

Un Modèle d'Evaluation des Obligations à Taux Variable à Partir de la Courbe des Taux Zéro-Coupons des Emprunts d'Etat

Pierre Valentin

Compagnie Parisienne de Réescompte, 4 rue Cité de Londres, 75009 Paris, France

Résumé

Les obligations à taux variable sont généralement évaluées à partir du calcul de leur marge actuarielle, qui consiste à cristalliser leurs coupons futurs et à en comparer le taux actuariel ainsi obtenu à leur taux de référence. Le modèle présenté ici a pour objectif de valoriser une obligation à taux variable en anticipant des valeurs de coupons futurs à partir des informations contenues dans la courbe des taux zéro-coupon des emprunts d'Etat.

Dans une seconde partie, on réplique une obligation à taux variable par un panier d'obligations à taux fixe pour en étudier les possibilités d'arbitrage et on comparera leurs sensibilités respectives par rapport à une déformation de la courbe des taux.

Summary

A Model for Valuing Variable-Rate Bonds from the Zero-Coupon Yield Curve for Government Stock

Variable-rate bonds are generally valued by calculating their actuarial margin, which involves crystallising their future coupons and comparing the actuarial rate obtained with their reference rate. The model presented here aims to value a variable-rate bond by anticipating future coupon values from information contained in the zero-coupon yield curve for government stock.

In the second section a variable-rate bond is replicated by a basket of fixed-rate liabilities to study the possibilities of arbitrage and to compare their respective sensitivity to a deformation of the yield curve.

Evaluation des obligations à taux variable à partir de la courbe des taux zéro coupon des emprunts d'Etat

Les obligations à taux variable sont généralement évaluées par le marché à partir de la notion de marge actuarielle ; celle-ci se définit, à une date donnée, comme la différence entre, d'une part, la valeur observée du taux de référence de l'obligation choisie, et, d'autre part, le taux actuariel de cette obligation, tel qu'il est obtenu quand tous les coupons à venir sont identiques à la valeur observée du taux de référence.

Les marges des obligations à taux de référence *monétaire* sont en général assez stables et proches de zéro ; les écarts constatés s'expliquent essentiellement par des différences notables de signature. Il n'en est pas de même pour les obligations à taux de référence *obligataire*, dont la marge peut fluctuer considérablement, sous l'effet d'une déformation de la courbe des taux : lorsque les taux courts sont très inférieurs aux taux longs, les obligations distribuant un coupon indexé sur les taux longs sont recherchées, la marge devient alors fortement négative. Si la courbe des taux s'aplatit, la marge se rapproche de zéro et peut devenir positive si la courbe s'inverse.

La définition habituelle du calcul de la marge, en cristallisant les coupons à venir, prend à contrepied le principe de l'incertitude attaché aux coupon indexés. Or, nous disposons, avec la structure à terme des taux d'intérêts, d'une possibilité de valorisation des obligations à taux variables. Comment quantifier la relation entre la marge et les paramètres du modèle caractérisant la courbe des taux ? Le lien entre marge d'une obligation à taux variable obligataire (TME ou TMO) et forme de la courbe des taux agit-il de façon claire ? Que se passe-t-il, par exemple, lorsque la courbe des taux n'est inversée qu' en partie sur les échéances les plus proches et qu'elle est croissante sur les échéances plus lointaines ? Existe-t-il une possibilité d'arbitrage entre une combinaison d'obligations à taux fixe et une obligation TMO ou TME ?

Le modèle présenté ici se propose de répondre à ces questions.

A) Construction du modèle

Le principe du modèle est de déduire le prix d'une obligation d'Etat à référence TME à partir des taux actuariels anticipés par la courbe des taux, c'est à dire à partir d'une information sur l'évolution prévue des taux d'intérêts. Les étapes en sont les suivantes :

1) Construction de la courbe de taux zéro-coupon des emprunts d'Etat

2) Calcul des taux zéro-coupon anticipés (à chaque date de fixation du THE. Le THE est défini comme la moyenne, pondérée par les encours, des taux actuariels, sans frais depuis juillet 89, des emprunts d'Etat de plus de 7 ans observés sur le marché secondaire le vendredi). On suppose l'absence de prime de risque.

3) Calcul du prix anticipé (à chaque date de fixation du THE) d'une obligation représentative des emprunts d'Etat à plus de 7 ans (en effet, c'est à partir de ces emprunts que le THE est déterminé).

4) Calcul du taux actuariel correspondant au prix de cette obligation fictive.

5) Calcul des coupons anticipés annuellement par moyenne des taux actuariels anticipés hebdomadairement.

6) Actualisation des coupons et du principal par les taux zéro coupon des emprunts d'Etat ; on obtient ainsi le prix théorique de l'obligation à taux variable considérée.

7) Calcul de la marge théorique

B) Les étapes du modèle

1) Construction de la courbe des taux zéro-coupon des emprunts d'Etat

La courbe des taux est modélisée avec 5 paramètres, suivant le modèle de Vasicek :

$$r(t) = - (1/t) \text{Ln} [a_1 e^{-xt} + a_2 e^{-yt} + a_3 e^{-zt}]$$

$$\text{avec } a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Les 5 coefficients x , y , z , a_1 et a_2 sont estimés par une régression non linéaire des prix des emprunts d'Etat.

2) Calcul des taux zéro coupon anticipés

Les taux anticipés à la date T sont calculés comme des taux "terme-terme", à partir de l'égalité :

$$e^{-r_{0,t} t} = e^{-r(0,T) T} e^{-r^*(T,t-T) (t-T)}$$

où $r^*(T,t-T)$ désigne le taux anticipé pour la date T et une durée $t-T$.

On notera que cette formule donne une courbe des taux anticipés avec les mêmes exposants x , y et z que la courbe initiale, et ceci quel que soit T .

3) Calcul du prix anticipé d'une obligation d'Etat fictive à plus de 7 ans

Les rendements futurs de l'obligation TME à laquelle on s'intéresse dépendront des valeurs hebdomadaires futures des taux actuariels de certains emprunts d'Etat qui serviront de référence. Cependant, on ne connaît pas à l'avance les caractéristiques et les encours de ces emprunts d'Etat qui seront émis entre aujourd'hui et la date de maturité

de l'obligation TME. Le problème consiste donc à prévoir une série temporelle de taux de références. Aussi l'utilisation d'un THE "anticipé" est-elle indispensable, mais sa définition est délicate. Dans un premier temps, nous considérons que le THE anticipé est le taux actuariel d'un emprunt d'Etat de coupon 8% et d'une durée telle que sa durée égale la durée du panier d'emprunts d'Etat à plus de 7 ans ayant servi à construire la courbe des taux zéro-coupon. Pour simplifier, on choisit cette durée égale à 10 ans.

Le prix anticipé de cet emprunt, noté P_a , est calculé pour chaque date T de fixation du THE anticipé, c'est à dire pour chaque vendredi sur toute la période considérée, en actualisant ses flux par les taux zéro-coupon anticipés déterminés précédemment :

$$P_a = 8 \{ e^{-r^*(\pi, T+1)} + e^{-2r^*(\pi, T+2)} + e^{-3r^*(\pi, T+3)} + \dots + e^{-10r^*(\pi, T+10)} \} + 100 e^{-10r^*(\pi, T+10)}$$

en utilisant les coefficients d'actualisation précédents :

$$e^{-r(0,t)t} = a_1 e^{-xt} + a_2 e^{-yt} + a_3 e^{-zt}$$

$$\text{on obtient : } e^{-r^*(\pi, t-T)(t-T)} = \frac{a_1 e^{-xt} + a_2 e^{-yt} + a_3 e^{-zt}}{a_1 e^{-xT} + a_2 e^{-yT} + a_3 e^{-zT}}$$

4) Calcul du taux actuariel correspondant à ce prix

Il s'agit simplement de résoudre :

$$P_a = 8 [(1+r_a)^{-1} + (1+r_a)^{-2} + (1+r_a)^{-3} + \dots + (1+r_a)^{-10}] + 100 (1+r_a)^{-10}$$

où r_a désigne le taux actuariel anticipé, c'est à dire le THE anticipé.

5) Calcul des coupons anticipés

Nous avons appliqué ce modèle à l'OAT TME 1998. Rappelons que cette obligation distribue un coupon égal au TME - 0.75% et que son échéance est le 25 janvier 1998. Les taux anticipés r_a doivent donc être calculés pour tous les vendredis entre la date d'aujourd'hui et le 1er janvier 1998. Les coupons anticipés sont alors obtenus en soustrayant 0.75% à la moyenne des 52 taux anticipés calculés pour chaque année. Pour l'année en cours, le coupon anticipé est la somme du coupon couru et de la moyenne des coupon anticipés sur la période restant à courir jusqu'au détachement.

6) Calcul du prix théorique de l'obligation TME 1998

Les coupons anticipés et le principal sont actualisés avec les taux zéro-coupon d'aujourd'hui :

$$P = c_1 e^{-r(0,s_1) s_1} + c_2 e^{-r(0,s_2) s_2} + \dots + (100 + c_n) e^{-r(0,s_n) s_n}$$

où s_i est la fraction d'année à courir entre la date d'aujourd'hui et le détachement du coupon anticipé c_i et c_n le dernier coupon anticipé de la TME, tombant le 25 janvier 1998.

7) Calcul de la marge théorique de l'obligation TME 1998

La marge actuarielle est la différence entre le taux actuariel qu'aurait cette obligation si tous les coupons étaient égaux au TME-0.75% pour un prix égal à P et le taux de référence de l'obligation TME.

B) Résultats obtenus

On a comparé, du 24 janvier au 22 octobre 1990, à intervalles de temps réguliers, les estimations de marges données par ce modèle aux marges nettes observées sur le marché ; on constate, comme le montre le graphique 1, que les écarts entre marge de marché et marge théorique sont faibles et constants sur chacune des trois périodes qui ressortent

du graphique : janvier à mars, avril à juillet et août à octobre. Les trois périodes considérées se distinguent par des formes différentes de la courbe des taux des emprunts d'Etat : inversée dans la première, la marge théorique est supérieure d'environ 20 centimes à la marge observée ; relativement aplatie au cours de la deuxième, l'écart entre les deux marges n'est en moyenne que d'environ 5 centimes ; traditionnelle dans la dernière, les taux courts étant inférieurs aux taux longs, la marge théorique devient inférieure d'environ 10 centimes à la marge observée.

Les graphiques 2, 3 et 4 montrent que le prix théorique de l'OAT TME est sensible à la forme de la courbe des taux, et que pour des courbes de taux "plausibles" les marges calculées sont tout à fait vraisemblables.

D'autre part, nous avons vérifié qu'un certain nombre d'hypothèses faites sur le THE anticipé n'induisaient pas de fortes variations sur les résultats du modèle, qu'il s'agisse du remplacement, dans le calcul du THE, de l'ensemble des obligations d'Etat à plus de 7 ans par une obligation d'Etat à 8 ans (figure 5), ou de la fixation du taux de coupon à 8%.

C) Réplication de l'OAT TME par une combinaison d'obligations à taux fixe

L'écart constaté entre le prix de marché et le prix donné par le modèle nous a incités à rechercher une possibilité d'arbitrage entre l'obligation TME et un portefeuille se comportant comme l'obligation du modèle . Dans la mesure où le prix donné par le modèle n'est qu'une fonction des 5 paramètres caractérisant la courbe des taux, il suffirait de construire un portefeuille d'obligations à taux fixe (on suppose que les dites obligations se situent exactement sur la courbe des taux) ayant la même sensibilité à ces paramètres que l'obligation du modèle.

Ceci impose de constituer un portefeuille de 6 obligations, puisqu'il y a 6 égalités à vérifier. Sur la base des données du 23 octobre 1989, on s'intéresse aux obligations suivantes:

- 1) 8% 25/1/1990 notée O₁
- 2) 8% 25/1/1991 notée O₂
- 3) 8% 25/1/1994 notée O₃
- 4) 8% 25/1/1997 notée O₄
- 5) 8% 25/1/1999 notée O₅
- 6) 8% 25/1/2004 notée O₆

obligations fictives, dont le prix est déterminé à partir de la courbe des taux.

Le calcul consiste à construire 3 matrices à 6 lignes : 1 égalité est fournie par l'identité du prix (selon le modèle) de la TME et du prix du portefeuille des 6 titres fictifs, les 5 autres sont obtenues par l'identité entre dérivée du portefeuille et dérivée de l'obligation par rapport à chacun des 5 paramètres de la courbe des taux des emprunts d'Etat : a₁, a₂, x, y et z) :

$$\begin{pmatrix} d \text{ TME} / d a_1 \\ d \text{ TME} / d a_2 \\ d \text{ TME} / d x \\ d \text{ TME} / d y \\ d \text{ TME} / d z \\ \text{prix TME} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d O_1 / d a_1 & d O_2 / d a_1 & \dots & d O_6 / d a_1 \\ d O_1 / d a_2 & d O_2 / d a_2 & \dots & d O_6 / d a_2 \\ d O_1 / d x & d O_2 / d x & \dots & d O_6 / d x \\ d O_1 / d y & d O_2 / d y & \dots & d O_6 / d y \\ d O_1 / d z & d O_2 / d z & \dots & d O_6 / d z \\ \text{prix } O_1 & \text{prix } O_2 & \dots & \text{prix } O_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix}$$

Le portefeuille répliquant *une* obligation TME à la date précédente était ainsi de:

- m1 = - 5.4 obligations 8% 25/1/1990
- m2 = + 10.5 obligations 8% 25/1/1991
- m3 = - 9.16 obligations 8% 25/1/1994
- m4 = + 9.65 obligations 8% 25/1/1997
- m5 = - 3.9 obligations 8% 25/1/1999
- m6 = - 0.73 obligations 8% 25/1/2004

On vérifie que la variation de ce portefeuille est très faible (-0.12). La valeur obtenue est négative, ce qui est cohérent avec la présence dans le coupon d'une marge de -0.75% . On peut aussi calculer le rendement du portefeuille ; celui-ci était, le 23 octobre 1989, de 9.18% alors que la marge calculée par le modèle était +0.07% ; le taux actuariel d'une obligation 8% à 8ans était de 8.91% ; on ne retrouve donc pas la notion de marge actuarielle conçue comme l'écart entre rendement de l'obligation TME et rendement de référence (supposé figé) . Ceci traduit le fait que, même si les taux n'évoluaient pas, le portefeuille devrait être réajusté pour répliquer l'obligation TME ; aussi la comparaison de son rendement avec le taux de référence actuel n'a-t-elle aucun sens.

Il est intéressant d'étudier le comportement de ce portefeuille en cas de variation, non pas infinitésimale, mais importante, de la courbe des taux . Cette étude, illustrée par les graphiques 7, 8, et 9 montre qu'il existe un léger effet de convexité : ainsi, une évolution de la courbe des taux de l'ordre de 0.50% pour les taux longs, à taux courts inchangés, provoque une variation plus "favorable" de l'obligation TME que du portefeuille ; à la hausse des taux longs, le portefeuille gagne 1.35 (en prix), alors que l'obligation gagne 1.39 ; à la baisse des taux longs, le portefeuille perd 1.48, alors que l'obligation ne perd que 1.40. La faiblesse de l'effet "convexité" justifie des réajustements peu fréquents du portefeuille.

Définition des abréviations

THE: moyenne, pondérée par les encours, des taux actuariels, sans frais depuis juillet 89, des emprunts d'Etat de plus de 7 ans observés sur le marché secondaire le vendredi.

TME: moyenne, sur l'année, des 52 THE.

THO: moyenne, pondérée par les encours émis dans la semaine, des taux actuariels des nouvelles émissions d'obligations du secteur public; ces taux sont calculés en ne prenant pas en compte les éventuelles rétrocessions de commissions.

TMO: moyenne, sur l'année, des 52 THO.

OAT: obligation assimilable du Trésor.

marge de l'OAT THE 1998

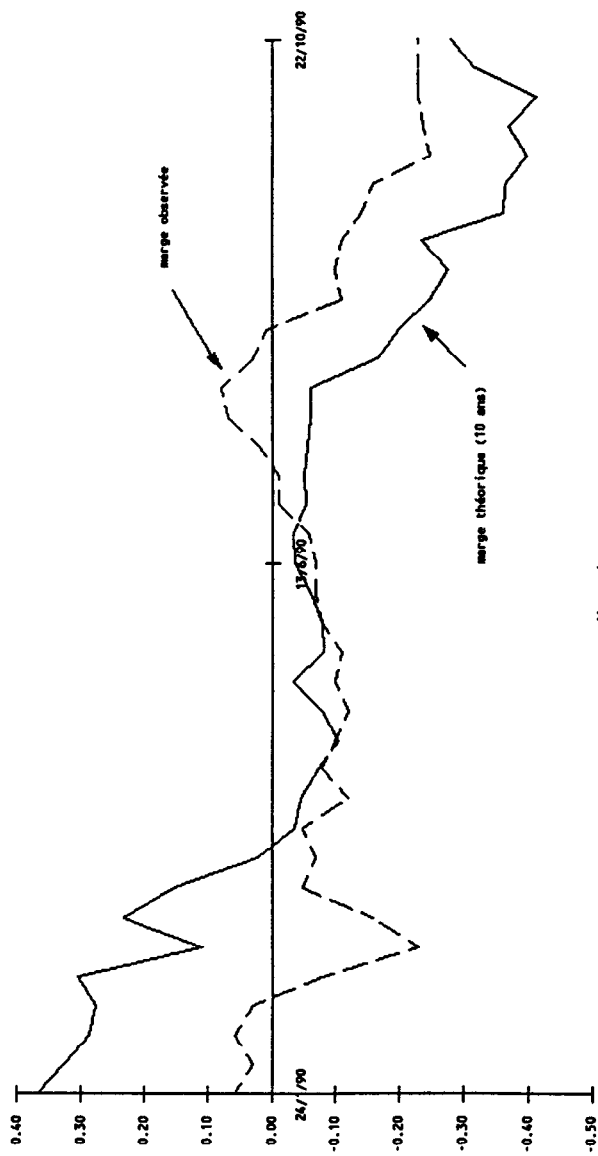


figure 1

marge de l'OMT 1998

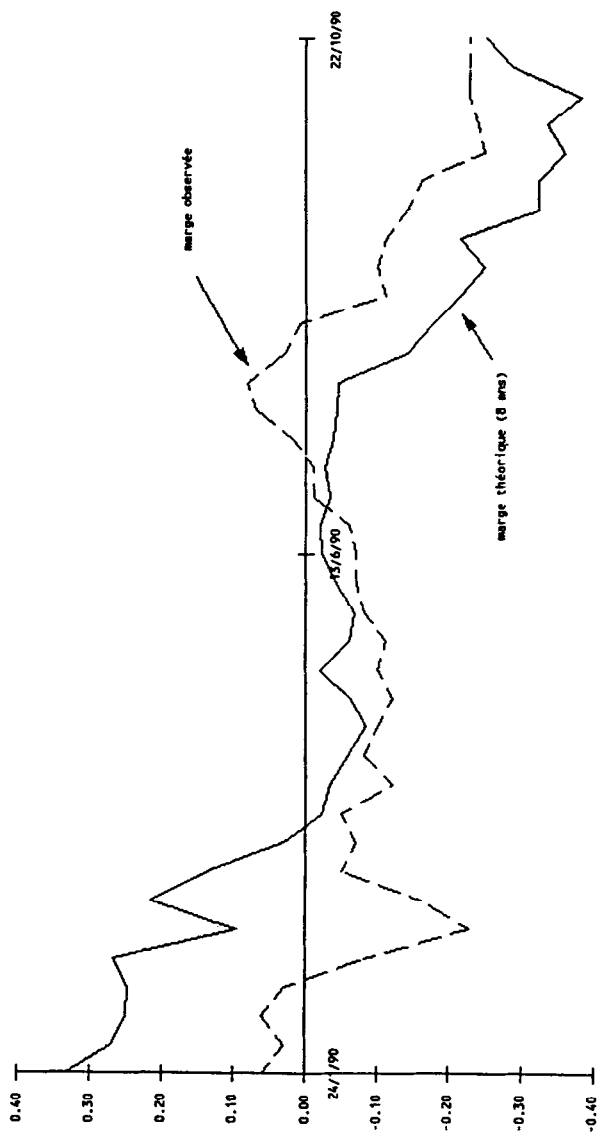


figure 2

Figure 3

Réplication d'une obligation TME avec 6 obligations à taux fixe

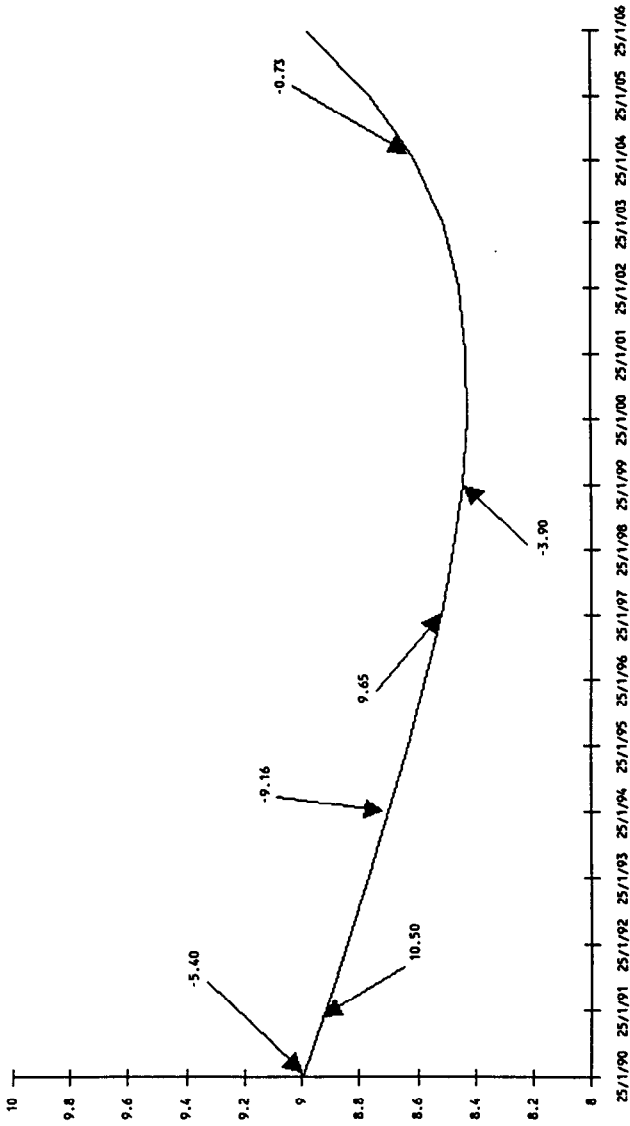


figure 4
 prix de la tme et du portefeuille equivalent
 pour differentes courbes des taux

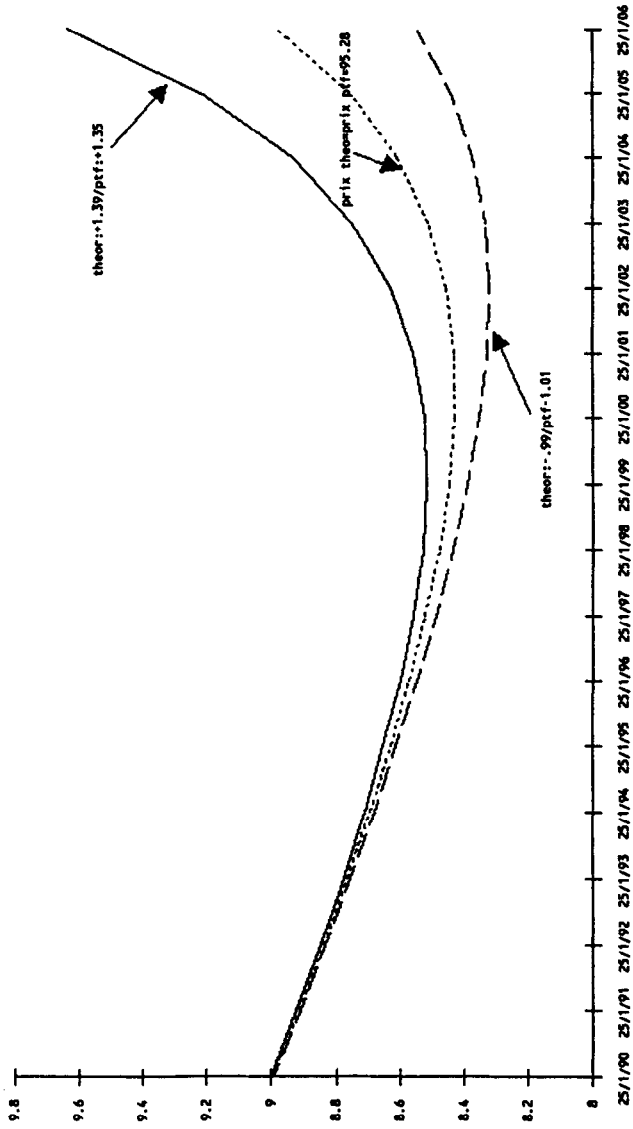


figure 5

prix de la tme et du portefeuille équivalent pour différentes courbes des taux

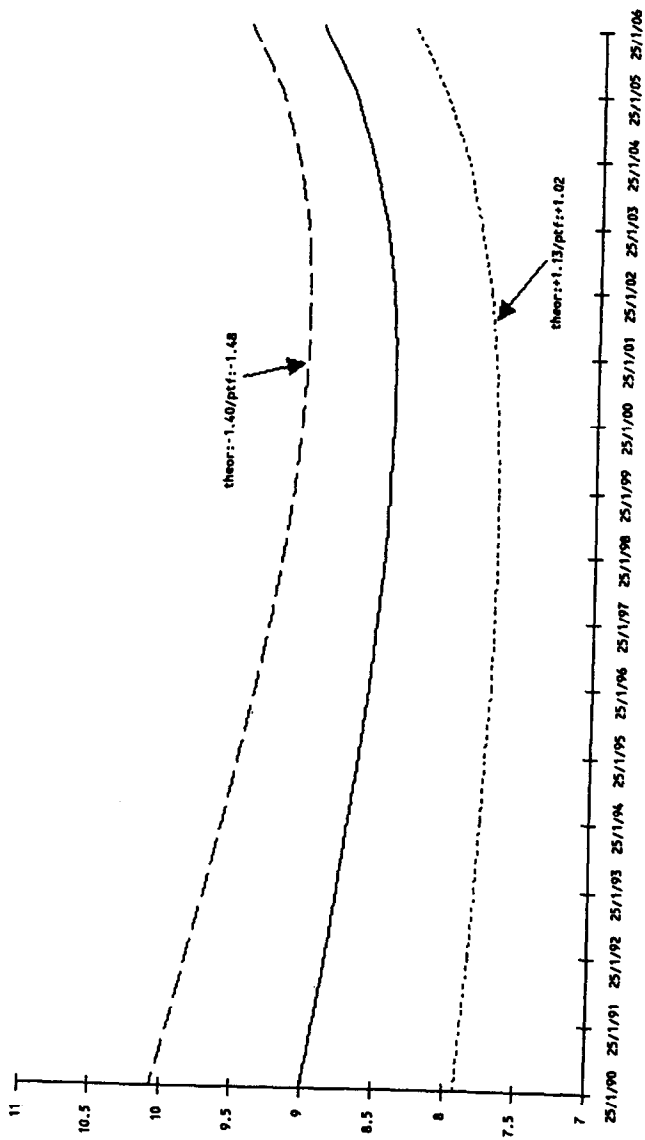


figure 6

sensibilité de la tme et du portefeuille equivalent

