose d'estimer les trois paramètres γ , \bar{u} et \bar{d} en calant le prix théorique de l'actif contingent sur la valeur de marché. Si l'actif est une option il suffit de caler le prix théorique pour différentes échéances et différents prix d'exercice. Cette procédure s'avère

difficile si le nombre d'actifs contingents côtés sur le marché est restreint. Nous proposons une autre façon de procéder pour estimer ces paramètres.

Soit σ_m la volatilité du rendement de l'actif risqué calculée à partir des données de marché, sur une période courte précédant l'instant présent.

Soit ρ le coefficient de corrélation entre le taux d'intérêt à court-terme sans risque de défaut et le rendement de l'actif risqué. Ce coefficient peut être également calculé sur une courte période.

La volatilité du rendement de l'actif risqué entre l'étape n et l'étape $n+1$ est donnée par la formule 10

$$\sigma = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

où σ_1 et σ_2 sont données par les expressions 11 et 12.

En particulier cette formule est vraie à l'étape 0. Si la période est suffisamment courte, on peut supposer que la volatilité σ^2 correspondant à la première période est égale à $\sigma_m^2 \frac{T}{n}$.

Le coefficient de corrélation entre le rendement de l'actif et le taux sans risque est égal pour une période à $-\sigma_1/\sigma$. En identifiant ce coefficient de corrélation avec la mesure effectuée sur le marché, on en déduit la valeur de σ_1 et donc, d'après les formules 10, 11, et 12, la valeur de σ_2 , à l'instant présent. On obtient :

$$\sigma_1 = -\rho\sigma_m\sqrt{\frac{T}{n}} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sqrt{\sigma_m^2 \frac{T}{n} (1 - \rho^2)} \quad 31.$$

Comme dans le modèle de CRR, afin d'assurer, en l'absence de corrélation, la convergence du modèle de Kishimoto vers le modèle de Black et Scholes, on pose $\bar{u} = \exp(\sigma_2)$ et $\bar{d} = \frac{1}{u}$.

Il ne reste plus qu'à estimer γ , en calant le prix théorique de l'actif contingent sur la valeur de marché. Cependant si l'objectif est de valoriser un actif qui n'est pas côté sur le marché, γ ne peut être estimé par ce calage. Identiquement à l'estimation des paramètres du modèle de Ho et Lee généralisé, la recherche se simplifie sous l'hypothèse des anticipations locales. La probabilité p_1 de hausse de la structure par terme des taux d'intérêt est alors égale à π . La combinaison des formules 9 et 11 permet de déduire u^0 .

$$u^0 = \frac{\exp\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\right)}{1 - \pi + \pi \exp\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\right)} \quad 32.$$

En inversant la fonction définie par la formule 15¹⁰, on en déduit la suite récurrente des u^n .

II - EXTENSION DU MODELE A DEUX ACTIFS RISQUES SOUS-JACENTS

Afin d'assurer au modèle un champ d'application le plus vaste possible, une extension à deux actifs risqués est proposée. L'approche séquentielle permet d'inclure autant d'actifs sous-jacents que souhaités, les limites du modèle étant toutefois liées au temps de calcul nécessaire.

1 - Processus d'évolution des taux d'intérêt et des actifs risqués

Les hypothèses H1 à H3 et H5 de la section précédente sont reprises ici. En outre :

(H4) durant la première sous-période, le risque de taux d'intérêt prend place et, à la fin de cette sous-période, les facteurs d'actualisation ont deux valeurs possibles. Pendant les deux sous-périodes suivantes, les facteurs d'actualisation restent inchangés.

Le rendement de chacun des actifs risqués est supposé corrélé avec les taux d'intérêt selon le processus séquentiel suivant :

(H6-1) Si, pendant la première sous-période, de l'instant n à l'instant $n + \frac{1}{2}$, une hausse de la structure par terme se produit, les prix de l'actif 1 et de l'actif 2 sont respectivement multipliés par $u_{i,1}^n / P_i^n$ et $u_{i,2}^n / P_i^n$, et si une baisse se produit ces prix sont multipliés par $d_{i,1}^n / P_i^n$ et $d_{i,2}^n / P_i^n$ ¹¹.

(H6-2) Si, pendant la deuxième sous-période, de l'instant $n + \frac{1}{2}$ à l'instant $n + \frac{3}{4}$, une hausse de la composante spécifique de l'actif 1 se produit, son prix est multiplié par un facteur noté \bar{u}_1 . S'il s'agit d'une baisse, son prix est multiplié par \bar{d}_1 . Pendant cette même sous-période, le prix de l'actif 2 reste inchangé.

(H6-3) Si, pendant la troisième sous-période, de l'instant $n + \frac{3}{4}$ à l'instant $n + 1$, une hausse de la composante spécifique de l'actif 2 se produit, son prix est multiplié par un facteur noté \bar{u}_2 . S'il s'agit d'une baisse, son prix est multiplié par \bar{d}_2 . Pendant cette même sous-période, le prix de l'actif 1 reste inchangé.

L'évolution du prix des actifs sous-jacents est représentée par le schéma suivant :

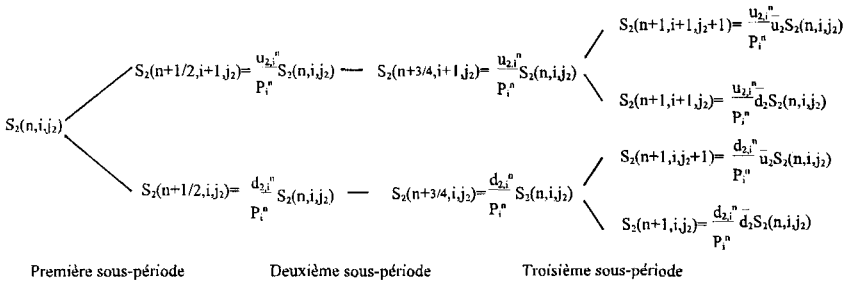
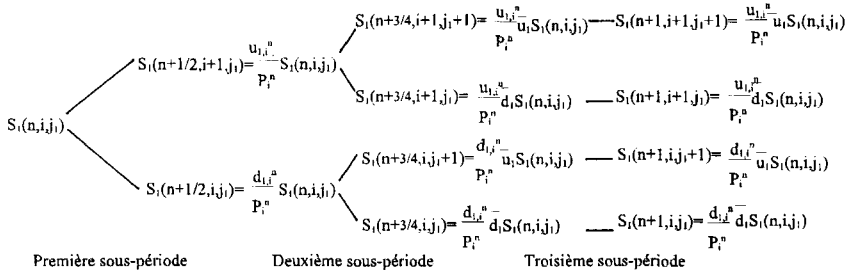


figure 3. Evolution du prix des actifs sous-jacents

Rappelons que l'absence d'opportunité d'arbitrage entre les obligations sans risque de défaut, a permis de montrer la relation suivante :

$$\pi h(n, \tau) + (1 - \pi)h^*(n, \tau) = 1 \text{ pour tout } n, \tau.$$

De même, la constitution de portefeuilles d'arbitrage composés d'un actif risqué et d'une obligation permettent d'établir la proposition suivante :

Proposition 5 : $u_{1,i}^n, d_{1,i}^n, u_{2,i}^n$ et $d_{2,i}^n$ doivent vérifier les relations

33.

$$\pi u_{1,i}^n + (1 - \pi) d_{1,i}^n = 1$$

34.

$$\pi u_{2,i}^n + (1 - \pi) d_{2,i}^n = 1$$

pour tout (n, i) , où π est la probabilité risque-neutre de hausse de la fonction d'actualisation.

Les variances des rendements des actifs risqués sur une période $[n, n+1]$ peuvent être décomposées en deux composantes. On obtient :

$$\sigma_1^2 = \sigma_{1,T}^2 + \sigma_{1,S}^2 \tag{35.}$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_{2,T}^2 + \sigma_{2,S}^2$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_{1,T}^2 &= p(1-p) \left[\ln\left(\frac{u_{1,i}^n}{d_{1,i}^n}\right) \right]^2, & \sigma_{1,S}^2 &= p_1(1-p_1) \left[\ln\left(\frac{\bar{u}_1}{d_1}\right) \right]^2 \\ \sigma_{2,T}^2 &= p(1-p) \left[\ln\left(\frac{u_{2,i}^n}{d_{2,i}^n}\right) \right]^2, & \sigma_{2,S}^2 &= p_2(1-p_2) \left[\ln\left(\frac{\bar{u}_2}{d_2}\right) \right]^2 \end{aligned} \quad 36.$$

$\sigma_{k,T}^2$ désigne la variance du rendement de la composante dépendante des taux de l'actif k , et p la probabilité réelle de hausse des facteurs d'actualisation.

$\sigma_{k,S}^2$ désigne la variance du rendement de la composante spécifique de l'actif k , p_k la probabilité réelle de hausse de la composante spécifique de l'actif k .

Les corrélations entre les rendements des actifs risqués et le taux sans risque de défaut sont données, pour une période $[n, n+1]$, par :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{\sigma_{1,T}}{\sigma_1} \\ \rho_2 &= -\frac{\sigma_{2,T}}{\sigma_2} \end{aligned} \quad 37.$$

où

$$\sigma_{1,T} = \sqrt{p(1-p)} \ln\left(\frac{u_{1,i}^n}{d_{1,i}^n}\right) \quad \text{et} \quad \sigma_{2,T} = \sqrt{p(1-p)} \ln\left(\frac{u_{2,i}^n}{d_{2,i}^n}\right)$$

(H7) Le prix de l'actif 1, comme celui de l'actif 2, est entièrement déterminé par le nombre de hausses des facteurs d'actualisation et par le nombre de hausses du prix des actifs ¹².

Cette hypothèse est équivalente à :

$$\begin{aligned} u_{1,i}^n \left(\frac{1 - \pi u_{1,i+1}^{n+1}}{1 - \pi} \right) &= u_{1,i}^{n+1} \left(\frac{1 - \pi u_{1,i}^n}{1 - \pi} \right) \frac{\delta(n)}{\delta(n+1)} \\ u_{2,i}^n \left(\frac{1 - \pi u_{2,i+1}^{n+1}}{1 - \pi} \right) &= u_{2,i}^{n+1} \left(\frac{1 - \pi u_{2,i}^n}{1 - \pi} \right) \frac{\delta(n)}{\delta(n+1)} \end{aligned} \quad 38.$$

Nous nous plaçons, pour la suite de l'analyse, dans le cas où la sensibilité de l'actif au taux d'intérêt est indépendante de l'état i de la structure par terme des taux d'intérêt. On pose $u_{1,i}^n = u_1^n$ et $u_{2,i}^n = u_2^n$.

2 - Valorisation d'un actif contingent

Soit $C(n, i, j_1, j_2)$ le prix d'un actif contingent aux taux d'intérêt et à deux actifs risqués, à l'instant n pour l'état (i, j_1, j_2) . Ce prix évolue suivant le schéma suivant :

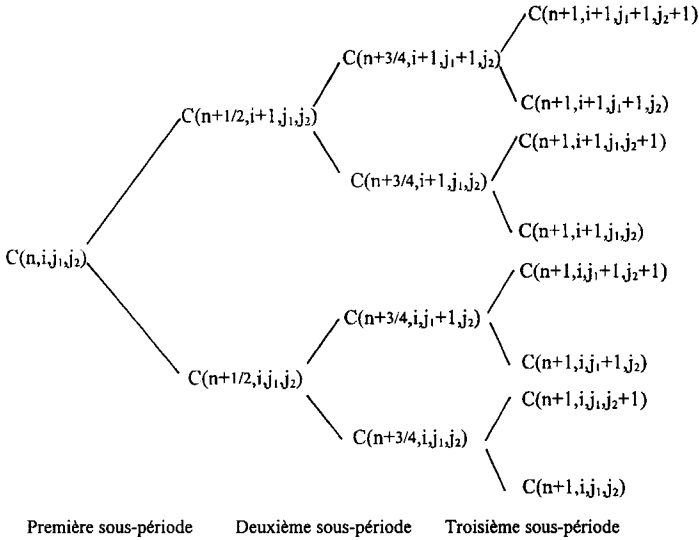


figure 4. Evolution de l'actif contingent

La relation risque neutre est donnée par :

$$\begin{aligned}
 C(n, i, j_1, j_2) = P_i^n [& \pi(1 - q_1)(1 - q_2)C(n + 1, i + 1, j_1, j_2) \\
 & + \pi q_1(1 - q_2)C(n + 1, i + 1, j_1 + 1, j_2) \\
 & + \pi(1 - q_1)q_2 C(n + 1, i + 1, j_1, j_2 + 1) \\
 & + \pi q_1 q_2 C(n + 1, i + 1, j_1 + 1, j_2 + 1) \\
 & + (1 - \pi)(1 - q_1)(1 - q_2)C(n + 1, i, j_1, j_2) \\
 & + (1 - \pi)q_1(1 - q_2)C(n + 1, i, j_1 + 1, j_2) \\
 & + (1 - \pi)(1 - q_1)q_2 C(n + 1, i, j_1, j_2 + 1) \\
 & + (1 - \pi)q_1 q_2 C(n + 1, i, j_1 + 1, j_2 + 1)]
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

avec

$$q_1 = \frac{1 - \bar{d}_1}{u_1 - \bar{d}_1} \text{ et } q_2 = \frac{1 - \bar{d}_2}{u_2 - \bar{d}_2} \tag{40}$$

(démonstration en annexe)

Le prix de l'actif contingent à la date n apparaît donc comme l'espérance de sa valeur à la date $n+1$ actualisée au taux sans risque.

La procédure de calcul du prix de l'actif contingent est strictement identique à celle présentée dans la section précédente. Elle consiste simplement à calculer de proche en proche la valeur de l'actif tout en introduisant les conditions intermédiaires.

S'il n'y a ni flux ni condition intermédiaire jusqu'à la maturité de l'actif contingent, il est également possible de calculer son prix sans développer tout l'arbre de retour. Ce calcul repose sur la valorisation d'un actif d'Arrow-Debreu.

(démonstration en annexe)

Proposition 6 : *Le prix $A(n, i, j_1, j_2)$ d'un actif d'Arrow-Debreu, qui distribue un franc à l'instant n si et seulement si l'état (i, j_1, j_2) se produit, est donné par :*

$$A(n, i, j_1, j_2) = P(n)H_1(n, i; \pi, \Delta)H_2(n, i, j_1, j_2; \pi, q) \quad 41.$$

où

$$H_1(n, i; \pi, \Delta) = \frac{g'(n, n-i, i)h(0, n-1) \dots h(n-2, 1)}{C_n^i} \quad 42.$$

$$H_2(n, i, j_1, j_2; \pi, q) = C_n^i C_n^{j_1} C_n^{j_2} \pi^i (1-\pi)^{n-i} q^{j_1} (1-q)^{n-j_1} q^{j_2} (1-q)^{n-j_2} \quad 43.$$

$$g'(n, n-i, i) = \left[\frac{\delta(n-1)}{\delta(n-2)} \right]^{n-i} g'(n-1, n-i, i-1) + \left[\frac{\delta(n-1)}{\delta(n-2)} \right]^{n-i-1} g'(n-1, n-1-i, i) \quad 44.$$

avec les conditions limites :

$$g'(k, 1, 0) = g'(k, 0, 1) = 1$$

$$\text{et } g(k, u, v) = 0 \text{ si } u \text{ ou } v < 0.$$

La valeur de l'actif contingent, sans flux ni condition intermédiaire, est alors donnée par :

$$C = \sum_{i=0}^N \sum_{j_1=0}^N \sum_{j_2=0}^N A(N, i, j_1, j_2) \phi(i, j_1, j_2) \quad 45.$$

où $\phi(i, j_1, j_2)$ est la fonction de paiement de l'actif contingent à l'instant N , pour l'état (i, j_1, j_2) .

III - APPLICATION A LA VALORISATION D'UNE OPTION SUR MAXIMUM DE DEUX ACTIFS

Une option européenne sur le maximum de deux actifs donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) à l'échéance, à un prix convenu d'avance, celui dont le prix est le plus élevé.

STULZ (1982) a proposé une formule analytique d'évaluation de ce type d'option. Son modèle, construit sur le principe de celui de Black et Scholes, suppose une courbe des taux plate et des taux d'intérêt constants au cours du temps. Il ne permet donc pas de valoriser convenablement une option sur deux actifs dont les rendements sont corrélés avec les taux d'intérêt. L'approche développée dans la section précédente permet non seulement de prendre en compte cette corrélation, mais aussi de valoriser une option de type américain.

- La courbe des taux d'intérêt est supposée suivre un processus de déformation décrit par le modèle de Ho et Lee généralisé.

- Soient S_1 et S_2 les prix des actifs 1 et 2 sous-jacents à l'option.

- Les rendements de ces deux actifs sont supposés corrélés avec les taux d'intérêt. On considère de plus que le prix des deux actifs suit le processus décrit par les hypothèses (H6-1), (H6-2) et (H6-3).

- Soit N le nombre de périodes jusqu'à l'échéance.

Pour obtenir la valeur actuelle de l'option, il suffit de spécifier les conditions terminales.

Dans le cas d'une option d'achat sur maximum, la valeur à l'échéance est :

$$\max\{S1(N, i, j_1), S2(N, i, j_2)\} - K, 0\} \quad \text{pour } 0 \leq i, j_1, j_2 \leq N.$$

Les processus d'évolution de $S1$ et $S2$ permettent de connaître l'ensemble des valeurs terminales des actifs 1 et 2. A partir de ces valeurs et des conditions terminales, la valeur de l'option à l'échéance est connue. La valeur actuelle de l'option européenne peut donc être obtenue en utilisant de proche en proche la relation récurrente. Si l'option est américaine, il suffit de rajouter les conditions intermédiaires à l'équation 39, lors du calcul de l'arbre de la valeur de l'option.

Cependant, si l'option est de type européen, il n'y a pas de flux avant l'échéance de l'option. Le résultat établi pour la valorisation d'un actif d'Arrow-Debreu peut donc être utilisé.

Soit $A(N, i, j_1, j_2)$ le prix d'un actif d'Arrow-Debreu qui distribue 1 franc à l'instant N si et seulement si l'état de la nature (i, j_1, j_2) se produit. Le prix de cet actif est donné par la proposition 6.

La valeur d'une option européenne est alors donnée par :

$$C = \sum_{i=0}^N \sum_{j_1=0}^N \sum_{j_2=0}^N A(N, i, j_1, j_2) \phi(i, j_1, j_2) \quad 46.$$

où $\phi(i, j_1, j_2)$ est la fonction de paiement à l'instant N , pour l'état (i, j_1, j_2) , déterminée à partir des conditions terminales.

Application numérique :

Les paramètres retenus sont les suivants :

$K=100$, Taux court terme=6%, Taux 10 ans=8%, $\sigma_{court\ terme} = 0.03$, $\sigma_{10\ ans} = 0.02$ ¹⁴,

$\sigma_{S1} = 0.3$, $\rho_{S1} = -0.2$, $\sigma_{S2} = 0.3$, $\rho_{S2} = -0.3$, $\pi = 0.5$, $T=1$ an.

Le graphique suivant décrit la valeur de l'option d'achat européenne sur maximum de deux actifs pour différentes valeurs initiales de $S1$ et $S2$.

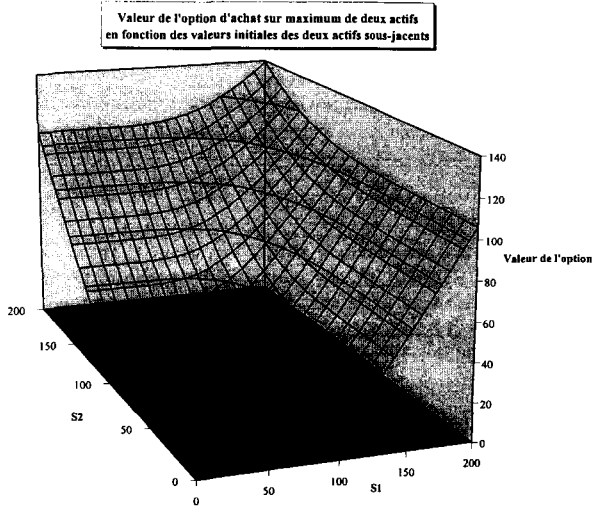


figure 5. Valeur de l'option d'achat sur maximum de deux actifs en fonction des valeurs initiales des deux actifs sous-jacents.

A partir de ce graphique, il est possible de sélectionner plusieurs plans permettant une meilleure visualisation. Les plans correspondant à $S_1=0$ ou $S_2=0$ décrivent des courbes proches de celles obtenues pour une option sur un seul actif corrélé avec les taux. Il vient :

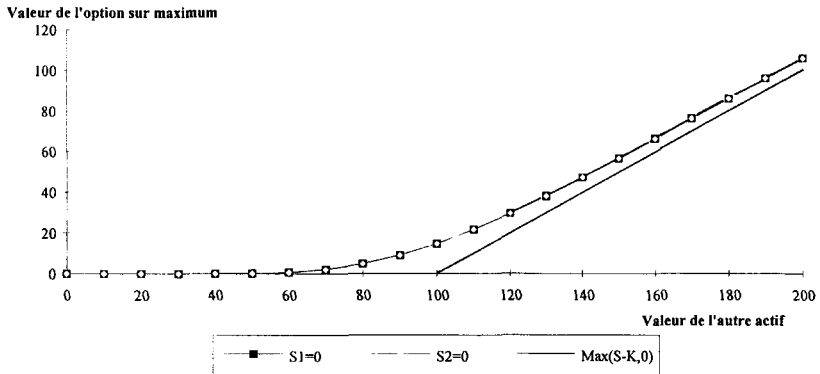


figure 6. Plans de la valeur de l'option sur maximum de deux actifs

Pour une valeur de l'un des actifs nulle, la valeur de l'option donnée par le modèle ne s'écarte que très légèrement de celle fournie par le modèle de CRR. Ainsi, par exemple, pour $S_2=0$ et $\rho_{S_1}=-0.6$ ¹³ la valeur d'une option à parité sur S_1 dépasse de 3% seulement celle fournie par le modèle de CRR.

En revanche, dès lors que la valeur de l'actif 2 n'est plus nulle, la valeur de l'option sur maximum est supérieure à celle d'une option sur un seul actif, comme le révèle la figure 7.

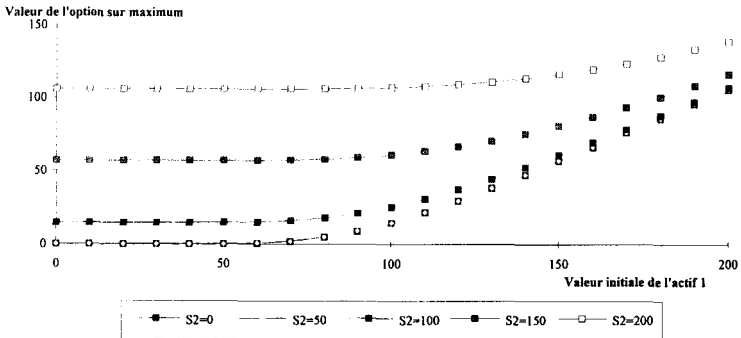


figure 7. Valeur de l'option sur maximum pour différentes valeurs de l'actif 2
Les paramètres utilisés sont les mêmes que pour la figure 5.

A présent, la valeur de l'option sur maximum, avec $S2=0$, est comparée à celle obtenue en choisissant $S1=S2$. Nous mesurons ainsi l'importance de l'introduction d'un deuxième actif dont les caractéristiques sont quasiment identiques à celles du premier actif sous-jacent.

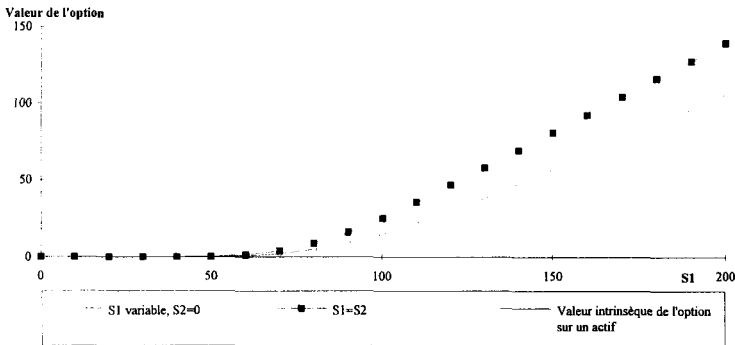


Figure 8. Valeur de l'option sur maximum pour différentes valeurs de l'actif 2

La valeur de l'option sur maximum n'est pas, bien sûr, le double de celle sur un seul actif, mais l'introduction d'un deuxième actif augmente considérablement les possibilités de gain à l'échéance. Ceci se traduit par une valeur de l'option sur maximum sensiblement supérieure à celle de l'option sur un actif. Pour $S1=S2=100$, la valeur de l'option sur maximum est égale à 25.13, alors que celle d'une option sur un seul actif n'est que de 14.63, soit près de 72% de plus.

Naturellement, le modèle permet d'évaluer tout aussi bien des options de vente que des options d'achat, des options sur le minimum de deux actifs que des options sur le maximum. Si les actifs sous-jacents distribuent des dividendes, les procédures habituelles de la méthode binomiale peuvent être appliquées. De même, l'exercice anticipé des options américaines peut être envisagé.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

L'approche développée dans cet article permet de valoriser de nombreux actifs contingents. Son caractère discret lui confère une grande souplesse d'adaptation. La procédure d'estimation des paramètres souligne la réelle opérationnalité du modèle.

De futurs développements doivent permettre d'intégrer un processus d'évolution des taux avec force de rappel sur les taux, comme celui de Hull et White [1990].

Par ailleurs, ce modèle permet le calcul d'une duration effective. Celle-ci reflète la sensibilité du prix d'un actif comportant un risque de défaut à une variation de la gamme des taux sans risque de défaut. Avec la gestion de bilan et du risque de taux d'intérêt, un vaste champ d'application s'offre donc au modèle. Ainsi, la valorisation d'une obligation du secteur privé, d'un prêt immobilier et le calcul de leurs durations effectives ont été réalisées. Les conclusions montrent notamment que la duration de Macaulay surestime le risque de taux d'intérêt en gestion de bilan.

BIBLIOGRAPHIE SELECTIVE

- AUGROS J.C.**, *Les options sur taux d'intérêt : dynamique des taux et évaluation*, Ed. Economica, Paris, 1989.
- AUGROS J.C. et GAY P.**, « Modèle d'évaluation à taux d'intérêt stochastiques d'une option sur contrat à terme obligataire : application à la mesure des paramètres du modèle binomial », *Conférence Internationale de l'AFFI*, 28, 29 et 30 juin 1989.
- BLACK F., SCHOLLES M.**, « The Pricing of Options and Corporates Liabilities », *Journal of Political Economy*, Vol. 81, 1973, pp 637-654.
- BONNASSIEUX M., BRUNEL V.**, « Un modèle de Ho & Lee généralisé », *Colloque AFIR Rome*, 1993, pp 57-74.
- COX J.C., ROSS S.A., RUBINSTEIN M.**, « Option Pricing a Simplified Approach », *Journal of Financials Economics*, Vol. 7, 1979, pp 229-263.
- HO T.S.Y.**, *Strategic Fixed-Income Investment*, Dow Jones - Irwin Homewood, Illinois, 1990.
- HO T.S.Y., LEE S.B.**, « Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims », *Journal of Finance*, Vol. 41, 1986, pp 1011-1029.
- HULL J., WHITE A.**, « Pricing Interest Rate Derivative Securities », *Review of Financial Studies*, 3, 4, 1990, pp 573-592.
- KISHIMOTO N.**, « Pricing Contingent Claims under Interest Rate and Asset Price Risk », *Journal of Finance*, Vol. 44, N°3, 1989, pp 571-589.
- MACAULAY F.**, « Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates. Bond Yields and Stock Prices in the US Since 1856 » *NBER*, New York; 1938.
- QUERUEL M.**, « L'analyse du risque de taux d'intérêt dans un établissement bancaire », Thèse de Doctorat, Université Lyon I, Décembre 1996.
- STULZ R.M.**, « Options on the Minimum or the Maximum of two Risky Assets », *Journal of Financial Economics*, Vol. 10, 1982, pp 161-185.

¹ En prenant $\delta(k)=\delta^k$, on retrouve le modèle de Ho et Lee.

La fonction h est une fonction de perturbation à la hausse ; elle doit donc être supérieure à 1 quels que soient n et τ . Ceci implique que la fonction $\delta(k)$ est une fonction décroissante. Ceci n'a pas été pris en compte par Bonnassieux et Brunel. Nous pensons néanmoins que cette hypothèse est essentielle. Sous des hypothèses supplémentaires, elle permet de plus, comme précisé *infra*, une cohérence entre la volatilité des taux futurs et celle des taux aujourd'hui.

² Cette formule diffère de celle produite par Bonnassieux et Brunel, dont l'équation ne permet pas, contrairement à ce qu'ils affirment, de voir le modèle de Ho et Lee comme un cas particulier.

³ Nous avons repris les termes utilisés par Kishimoto : une « hausse de la structure par terme » correspond à une hausse de la fonction d'actualisation et donc à une baisse des taux d'intérêt !

- ⁴ Bien que la seconde sous-période soit considérée de longueur « petite », le terme \bar{u} représente la hausse de la composante spécifique de l'actif sur la totalité de la période et non pas sur la seconde sous-période. Ce découpage de la période en deux sous-périodes de longueur différente est une astuce permettant de séparer la composante dépendant des taux, de la composante spécifique de l'actif.
- ⁵ Pour une méthodologie d'estimation des paramètres du modèle de Ho et Lee, voir l'article de AUGROS J.C. et GAY P., « Modèle d'évaluation à taux d'intérêt stochastiques d'une option sur contrat à terme obligataire: application à la mesure des paramètres du modèle binomial », Conférence Internationale de l'AFFI, Paris, 28, 29 et 30 juin 1989.
- ⁶ Sous cette hypothèse, toutes les obligations rapportent le taux sans risque au cours d'une période, et ce quelle que soit leur maturité. La probabilité réelle p_1 de hausse des facteurs d'actualisation est alors égale à π . La volatilité actuelle annualisée du taux d'intérêt de maturité k devient alors: $\sigma_{\pi}(k) = -n_0^{3/2} \sqrt{\pi(1-\pi)} \ln(\delta(k)^{1/k})$, où n_0 est le nombre de périodes par an. En inversant cette formule on obtient directement la formule 29.
- ⁷ Si on choisit une volatilité identique pour toutes les maturités, comme le suppose Ho et Lee, on aboutit à $\delta(k)=\delta^k$. En remplaçant $\delta(k)$ par δ^k dans la formule 4 définissant h , on aboutit à la formule proposée par Ho et Lee. Bonnassieux et Brunel donnent pour l'estimation de $\delta(k)$ une formule similaire à la formule 29, à la différence près que le terme k n'apparaît pas au numérateur; on a alors $\delta(k)=\delta$. En remplaçant dans la formule définissant h , on aboutit à $h(n,\tau)=1$. Ce qui ne correspond pas à la formule proposée par Ho et Lee.
- ⁸ Cette condition est toujours vérifiée dans le modèle de Ho et Lee, puisque la volatilité est constante quelle que soit la maturité.
- ⁹ En l'absence de corrélation, on obtient $\sigma_2 = \sigma_m \sqrt{\frac{T}{n}}$ et on retrouve la formule de \bar{u} , proposée par Cox-Ross-Rubinstein, permettant d'assurer la convergence de la volatilité du modèle vers la volatilité utilisée par Black et Scholes.
- ¹⁰ Cette fonction est une fonction monotone, ce qui assure qu'il est équivalent de se donner $u^{(0)}$ ou $u^{(N-1)}$ pour définir la même suite $u^{(i)}$.
- ¹¹ L'instant $n+1/2$ n'est pas situé à une demi période de l'instant n . Il s'agit juste d'une convention d'écriture permettant de classer les instants dans l'ordre d'apparition, à savoir : $n, n+1/2, n+3/4, n$. La première sous-période $[n, n+1/2]$ est très longue par rapport aux deux suivantes (voir H1).
- ¹² Par hausse du prix de l'actif, nous entendons hausse de la composante spécifique du prix de l'actif.
- ¹³ Les probabilités q_1 et q_2 sont analogues à la probabilité binomiale implicite ou probabilité risque-neutre introduite par Cox-Ross-Rubinstein, en se rappelant que le taux d'intérêt est nul sur les deux dernières sous-périodes.
- ¹⁴ Pour les maturités intermédiaires, les taux d'intérêt et les volatilités ont été interpolées, de manière linéaire, entre la valeur correspondant au court terme et celle de la maturité 10 ans. Le nombre de pas de la discrétisation est de 120 par an. Cette structure de volatilité est compatible avec la condition 30.
- ¹⁵ Pour cet exemple numérique ($S_2=0$), la valorisation d'une option sur maximum de deux actifs équivalait alors à la valorisation d'une option sur un seul actif corrélé avec les taux.

ANNEXE**Proposition 1**

Démonstration :

On constitue, à l'instant (n,i) , un portefeuille d'arbitrage composé d'un zéro-coupon de maturité τ et d'un nombre H d'actifs risqués. La valeur initiale de ce portefeuille est donc :

$$P_i^n(\tau) + HS \quad 47.$$

A la fin de la première sous-période, ce portefeuille peut prendre, deux valeurs :

$$\frac{P_i^n(\tau)}{P_i^n} h(n, \tau - 1) + H \frac{u_i^n}{P_i^n} S \text{ en cas de baisse des taux} \quad 48.$$

$$\frac{P_i^n(\tau)}{P_i^n} h^*(n, \tau - 1) + H \frac{d_i^n}{P_i^n} S \text{ en cas de hausse des taux}$$

Il est possible de choisir H de telle façon que la valeur à la fin de la première sous-période de ce portefeuille soit unique. On pose :

$$H = P_i^n(\tau) \frac{h^*(n, \tau - 1) - h(n, \tau - 1)}{u_i^n S - d_i^n S} \quad 49.$$

Puisque la valeur finale de ce portefeuille est connue, et qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage, il doit donc rapporter le taux sans risque sur la période. Son rendement est alors égale à P_i^n . On obtient :

$$\frac{P_i^n(\tau)}{P_i^n} h(n, \tau - 1) + H \frac{u_i^n}{P_i^n} S = \frac{P_i^n(\tau) + HS}{P_i^n} \quad 50.$$

Après simplification, on en déduit :

$$H = P_i^n(\tau) \frac{1 - h(n, \tau - 1)}{u_i^n S - S} \quad 51.$$

En égalisant les deux valeurs de H (équations 49 et 51), on aboutit à :

$$\frac{1 - h(n, \tau - 1)}{h^*(n, \tau - 1) - h(n, \tau - 1)} = \frac{u_i^n - 1}{u_i^n - d_i^n} \quad 52.$$

En utilisant l'équation 3, il vient :

$$\pi u_i^n + (1 - \pi) d_i^n = 1 \quad 53.$$

CQFD

Equation 14

Démonstration :

Puisque \bar{u} et \bar{d} , les facteurs de hausse et de baisse de la composante spécifique de l'actif, sont constants au cours du temps et que $u = \sqrt{d}$, l'hypothèse 7 est satisfaite pour la composante spécifique de l'actif. L'indépendance du chemin suivi est alors équivalente à la condition suivante : une hausse de la composante dépendant des taux suivie d'une baisse est égale à une baisse suivie d'une hausse. Ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\frac{u_i^n d_{i+1}^{n+1}}{P_i^n P_{i+1}^{n+1}} S = \frac{u_i^{n+1} d_i^n}{P_i^n P_i^{n+1}} S \quad 54.$$

Après simplification, on obtient :

$$u_i^n d_{i+1}^{n+1} = u_i^{n+1} d_i^n \frac{P_{i+1}^{n+1}}{P_i^{n+1}} \quad 55.$$

En utilisant la définition de P_i^n (équation 8), il vient :

$$\frac{P_{i+1}^{n+1}}{P_i^{n+1}} = \frac{\delta(n)}{\delta(n+1)} \quad 56.$$

En remplaçant dans 55, on aboutit à :

$$u_i^n d_{i+1}^{n+1} = u_i^{n+1} d_i^n \frac{\delta(n)}{\delta(n+1)} \quad 57.$$

La relation 53 donne la relation entre u_i^n et d_i^n , et permet d'écrire :

$$u_i^n \left(\frac{1 - \pi u_{i+1}^{n+1}}{1 - \pi} \right) = u_i^{n+1} \left(\frac{1 - \pi u_i^n}{1 - \pi} \right) \frac{\delta(n)}{\delta(n+1)} \quad 58.$$

CQFD

Proposition 2

Démonstration :

Les paramètres $\pi, \delta(1), \dots, \delta(n+\tau)$ définissent un processus unique d'évolution de la structure par terme des taux d'intérêt. Il suffit donc de montrer que \bar{u}, \bar{d} , et U définissent un unique processus d'évolution du prix de l'actif.

L'équation 58 donne :

$$u_i^n = \frac{u_i^{n+1}}{\frac{\delta(n+1)}{\delta(n)} + \pi u_i^{n+1} - \pi \frac{\delta(n+1)}{\delta(n)} u_{i+1}^{n+1}} \quad 59.$$

La donnée de U permet de déduire, à partir de l'équation précédente, une unique valeur pour chacun des u_i^{N-2} pour $i=0, \dots, N-2$. Le même raisonnement appliqué de proche en proche permet de définir u_i^n pour tout (n, i) .

La donnée des paramètres $\pi, \delta(1), \dots, \delta(n+\tau), U$ définit donc entièrement la composante dépendante des taux de l'actif. De plus \bar{u}, \bar{d} suffisent à déterminer la composante spécifique de l'actif. On en déduit donc que le processus d'évolution de l'actif est entièrement déterminé par les paramètres $\pi, \delta(1), \dots, \delta(n+\tau), \bar{u}, \bar{d}$, et U, et que ce processus est unique.

CQFD

Proposition 3

Démonstration :

L'indépendance du chemin suivi (Hypothèse 7) permet de choisir un chemin pour calculer le prix de S à l'instant n pour l'état (i, j) . On choisit i hausses de la composante dépendant des taux pendant les i premières périodes, et j hausses de la composante spécifique pendant les j premières périodes. La valeur de S à l'instant (n, i, j) s'écrit donc :

$$S_{i,j}^n = \frac{\bar{u}^{-j} \bar{d}^{n-j} \prod_{k=0}^{i-1} u^{(k)} \prod_{k=i}^{n-1} \frac{1 - \pi u^{(k)}}{1 - \pi}}{\prod_{k=0}^i P_k^k \prod_{k=i+1}^{n-1} P_i^k} \quad 60.$$

Le terme $\bar{u}^{-j} \bar{d}^{n-j}$ donne directement F_2 ; il reste à montrer que :

$$\frac{\prod_{k=0}^{i-1} u^{(k)} \prod_{k=i}^{n-1} \frac{1 - \pi u^{(k)}}{1 - \pi}}{\prod_{k=0}^i P_k^k \prod_{k=i+1}^{n-1} P_i^k} = F_1(n, i; \pi, \Delta, \gamma) \quad 61.$$

En calculant le produit des facteurs d'actualisation des n périodes et en utilisant la définition de P_i^k (équation 8), il vient :

$$\prod_{k=0}^i P_k^k = \frac{P(i+1)}{P(0)} h(0, i) \dots h(i-1, 1) \quad 62.$$

$$\prod_{k=i+1}^{n-1} P_i^k = \frac{P(n)}{P(i+1)} \frac{h(0, n-1) \dots h(n-2, 1)}{h(0, i) \dots h(i-1, 1)} \frac{\delta(n-1)^{n-1-i}}{\delta(i) \dots \delta(n-2)}$$

En remplaçant dans l'équation 61, on obtient directement le résultat.
CQFD

Equation 20

Démonstration

Soit, à l'instant (n, i, j) , un portefeuille composé d'une obligation sans coupon, notée $P_i^n(\tau)$, et d'un nombre H d'actifs contingents. La valeur initiale du portefeuille est donc donnée par $P_i^n(\tau) + HC(n, i, j)$.

A la fin de la première sous-période, le portefeuille peut prendre deux valeurs :

$$P_i^{n+1}(\tau-1) + HC(n + \frac{1}{2}, i, j) \text{ en cas de hausse des taux} \quad 63.$$

$$P_{i+1}^{n+1}(\tau-1) + HC(n + \frac{1}{2}, i+1, j) \text{ en cas de baisse des taux}$$

H est choisi de telle façon que la valeur finale de ce portefeuille soit unique. En utilisant les équations 1 et 2, on en déduit :

$$H = \frac{P_i^n(\tau)}{P_i^n} \frac{h^*(n, \tau-1) - h(n, \tau-1)}{C(n + \frac{1}{2}, i+1, j) - C(n + \frac{1}{2}, i, j)} \quad 64.$$

L'absence d'opportunité d'arbitrage implique que ce portefeuille sans risque doit rapporter le taux sans risque sur la période. Il vient :

$$\frac{P_i^n(\tau) + HC(n, i, j)}{P_i^n} = \frac{P_i^n(\tau)}{P_i^n} h(n, \tau-1) + HC(n + \frac{1}{2}, i+1, j)$$

On en déduit la valeur de H suivante :

$$H = \frac{P_i^n(\tau)}{P_i^n} \frac{h(n, \tau-1) - 1}{C(n, i, j) - P_i^n C(n + \frac{1}{2}, i+1, j)} \quad 65.$$

En égalisant les deux valeurs de H (équations 64 et 65), on obtient :

$$\frac{h(n, \tau-1) - 1}{h^*(n, \tau-1) - h(n, \tau-1)} = \frac{1}{P_i^n} \frac{C(n, i, j) - P_i^n C(n + \frac{1}{2}, i+1, j)}{C(n + \frac{1}{2}, i+1, j) - C(n + \frac{1}{2}, i, j)} \quad 66.$$

Or d'après la relation 3, on a :

$$\frac{h(n, \tau-1) - 1}{h^*(n, \tau-1) - h(n, \tau-1)} = \pi - 1 \quad 67.$$

En remplaçant dans 66, on obtient :

$$(\pi - 1)[C(n + \frac{1}{2}, i+1, j) - C(n + \frac{1}{2}, i, j)] = \frac{C(n, i, j)}{P_i^n} - C(n + \frac{1}{2}, i+1, j)$$

Après simplification, il vient :

$$C(n, i, j) = P_i^n [\pi C(n + \frac{1}{2}, i + 1, j) + (1 - \pi)C(n + \frac{1}{2}, i, j)] \quad 68.$$

En appliquant à la deuxième sous-période la relation récurrente établie par Cox-Ross-Rubinstein, et en la combinant à l'équation précédente on obtient l'équation 20.

CQFD

Proposition 4

Démonstration :

Cette démonstration se fait par récurrence.

Nous allons donc démontrer la relation pour $n=1$ quel que soit le couple (i, j)

1^{er} étape : $n=1$

La proposition 4 donne :

$$A(1, i, j) = P(1)g'(1, 1 - i, i) \times \pi^i (1 - \pi)^{1-i} q^j (1 - q)^{1-j} \quad 69.$$

On en déduit :

$$A(1, 1, 1) = P(1)g'(1, 0, 1) \times \pi q = P(1)\pi q \quad 70.$$

$$A(1, 1, 0) = P(1)g'(1, 0, 1) \times \pi (1 - q) = P(1)\pi (1 - q)$$

$$A(1, 0, 1) = P(1)g'(1, 1, 0) \times (1 - \pi)q = P(1)(1 - \pi)q$$

$$A(1, 0, 0) = P(1)g'(1, 1, 0) \times (1 - \pi)(1 - q) = P(1)(1 - \pi)(1 - q)$$

La relation risque neutre 20 donne directement ce résultat puisque l'actif d'Arrow-Debreu ne prend la valeur 1 que si l'état i, j se produit.

La relation est donc vraie pour $n=1$.

2^{ème} étape : n quelconque

La relation est supposée vraie à l'étape $(n-1)$. Il faut montrer qu'elle est vraie à l'étape n .

Il existe quatre noeuds pour lesquels la valeur de l'actif d'Arrow-Debreu n'est pas nulle en $n-1$, à savoir :

$(n-1, i-1, j-1)$, $(n-1, i-1, j)$, $(n-1, i, j-1)$, $(n-1, i, j)$.

La relation risque neutre 20 donne la valeur de l'actif d'Arrow-Debreu en chacun de ces noeuds. On obtient :

$$V(n-1, i-1, j-1) = P_{i-1}^{n-1} \pi q \quad 71.$$

$$V(n-1, i-1, j) = P_{i-1}^{n-1} \pi (1 - q)$$

$$V(n-1, i, j-1) = P_i^{n-1} (1 - \pi) q$$

$$V(n-1, i, j) = P_i^{n-1} (1 - \pi)(1 - q)$$

La relation étant supposée vraie à l'instant $n-1$, on en déduit la valeur de l'actif à l'instant 0 avec la formule suivante :

$$A(n, i, j) = V(n-1, i-1, j-1)A(n-1, i-1, j-1) \quad 72.$$

$$+ V(n-1, i-1, j)A(n-1, i-1, j)$$

$$+ V(n-1, i, j-1)A(n-1, i, j-1)$$

$$+ V(n-1, i, j)A(n-1, i, j)$$

En remplaçant A et V par leurs expressions (formules 24 et 71), il vient :

$$\begin{aligned}
A(n, i, j) &= P_{i-1}^{n-1} \pi q P(n-1) \frac{g'(n-1, n-i, i-1)}{C_{n-1}^{i-1} / [h(0, n-2) \dots h(n-3, 1)]} C_{n-1}^{i-1} C_{n-1}^{j-1} \pi^{i-1} (1-\pi)^{n-i} q^{i-1} (1-q)^{n-j} & 73. \\
&+ P_{i-1}^{n-1} \pi (1-q) P(n-1) \frac{g'(n-1, n-i, i-1)}{C_{n-1}^{i-1} / [h(0, n-2) \dots h(n-3, 1)]} C_{n-1}^{i-1} C_{n-1}^j \pi^{i-1} (1-\pi)^{n-i} q^j (1-q)^{n-1-j} \\
&+ P_i^{n-1} (1-\pi) q P(n-1) \frac{g'(n-1, n-1-i, i)}{C_{n-1}^i / [h(0, n-2) \dots h(n-3, 1)]} C_{n-1}^i C_{n-1}^{j-1} \pi^i (1-\pi)^{n-1-i} q^{j-1} (1-q)^{n-j} \\
&+ P_i^{n-1} (1-\pi) (1-q) P(n-1) \frac{g'(n-1, n-1-i, i)}{C_{n-1}^i / [h(0, n-2) \dots h(n-3, 1)]} C_{n-1}^i C_{n-1}^j \pi^i (1-\pi)^{n-1-i} q^j (1-q)^{n-1-j}
\end{aligned}$$

En remplaçant P_{i-1}^{n-1} et P_i^{n-1} par leur définition (équation 8), et en utilisant la relation $C_{n-1}^j + C_{n-1}^{j-1} = C_n^j$, on obtient après simplification :

$$\begin{aligned}
A(n, i, j) &= P(n) \frac{g'(n-1, n-i, i-1)}{C_{n-1}^{i-1} / [h(0, n-1) \dots h(n-2, 1)]} \left[\frac{\delta(n-1)}{\delta(n-2)} \right]^{n-i} C_{n-1}^{i-1} C_n^j \pi^i (1-\pi)^{n-i} q^j (1-q)^{n-j} & 74. \\
&+ P(n) \frac{g'(n-1, n-1-i, i)}{C_{n-1}^i / [h(0, n-1) \dots h(n-2, 1)]} \left[\frac{\delta(n-1)}{\delta(n-2)} \right]^{n-i-1} C_{n-1}^i C_n^j \pi^i (1-\pi)^{n-i} q^j (1-q)^{n-j} \\
&= P(n) \frac{C_n^i C_n^j \pi^i (1-\pi)^{n-i} q^j (1-q)^{n-j}}{C_n^i / [h(0, n-1) \dots h(n-2, 1)]} \\
&\times \left(\left[\frac{\delta(n-1)}{\delta(n-2)} \right]^{n-i} g'(n-1, n-i, i-1) + \left[\frac{\delta(n-1)}{\delta(n-2)} \right]^{n-i-1} g'(n-1, n-1-i, i) \right)
\end{aligned}$$

En utilisant la relation 27 et en remplaçant dans l'équation précédente, on obtient la formule 24. La proposition 4 est donc vraie au rang n. La proposition étant vraie pour n=1, elle est vraie quel que soit n.
CQFD.

Equation 39

Démonstration

Pour établir cette relation, plusieurs portefeuilles d'arbitrage sur chacune des sous-périodes sont successivement constitués.

Sur la dernière sous-période $[n+3/4, n+1]$, l'incertitude porte sur l'actif S_2 et l'actif contingent. On peut donc choisir un portefeuille composé d'un actif S_2 et d'un nombre H d'actifs contingents C. Au début de cette sous-période, il existe quatre valeurs possibles de C suivant l'état de la nature. Les 4 états suivants sont distingués :

$$(n + \frac{3}{4}, i+1, j_1, j_2), (n + \frac{3}{4}, i+1, j_1 + 1, j_2), (n + \frac{3}{4}, i, j_1, j_2), (n + \frac{3}{4}, i, j_1 + 1, j_2)$$

Soit l'état $(n + \frac{3}{4}, i+1, j_1, j_2)$.

Le premier portefeuille a donc la valeur initiale suivante :

$$S_2 + HC(n + \frac{3}{4}, i+1, j_1, j_2) \quad 75.$$

En n+1, ce portefeuille peut prendre deux valeurs :

$$\bar{u}_2 S_2 + HC(n+1, i+1, j_1, j_2 + 1) \quad 76.$$

$$\bar{d}_2 S_2 + HC(n+1, i+1, j_1, j_2)$$

Il est possible de choisir H de telle sorte que la valeur en n+1 du portefeuille soit unique. On obtient alors :

$$H = \frac{(\bar{d}_2 - \bar{u}_2)S_2}{C(n+1, i+1, j_1, j_2+1) - C(n+1, i+1, j_1, j_2)} \quad 77.$$

L'absence d'opportunité d'arbitrage entre ce portefeuille et un placement au taux sans risque implique un rendement de ce portefeuille égal au taux sans risque sur la sous-période. Le taux d'intérêt étant nul, on en déduit la relation suivante :

$$S_2 + HC(n+\frac{3}{4}, i+1, j_1, j_2) = \bar{u}_2 S_2 + HC(n+1, i+1, j_1, j_2+1) \quad 78.$$

Ce qui implique :

$$H = \frac{(\bar{u}_2 - 1)S_2}{C(n+\frac{3}{4}, i+1, j_1, j_2) - C(n+1, i+1, j_1, j_2+1)} \quad 79.$$

En égalisant les deux valeurs de H (équations 77 et 79), on obtient :

$$C(n+\frac{3}{4}, i+1, j_1, j_2) = q_2 C(n+1, i+1, j_1, j_2+1) + (1-q_2)C(n+1, i+1, j_1, j_2) \quad 80.$$

avec

$$q_2 = \frac{1 - \bar{d}_2}{\bar{u}_2 - \bar{d}_2} \quad 81.$$

Un raisonnement strictement identique permet d'établir les relations suivantes :

$$C(n+\frac{3}{4}, i+1, j_1+1, j_2) = q_2 C(n+1, i+1, j_1+1, j_2+1) + (1-q_2)C(n+1, i+1, j_1+1, j_2) \quad 82.$$

$$C(n+\frac{3}{4}, i, j_1, j_2) = q_2 C(n+1, i, j_1, j_2+1) + (1-q_2)C(n+1, i, j_1, j_2) \quad 83.$$

$$C(n+\frac{3}{4}, i, j_1+1, j_2) = q_2 C(n+1, i, j_1+1, j_2+1) + (1-q_2)C(n+1, i, j_1+1, j_2) \quad 84.$$

Sur la deuxième sous-période, l'incertitude porte sur la composante spécifique de l'actif S_1 . En $n+\frac{1}{2}$, il existe deux valeurs possibles de l'actif contingent, il convient donc de constituer deux portefeuilles d'arbitrage.

En $(n+\frac{1}{2}, i+1, j_1, j_2)$, on constitue un portefeuille composé de l'actif risqué S_1 et d'un nombre H d'actifs contingents; sa valeur initiale est donc :

$$S_1 + HC(n+\frac{1}{2}, i+1, j_1, j_2) \quad 85.$$

Un raisonnement identique à celui développé plus haut permet d'obtenir la relation :

$$C(n+\frac{1}{2}, i+1, j_1, j_2) = q_1 C(n+\frac{3}{4}, i+1, j_1+1, j_2) + (1-q_1)C(n+\frac{3}{4}, i+1, j_1, j_2) \quad 86.$$

avec

$$q_1 = \frac{1 - \bar{d}_1}{\bar{u}_1 - \bar{d}_1} \quad 87.$$

L'établissement de cette formule ne fait pas intervenir l'état i de la structure par terme. On en déduit alors, pour le noeud $(n+\frac{1}{2}, i, j_1, j_2)$, la formule suivante :

$$C(n+\frac{1}{2}, i, j_1, j_2) = q_1 C(n+\frac{3}{4}, i, j_1+1, j_2) + (1-q_1)C(n+\frac{3}{4}, i, j_1, j_2) \quad 88.$$

La combinaison des équations 80, 82 et 86 conduit à :

$$\begin{aligned} C(n+\frac{1}{2}, i+1, j_1, j_2) &= q_1 q_2 C(n+1, i+1, j_1+1, j_2+1) \\ &+ q_1(1-q_2)C(n+1, i+1, j_1+1, j_2) \\ &+ (1-q_1)q_2 C(n+1, i+1, j_1, j_2+1) \\ &+ (1-q_1)(1-q_2)C(n+1, i+1, j_1, j_2) \end{aligned} \quad 89.$$

De même la combinaison des équations 83, 84 et 88 mène à :

$$\begin{aligned}
 C(n + \frac{1}{2}, i, j_1, j_2) &= q_1 q_2 C(n+1, i, j_1 + 1, j_2 + 1) & 90. \\
 &+ q_1 (1 - q_2) C(n+1, i, j_1 + 1, j_2) \\
 &+ (1 - q_1) q_2 C(n+1, i, j_1, j_2 + 1) \\
 &+ (1 - q_1)(1 - q_2) C(n+1, i, j_1, j_2)
 \end{aligned}$$

La constitution d'un portefeuille d'arbitrage composé d'une obligation sans risque de défaut et de l'actif contingent permet d'établir la relation :

$$C(n, i, j) = P_i^n [\pi C(n + \frac{1}{2}, i + 1, j_1, j_2) + (1 - \pi) C(n + \frac{1}{2}, i, j_1, j_2)] \quad 91.$$

Il suffit de se reporter à la démonstration de la formule 68.

La combinaison des équations 89, 90, 91 donne la formule 39.

CQFD

Proposition 6

Démonstration

Cette démonstration se fait par récurrence sur n.

n=1

∀i, j₁, j₂, la proposition 6 donne :

$$A(1, i, j_1, j_2) = P(1) g^i (1, 1 - i, i) \pi^i (1 - \pi)^{1-i} q_1^{j_1} (1 - q_1)^{1-j_1} q_2^{j_2} (1 - q_2)^{1-j_2} \quad 92.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 A(1, 1, 1, 1) &= P(1) \pi q_1 q_2 & 93. \\
 A(1, 1, 1, 0) &= P(1) \pi q_1 (1 - q_2) \\
 A(1, 1, 0, 1) &= P(1) \pi (1 - q_1) q_2 \\
 A(1, 1, 0, 0) &= P(1) \pi (1 - q_1)(1 - q_2) \\
 A(1, 0, 1, 1) &= P(1) (1 - \pi) q_1 q_2 \\
 A(1, 0, 1, 0) &= P(1) (1 - \pi) q_1 (1 - q_2) \\
 A(1, 0, 0, 1) &= P(1) (1 - \pi) (1 - q_1) q_2 \\
 A(1, 0, 0, 0) &= P(1) (1 - \pi) (1 - q_1)(1 - q_2)
 \end{aligned}$$

La relation risque-neutre 39 donne directement ce résultat. La proposition 6 est donc vraie pour n=1.

n quelconque

En supposant que la proposition est vraie à l'étape n-1, il est possible de montrer qu'elle l'est également à l'étape n.

8 noeuds permettent à l'étape n-1 d'arriver au noeud (n, i, j),

$$(n-1, i-1, j_1-1, j_2-1), (n-1, i-1, j_1-1, j_2), (n-1, i-1, j_1, j_2-1), (n-1, i-1, j_1, j_2),$$

$$(n-1, i, j_1-1, j_2-1), (n-1, i, j_1-1, j_2), (n-1, i, j_1, j_2-1), (n-1, i-1, j_1, j_2).$$

La valeur de l'actif d'Arrow-Debreu en chacun de ces noeuds est donnée par la relation risque-neutre 39. On obtient :

$$\begin{aligned}
V(n-1, i-1, j_1-1, j_2-1) &= P_{i-1}^{n-1} \pi q_1 q_2 & 94. \\
V(n-1, i-1, j_1, j_2-1) &= P_{i-1}^{n-1} \pi (1-q_1) q_2 \\
V(n-1, i-1, j_1-1, j_2) &= P_{i-1}^{n-1} \pi q_1 (1-q_2) \\
V(n-1, i-1, j_1, j_2) &= P_{i-1}^{n-1} \pi (1-q_1)(1-q_2) \\
V(n-1, i, j_1-1, j_2-1) &= P_i^{n-1} (1-\pi) q_1 q_2 \\
V(n-1, i, j_1, j_2-1) &= P_i^{n-1} (1-\pi) (1-q_1) q_2 \\
V(n-1, i, j_1-1, j_2) &= P_i^{n-1} (1-\pi) q_1 (1-q_2) \\
V(n-1, i, j_1, j_2) &= P_i^{n-1} (1-\pi) (1-q_1)(1-q_2)
\end{aligned}$$

La valeur initiale de l'actif d'Arrow-Debreu est donnée par :

$$\begin{aligned}
A(n, i, j_1, j_2) &= V(n-1, i-1, j_1-1, j_2-1) A(n-1, i-1, j_1-1, j_2-1) & 95. \\
&+ V(n-1, i-1, j_1, j_2-1) A(n-1, i-1, j_1, j_2-1) \\
&+ V(n-1, i-1, j_1-1, j_2) A(n-1, i-1, j_1-1, j_2) \\
&+ V(n-1, i-1, j_1, j_2) A(n-1, i-1, j_1, j_2) \\
&+ V(n-1, i, j_1-1, j_2-1) A(n-1, i, j_1-1, j_2-1) \\
&+ V(n-1, i, j_1, j_2-1) A(n-1, i, j_1, j_2-1) \\
&+ V(n-1, i, j_1-1, j_2) A(n-1, i, j_1-1, j_2) \\
&+ V(n-1, i, j_1, j_2) A(n-1, i, j_1, j_2)
\end{aligned}$$

La proposition 6 étant supposée vraie à l'étape n-1, on peut remplacer A et V par leurs expressions.

On obtient :

$$\begin{aligned}
A(n, i, j_1, j_2) &= & 96. \\
&C_{n-1}^{i-1} P_{i-1}^{n-1} P(n-1) H_1(n-1, i-1; \pi, \delta) \times \pi^i (1-\pi)^{n-i} q_1^{j_1} (1-q_1)^{n-j_1} q_2^{j_2} (1-q_2)^{n-j_2} \\
&\times [C_{n-1}^{j_1} C_{n-1}^{j_2} + C_{n-1}^{j_1-1} C_{n-1}^{j_2} + C_{n-1}^{j_1} C_{n-1}^{j_2-1} + C_{n-1}^{j_1-1} C_{n-1}^{j_2-1}] \\
&+ C_{n-1}^i P_i^{n-1} P(n-1) H_1(n-1, i; \pi, \delta) \times \pi^i (1-\pi)^{n-i} q_1^{j_1} (1-q_1)^{n-j_1} q_2^{j_2} (1-q_2)^{n-j_2} \\
&\times [C_{n-1}^{j_1} C_{n-1}^{j_2} + C_{n-1}^{j_1-1} C_{n-1}^{j_2} + C_{n-1}^{j_1} C_{n-1}^{j_2-1} + C_{n-1}^{j_1-1} C_{n-1}^{j_2-1}]
\end{aligned}$$

En simplifiant les termes entre crochets, l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}
A(n, i, j_1, j_2) &= & 97. \\
&C_{n-1}^{i-1} P_{i-1}^{n-1} P(n-1) H_1(n-1, i-1; \pi, \delta) \times \pi^i (1-\pi)^{n-i} C_n^{j_1} C_n^{j_2} q_1^{j_1} (1-q_1)^{n-j_1} q_2^{j_2} (1-q_2)^{n-j_2} \\
&+ C_{n-1}^i P_i^{n-1} P(n-1) H_1(n-1, i; \pi, \delta) \times \pi^i (1-\pi)^{n-i} C_n^{j_1} C_n^{j_2} q_1^{j_1} (1-q_1)^{n-j_1} q_2^{j_2} (1-q_2)^{n-j_2}
\end{aligned}$$

En remplaçant H1, P_{i-1}^{n-1} et P_i^{n-1} par leurs expressions, il vient :

98.

$$\begin{aligned}
A(n, i, j_1, j_2) &= \pi^i (1-\pi)^{n-i} C_n^{j_1} C_n^{j_2} q_1^{j_1} (1-q_1)^{n-j_1} q_2^{j_2} (1-q_2)^{n-j_2} P(n-1) \\
&\times [C_{n-1}^{i-1} \frac{P(n)}{P(n-1)} \frac{h(0, n-1) \dots h(n-2, 1)}{h(0, n-2) \dots h(n-3, 1)} \left[\frac{\delta(n-1)}{\delta(n-2)} \right]^{n-i} \frac{g'(n-1, n-i, i-1) h(0, n-2) \dots h(n-3, 1)}{C_{n-1}^{i-1}} \\
&+ C_{n-1}^i \frac{P(n)}{P(n-1)} \frac{h(0, n-1) \dots h(n-2, 1)}{h(0, n-2) \dots h(n-3, 1)} \left[\frac{\delta(n-1)}{\delta(n-2)} \right]^{n-i-1} \frac{g'(n-1, n-i-1, i) h(0, n-2) \dots h(n-3, 1)}{C_{n-1}^i}]
\end{aligned}$$

Après simplification et en utilisant la relation 44, on obtient :

$$\begin{aligned}
A(n, i, j_1, j_2) &= P(n) \pi^i (1-\pi)^{n-i} C_n^i C_n^{j_1} C_n^{j_2} q_1^{j_1} (1-q_1)^{n-j_1} q_2^{j_2} (1-q_2)^{n-j_2} \\
&\times \frac{g'(n, n-i, i) h(0, n-1) \dots h(n-2, 1)}{C_n^i} \quad 99.
\end{aligned}$$

La proposition 6 est donc vraie au rang n .

CQFD.