

Modèles de Risques et Solvabilité en assurance Vie

Kaltwasser Perrine
Le Moine Pierre

Autorité de Contrôle des Assurances et des Mutuelles
(ACAM)

61, rue Taitbout
75436 PARIS CEDEX 09

tél. : + 33 1 55 50 43 58

fax : + 33 1 55 50 41 50

perrine.kaltwasser@acam-france.fr

pierre.le-moine@acam-france.fr

Résumé :

Définie actuellement dans la réglementation française par un pourcentage des provisions mathématiques, la marge de solvabilité en assurance vie va certainement évoluer dans les années à venir vers une définition plus adaptée aux caractéristiques propres à chaque entreprise. L'objet du travail est donc de proposer une approche de la solvabilité prenant en compte des caractéristiques de la société étudiée (nature des engagements, rendement et volatilité de l'actif. . .) mais pouvant être utilisée dans la grande majorité des cas. L'approche en question est donc à mi-chemin entre une marge fixe et un modèle interne, très spécifique à l'entreprise concernée.

L'étude propose une approche des risques de marché action et de taux. Elle donne des résultats en marché complet, qui permettent notamment de calculer la marge de solvabilité nécessaire en fonction du rendement de l'actif sans risque et de la volatilité du portefeuille action. La marge est ensuite estimée en couverture par quantile. Enfin, les bases de l'étude de la solvabilité en marché incomplet sont exposées.

Mot clés : assurance-vie, solvabilité, couverture, modèles interne, marché incomplet

1. INTRODUCTION	3
2. DIFFERENTES APPROCHES DE LA SOLVABILITE	4
2.1 LA REGLEMENTATION EUROPEENNE ACTUELLE	4
2.1.1 Prudence dans le calcul des provisions.....	4
2.1.2 Prudence sur les actifs admissibles	5
2.1.3 Calcul du minimum réglementaire de marge de solvabilité	5
2.1.4 Eléments constituant la marge de solvabilité	6
2.2 LE PROJET SOLVABILITE 2	6
3. ETUDE EN MARCHE COMPLET	7
4.1 COUVERTURE PARFAITE	7
4.1.1 Un premier modèle sur un portefeuille « actions »	8
4.1.2 Application numérique	9
4.1.3 Cas particulier classique : $r_a=r_g=80\%.r$	9
4.2 INTRODUCTION DES RACHATS : LES LIMITES DU MODELE « ACTIONS ».....	11
4.2.1 Prix théorique de la couverture des rachats.....	11
4.2.2 Application numérique	12
4.3 LE MODELE OBLIGATAIRE : « MATCHING » DE FLUX FUTURS.....	14
4.3.1 Couverture des engagements en l'absence de rachat	14
4.3.2 Introduction des rachats.....	15
4.3.3 Exemple numérique avec un modèle de volatilité Hull et White.....	16
4.3.4 Exemple numérique avec un modèle de volatilité Ho et Lee	17
4.3.5 Développements possibles	18
4.4 COUVERTURE IMPARFAITE : SOLVABILITE PAR QUANTILE DANS LE CAS D'UN PORTEFEUILLE « ACTIONS » ..	18
4.4.1 Définition de l'horizon de la couverture imparfaite :	19
4.4.2 Calcul pour un contrat qui vient d'être souscrit :	19
4.4.3 Calcul en régime permanent :	21
4. ETUDE EN MARCHE INCOMPLET	23
5.1. LE POURQUOI DE L'ETUDE EN MARCHE INCOMPLET.....	23
5.2. BASES THEORIQUES DE L'ETUDE EN MARCHES INCOMPLETS	23
5.3. CAS DISCRET : VERS UN MODELE DE SOLVABILITE EN ASSURANCE VIE	25
5.3.1. Cadre général.....	25
5.3.2. Résolution formelle avec des rachats indépendants de l'actif.....	26
5. CONCLUSION	29
6. BIBLIOGRAPHIE	31
ANNEXE 1 : MODELISATION DES RACHATS	32
ANNEXE 2 : PRIX DU PUT SUR ZERO-COUPON	36
ANNEXE 3 : CALCUL DE LA PROBABILITE RISQUE NEUTRE PAR LA TRANSFORMATION DE ESSHER	37
ANNEXE 4 : CADRE GENERALE DE LA COUVERTURE PAR QUANTILE ET RESOLUTION NUMERIQUE	39

1. INTRODUCTION

Dans la réglementation française, la marge de solvabilité exigée en assurance vie est un montant de capital équivalent à 4% des provisions mathématiques d'un contrat en euros. Pour un contrat en unités de comptes, où le risque financier est nul, ce ratio est de 1% et correspond au seul risque opérationnel. De manière implicite, la réglementation retient un risque financier de 3% environ des provisions mathématiques.

Les travaux du comité de Bâle sur la réforme de la solvabilité des banques d'une part et d'autre part l'interaction croissante entre le secteur bancaire et le secteur de l'assurance font de la solvabilité des compagnies d'assurance une préoccupation majeure de l'union européenne dans le cadre du projet de réforme « solvabilité 2 ».

Cependant, les récents débats au niveau européen pour définir les futures normes de solvabilité – « solvabilité 2 » - vont vers une détermination au cas par cas de la marge. Plus précisément, les orientations prises font intervenir 3 niveaux de complexité :

- le premier niveau est un ratio simple, et dont le franchissement constituerait un signal d'alerte pour les autorités de contrôle
- le deuxième niveau serait constitué par l'utilisation d'un modèle standard de risque
- le troisième niveau est une approche basée sur les modèles internes développés par chaque société, et validé par les autorités de contrôle.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier une ou plusieurs approches de la solvabilité qui peuvent être la base du deuxième niveau. Il s'agit donc de proposer des éléments de ce que pourrait être un modèle standard de solvabilité, permettant de donner en fonction des caractéristiques de chaque société (structure de l'actif, nombre de sorties de contrats...) la marge nécessaire.

Après avoir présenté les réglementations européennes et américaines en matière d'assurance vie basées sur des ratios forfaitaires, nous présenterons les trois piliers de l'accord de Bâle 2 : l'exigence en fonds propres, le processus de surveillance prudentiel et la discipline de marché et ces implications probables sur le futur régime de solvabilité européen. Le test d'exigibilité (état C6 bis) basé sur des scénarii défavorables qui vient d'être mis en place et les implications des nouvelles normes comptables seront ainsi présentées dans le cadre de cette évolution réglementaire.

Nous présenterons ensuite les spécificités des contrats d'assurance vie en euros. Ceux-ci sont caractérisés par une fiscalité avantageuse pour les sorties de contrats au-delà de 8 ans, des exonérations de droits de succession applicables aux capitaux transmis via un contrat d'assurance vie et un mécanisme de participation aux bénéfices réalisés par l'assureur sur la gestion des actifs représentant ces engagements. Ces contrats sont soumis à différents risques : le risque de rachat des contrats avant échéance, le risque de marché action et le risque de taux pour lesquels nous proposerons des modèles ainsi que le risque opérationnel (incendie du siège par exemple) qui est extrêmement difficile à estimer et le risque de défaut des contreparties (des émetteurs d'obligations principalement dans le cas de compagnies

d'assurance françaises) qui peut être négligé en première approche car les assureurs possèdent en majorité des obligations émises par les Etats de l'OCDE ou des entreprises publiques de ces mêmes Etats qui sont réputées sans risque.

Nous considérerons dans un premier temps la couverture en marché complet des engagements correspondant à un contrat en euros à prime unique dans le cas où les actifs pris en couverture sont des actions, dans un premier temps sans rachat, puis avec des rachats, et enfin dans le cas où les engagements sont couverts par des obligations avec des rachats indépendants de l'évolution des taux.

Nous prolongerons ce travail par une étude de la solvabilité par quantile, qui est plus raisonnable que la couverture parfaite lorsque actif et passif sont décorrélés. Nous nous pencherons enfin sur la possibilité de construire une approche de la solvabilité en marchés incomplets, qui reflète mieux la réalité mais dont l'utilisation en pratique se révèle délicate.

2. DIFFERENTES APPROCHES DE LA SOLVABILITE

Le contrôle réglementaire de la solvabilité des compagnies d'assurance en France est aujourd'hui principalement basé sur le passif des compagnies². Les provisions et les éléments admissibles en représentation de la marge de solvabilité doivent être suffisants pour faire face aux engagements et aux aléas. Ces deux éléments sont indissociables dans la mesure où des provisions prudentes et une exigence en marge de solvabilité relativement faible peuvent représenter un montant plus important que des provisions calculées en espérance et une marge importante comme le montre l'exemple suivant. Soit un engagement de 100 dans 8 ans, nous considérons 2 cas :

- un taux d'actualisation de 3 % et une marge qui représente 4 % des provisions mathématiques (cas A)
- un taux d'actualisation de 4,5 % et une marge qui représente 10 % des provisions mathématiques (cas B).

Tableau 1 : Exigence de marge selon le scénario

à t=0	Provisions	marge	somme
Cas A	78,9	3,2	82,1
Cas B	70,3	7,1	77,3

Nous observons ici que c'est dans le premier cas avec une marge représentant 4 % des provisions que la prudence est plus importante, il faudra donc garder à l'esprit que c'est la somme des provisions et de la marge qui importe et non la marge seule, ni les provisions seules. La séparation entre capitaux propres et provisions est comptable et fiscale mais pas économique.

2.1 La réglementation européenne actuelle

2.1.1 Prudence dans le calcul des provisions

Les provisions mathématiques qui servent de base au calcul de la marge de solvabilité en assurance vie sont égales à la différence entre les engagements de l'assureur et ceux de l'assuré à un instant t . De fait elles sont faibles au début de la vie du contrat

(l'espérance des engagements de l'assuré et de l'assureur sont nulles au moment de la signature du contrat) et augmentent jusqu'au moment du début du versement de la rente pour un contrat d'assurance vie avec sortie en rente par exemple.

La prudence dans le calcul des provisions techniques est un des piliers de la solvabilité en France. D'une part les tables de mortalité qui servent aux calculs doivent être certifiées ou réglementaires et par prudence les tables de mortalité des femmes sont utilisées pour le calcul des garanties en cas de vie et celles des hommes pour le calcul des garanties en cas de décès.

D'autre part le taux garanti par le contrat ne peut excéder :

- 75 % du TME³ sur les 8 premières années du contrat ;
- minimum (3,5 % ; 60 % du TME) au-delà de 8 ans.

Le taux d'actualisation des engagements ne peut être supérieur au taux garanti et au rendement des actifs qui sont en représentation des engagements. Limiter celui-ci pour le calcul des provisions mathématiques est prudent car la somme actualisée des engagements est décroissante avec le taux d'actualisation.

2.1.2 Prudence sur les actifs admissibles

Il ne serait pas prudent pour une entreprise d'investir toutes les primes dans des obligations risquées d'une même société ou dans une devise autre que celle de ses engagements. En effet cela l'exposerait à des risques de change, de contrepartie ou de concentration trop importants d'un point de vue prudentiel. C'est pour cette raison que des règles de congruence, de diversification et de dispersion ont été mises en places pour les actifs admis en représentation des engagements réglementés (R 332-1 et suivant du code des assurances).

Mais ces contraintes ont des limites, par exemple rien n'empêche un assureur de représenter ces engagements avec un portefeuille investi dans des sociétés d'un même secteur tel que la haute technologie, qui est à la fois risqué et dont les valeurs sont fortement corrélées.

2.1.3 Calcul du minimum réglementaire de marge de solvabilité

La marge de solvabilité est définie dans les articles R 334-1 à R 334-16 du code des assurances. Elle représente au-delà des provisions techniques (provisions mathématiques, provision pour participation aux excédents, provisions pour sinistres à payer, ...) qui sont la source principale de solvabilité d'une compagnie d'assurance le "matelas" de sécurité contre l'alea dans la réalisation de divers risques qui peuvent affecter le passif ou l'actif d'une société d'assurance. Cette notion est équivalente à celle des fonds propres utilisée dans le domaine bancaire.

Le taux d'actualisation des provisions mathématiques est en général le taux garanti donc une société qui promet 0% et une 3,5% auront les mêmes provisions et donc la même marge alors que l'engagement de la seconde est plus risqué.

2.1.4 Eléments constituant la marge de solvabilité

Les éléments admissibles en couverture du minimum réglementaire de marge de solvabilité sont les actifs mobilisables par l'entreprise en cas de difficulté financière au delà des actifs représentant les provisions techniques.

Au moins deux limites apparaissent ici, la première est que 100% des plus-values latentes sont prises en compte alors que celles-ci sont imposables et qu'une partie revient aux assurés via la participation aux bénéfices. Une deuxième limite est que ce sont les valeurs dans des conditions normales de marché qui sont prises en compte et non des valeurs de liquidation.

Le système français (qui est largement une retranscription de directives européennes) présente l'inconvénient de ne pas offrir de définition cohérente d'un point de vue économique du capital. En effet contrairement à la value at risk par exemple qui correspond au capital nécessaire pour faire face dans 99% des cas par exemple, les méthodes de ratios forfaitaires ne présentent aucun lien direct avec les objectifs prudentiels, ils ne sont basés que sur des ratios calculés empiriquement et fixés ensuite. Elle ne tient compte de la composition d'actifs qu'au travers de règles simples de diversification, de congruence et de dispersion.

Enfin cette méthode est peu souple par rapport à la structure spécifique d'une entreprise, notamment l'adéquation actif et passif et la détermination des ratios peut sembler assez arbitraire dans les deux cas.

2.2 Le projet solvabilité 2

Suite à un rapport remis en 2002 par KPMG, la commission européenne a accéléré la réflexion engagée sur la réforme du système de solvabilité dans l'Union européenne dans le cadre du projet "Solvabilité 2" qui devrait reposer sur les trois mêmes piliers que Bâle 2 :

- une exigence en fonds propres ;
- un contrôle prudentiel ;
- la discipline de marché.

Pour autant des différences fondamentales existent entre le contrôle bancaire et le contrôle des compagnies d'assurances. D'une part les risques de marché et de crédit sont essentiellement des risques d'actifs et il n'existe pas en banque d'équivalent aux risques de passif auxquels sont soumises les entreprises d'assurance tels que le risque de sous-provisionnement, le risque de rachat ou le risque lié à la politique de souscription.

D'autre part les accords de Bâle successifs ont pour but de maintenir la stabilité du système bancaire mondial et par conséquent concernent surtout les grandes banques internationales alors que le contrôle prudentiel en assurance a avant tout vocation à protéger les assurés contre le risque de faillite individuelle d'une compagnie.

Si les deux derniers piliers semblent transposables à l'assurance relativement aisément, le premier nécessite des aménagements autrement plus conséquents. Le premier point que l'on peut soulever concerne la typologie des risques qui est consensuelle et a fait l'objet de développement de modèles basés sur les mêmes risques dans toutes les banques, unité qui n'existe pas sur les modèles qu'ont commencé à développer les principaux assureurs

européens. Le risque de marché par exemple porte sur le portefeuille de négociation, notion qui n'a pas d'équivalent en assurance, le risque de taux relève lui d'un contrôle qualitatif dans le deuxième pilier de Bâle 2 alors qu'il est central en assurance vie au travers de la gestion actif-passif; quant au risque de crédit, les obligations faites aux compagnies d'assurance sur la qualité des actifs en représentation des engagements réglementés le rendent moins pertinent.

En ce qui concerne les modèles internes, le problème de leur validation par les autorités de contrôle est plus complexe qu'en banque de par la difficulté à trouver une typologie commune et la longueur des engagements des assureurs (rentes, Plan d'Epargne Retraite Populaire, ...), le contrôle a posteriori des modèles de risque de marché (qui est calculé sur 10 jours) étant déjà problématique en banque⁴.

L'évolution des exigences en fonds propres dans le cadre des futures directives européennes nécessite donc une réflexion importante et ne peut être une simple transposition de Bâle 2.

Par la suite nous allons considérer soit un contrat de durée 8 ans à prime unique, soit une génération de contrats de ce type. En effet les contrats à versement libres sont le produit le plus répandu parmi les contrats d'assurance vie. Dans ce cadre un versement est équivalent à un contrat à prime unique de même date d'échéance que le contrat car dans ce cas ce sont les conditions de marché au moment de la date de versement de la prime qui importe réglementairement et non la date de souscription du contrat. Les éléments qu'il est alors important de considérer sont :

- le taux promis par le contrat (c'est à dire l'engagement de l'assureur) ;
- la structure des fonctions de rachat ;
- les actifs pris en couverture des engagements, ici des actions et des obligations.

3. ETUDE EN MARCHÉ COMPLET

L'approche de la solvabilité ne peut être faite sans considérer l'imperfection des marchés, s'en est même une de ses premières raisons d'être : le passif n'étant pas répliquable par des actifs disponibles sur le marché, il est nécessaire de prendre une marge supplémentaire, d'où la marge de solvabilité. Or on peut tout à fait introduire cette problématique en marché complet. Commencer par ce cas particulier simple permet de poser des concepts plus délicats à manier en marché incomplet. Cette première approche permettra en particulier de donner la théorie de la couverture par quantile, qui est un outil intéressant pour étudier la solvabilité partielle (à 95 ou 99%), avec laquelle peut être comparée une étude en Value at Risk (VaR[©]).

4.1 Couverture parfaite

Nous devons avant toute chose préciser ce qu'est la marge de solvabilité. Cette notion déjà présentée précédemment comme un coussin de sécurité n'est pas une notion économiquement pertinente. En effet, c'est la notion de portefeuille de couverture du passif d'assurance qui est pertinent dans une approche économique : la réglementation et la comptabilité ont découpé ce portefeuille V en deux parties, que sont les provisions mathématiques (notées PM) et la marge de solvabilité (notée MS) : $V=PM+MS$.

C'est avec cette idée que nous travaillerons, tout en conservant la déclinaison en marge et provisions : conserver ce repère facilite la comparaison avec la réglementation et permet plus facilement d'appréhender les valeurs numériques obtenues.

4.1.1 Un premier modèle sur un portefeuille « actions »

Pour notre modèle, nous allons considérer un contrat d'assurance vie en euro, à prime unique P , d'une durée de huit ans, et de taux technique r_g . Dans un premier temps, il n'y a pas de rachat possible avant le terme. Ainsi, l'engagement de l'assureur est de verser $P \cdot (1+r_g)^8$ dans huit ans. Il va donc devoir mettre en provision mathématique la somme $PM_0 = P \cdot (1+r_g)^8 / (1+r_a)^8$, où r_a est le taux d'actualisation, c'est à dire le rendement moyen des actifs sur cette période. Par prudence, ce taux doit être inférieur au taux technique, la réglementation le limite d'ailleurs au minimum entre 60% TME et 3,5%. Enfin, les actifs ne sont pas vendus avant les huit ans, les plus values ne sont donc pas réalisées avant la sortie du contrat et il n'y a pas de participation aux bénéfices venant augmenter les provisions mathématiques avant la sortie. Si on prévoit une revalorisation à la sortie, celle-ci n'intervient qu'en cas de rendement élevé des actifs au terme, et cela n'affecte en rien l'exigence initiale en marge de solvabilité.

L'assureur va donc placer cette provision mathématique dans un actif S , que nous supposons suivre un modèle Black & Scholes :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t \\ S_0 = PM_0 \end{cases}$$

où μ est le rendement de l'actif, σ sa volatilité, est W_t est un mouvement brownien standard.

Or, placé dans cet actif risqué (et en pratique, l'actif de l'assureur comporte toujours un risque), une provision mathématique calculée de manière prudente ne permet pas toujours à l'assureur de tenir ses engagements. En effet, la probabilité pour que $S_8 < PM_8 = P \cdot (1+r_g)^8$ n'est pas nulle. Pour être solvable, l'assureur doit donc allouer du capital, et constituer une marge de solvabilité. Celle-ci doit être suffisante pour couvrir les engagements en cas de mauvaise performance de l'actif : elle doit assurer au minimum le flux à la date 8 : $(PM_8 - S_8)^+$. On a donc alors dans tous les cas $S_8 + (PM_8 - S_8)^+ \geq PM_8$.

La marge doit donc pouvoir être vu comme l'achat d'une option de vente (ou put), de montant initial la provision mathématique $S_0 = PM_0$, de strike $K = PM_8 = P \cdot (1+r_g)^8$ et de maturité 8 ans. Il ne s'agit là que d'un minimum : pour que cette borne inférieure soit pertinente, il faut que le montant de la marge soit effectivement investi dans l'option, ou serve à répliquer l'option. Or il n'est pas toujours possible de trouver ces produits de couverture sur le marché, et la réplification demande elle une gestion dynamique et continue du portefeuille : il convient donc de considérer les résultats obtenus dans ce cadre théorique simple avec un esprit critique.

On peut néanmoins regarder ce que représente cette marge en proportion des provisions mathématiques, la réglementation raisonnant ainsi, et demandant à l'assureur un surplus de capital égal à 4% des provisions mathématiques. On constate dans notre modèle simple, que la solvabilité n'est pas seulement fonction des engagements, mais aussi de la qualité des actifs, ainsi que du degré de prudence dans l'actualisation des engagements.

4.1.2 Application numérique

D'après la formule de Black & Scholes, si ρ est le taux sans risque continu, constant au cours du temps :

$$MS = Put(S_0 = P \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8}, K = P(1+r_g)^8, \rho, \sigma)$$

$$MS = P(1+r_g)^8 e^{-8\rho} N(-d_2) - P \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} N(-d_1)$$

$$\text{où } \begin{cases} d_1 = \frac{-4 \ln(1+r_a) + 4(\rho + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{2}} \\ d_2 = d_1 - 2\sqrt{2}\sigma \end{cases}$$

4.1.3 Cas particulier classique : $r_a=r_g=80\%.r$

Il est relativement fréquent d'utiliser le même taux pour le taux technique et celui servant à actualiser les engagements. En effet, ces deux taux doivent refléter le rendement qu'il est raisonnable d'espérer durant la période du contrat. En outre, par prudence, on prend un taux technique inférieur à 80% du taux de l'actif sans risque (Taux Moyen des Emprunts d'Etat) afin de prendre une marge de sécurité sur leur variation future et de tenir compte des coûts de l'assureur. De plus ces 80% permettent d'éviter de constituer une provision pour aléas financiers (PAF), exigée lorsque 80% du rendement de l'actif de l'assureur est inférieur à ce qu'il a promis.

Plaçons nous donc à $r_a=r_g=80\%.r$ Le taux de couverture ne dépend donc plus que de deux paramètres, à savoir le taux de l'actif sans risque r , et la volatilité de l'actif risqué dans lequel la provision mathématique est investie. Pour $r=4\%$ et $\sigma=10\%$, les résultats obtenus sont encore très élevés, puisqu'en régime permanent, l'exigence minimale de marge est de 5,5% des provisions mathématiques.

Tableau 2 : hypothèses

r_g	r_a	r	σ	$PM(T)$	taux continu
3,2%	3,2%	4%	10%	1,2866	3,92%

Les résultats sur le besoin de marge sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Tableau 3 : besoin en marge

T	$PM(0)$	MS	$MS/PM(0)$
8	1,000	0,08171	8,17%
7	1,0320	0,08079	7,83%
6	1,0650	0,07916	7,43%
5	1,0991	0,07660	6,97%
4	1,1343	0,07278	6,42%
3	1,1706	0,06717	5,74%
2	1,2080	0,05872	4,86%

1	1,2467	0,04488	3,60%
0	1,2866	0,00000	0,00%
total	10,2423	0,56180	5,49%

Dans le cas plus général, nous pouvons tracer le graphique du taux de marge en fonction de r et σ :

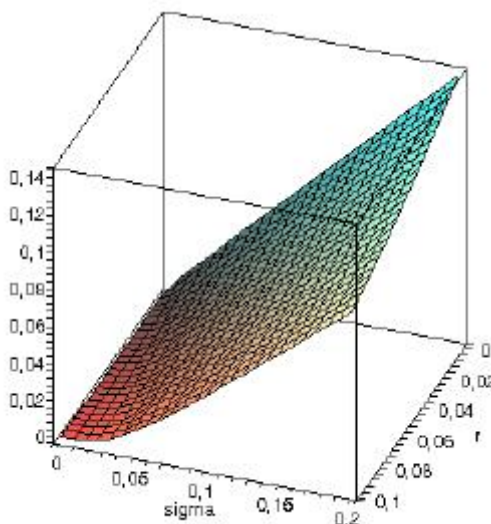


Figure 1 : taux de marge en fonction du rendement et de la volatilité de l'actif

L'échelle du graphique étant choisie de manière à considérer des plages de rendement et de volatilité raisonnables, on peut voir que la sensibilité du taux de marge est plus forte par rapport à la volatilité que par rapport au taux d'intérêt de l'actif sans risque. D'autre part, on remarque que la surface est relativement proche d'un plan, on peut donc en tirer une expression relativement simple du taux de marge en fonction de r et σ , à l'aide d'un développement de Taylor au point ($r=5\%$ et $\sigma=10\%$). On a alors :

$$Tx = 0,002836 - 0,339253.r + 0,654483.\sigma$$

On peut donc construire à partir de cette formule une table permettant de donner le pourcentage des provisions mathématiques qu'il faut pour constituer un niveau minimal de marge :

Tableau 4 : Exigence de marge en fonction de r et σ

$\sigma \backslash r$	2,00%	3,00%	4,00%	5,00%	6,00%
3,00%	1,57%	1,23%	0,89%	0,55%	0,21%
5,00%	2,88%	2,54%	2,20%	1,86%	1,52%
7,00%	4,19%	3,85%	3,51%	3,17%	2,83%
9,00%	5,50%	5,16%	4,82%	4,48%	4,14%
11,00%	6,80%	6,47%	6,13%	5,79%	5,45%
13,00%	8,11%	7,77%	7,43%	7,10%	6,76%
15,00%	9,42%	9,08%	8,74%	8,40%	8,07%
17,00%	10,73%	10,39%	10,05%	9,71%	9,37%
19,00%	12,04%	11,70%	11,36%	11,02%	10,68%

On constate donc que la marge réglementaire à 4% (dont environ 3% de risques financiers) ne peut convenir dans tous les cas de figure. Elle apparaît même bien souvent insuffisante. S'il faut faire la remarque que le portefeuille d'une compagnie d'assurance vie contient en général un grand nombre d'obligations (environ 80% de son portefeuille), la réglementation permet à un assureur de détenir jusqu'à 65% d'actions en représentation de ses engagements réglementés, et est donc fortement soumis au risque que nous venons d'étudier.

4.2 Introduction des rachats : les limites du modèle « actions »

On a considéré jusqu'à maintenant que les contrats allaient tous à leur terme, c'est à dire qu'ils étaient tous rachetés à l'issue de la huitième année. Or un risque important en assurance vie est celui du rachat avant le terme, comme la réglementation le permet (elle prévoit aussi des pénalités dont nous ne tiendrons pas compte dans cette étude).

Pour étudier ces rachats (modélisation en annexe 1), nous allons introduire x_i la proportion de rachats à la fin de l'année i par rapport au nombre initial de contrats souscrits (en fait à la date $i^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} i + \varepsilon$).

On a donc $\sum_{i=0}^8 \tilde{x}_i = 1$. A priori, les \tilde{x}_i sont des variables aléatoires positives \mathcal{H}_T -

mesurables où \mathcal{H} est la filtration naturelle associée au processus à sauts $\tilde{X}_t = \sum_{i=0}^{\lfloor t \rfloor} \tilde{x}_i$ (nous noterons $x_i = \tilde{x}_i | \mathcal{H}_i$).

A la date i , l'assureur doit payer $x_i \cdot (1 + r_g)^i$, et doit par conséquent vendre la partie des actifs mis en représentation de ces engagements : $x_i \cdot S_i$. Afin de se protéger contre ces rachats, l'assureur doit couvrir la perte éventuelle par un flux :

$$\left[x_i \cdot (1 + r_g)^i - x_i \cdot S_i \right]^+ = x_i \left[(1 + r_g)^i - S_i \right]^+$$

4.2.1 Prix théorique de la couverture des rachats

A ce stade, il nous faut donc évaluer le prix du flux de couverture $\left[x_i \cdot (1 + r_g)^i - x_i \cdot S_i \right]^+$. La forme de ce flux est très proche de celle d'une option de vente : il convient toutefois de souligner que l'évaluation du prix d'un flux en marché complet se fait en prenant l'espérance sous probabilité risque neutre du flux actualisé, et que dans notre présent cas, la variable x_i intervient. Nous supposons donc les x_i indépendants de l'actif.

Par la suite, nous considérerons :

- \mathbb{Q} la probabilité historique du processus X , auquel est associée la filtration \mathcal{H} sur l'ensemble des états de la nature Ω_X ;
- \mathbb{P} la probabilité historique du brownien W , auquel est associée la filtration \mathcal{G} sur l'ensemble des états de la nature Ω_S ;
- \mathbb{P}^* la probabilité risque neutre pour S , équivalente à \mathbb{P} ;

- on peut définir la filtration relative à l'ensemble de l'information disponible à une date donnée : $\mathcal{F}_t = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{G}_t$.

Si les x_i sont indépendants de l'actif, alors Ω_X et Ω_S sont disjoints, et l'ensemble des états de la nature Ω est défini par :

$$\Omega = \Omega_X \otimes \Omega_S = \{ \omega = (\omega_X, \omega_S) \mid \omega_X \in \Omega_X, \omega_S \in \Omega_S \}$$

La probabilité sur Ω est alors la probabilité \mathbb{P}^Ω définie par

$$d\mathbb{P}^\Omega(\omega_X, \omega_S) = d\mathbb{Q}(\omega_X) d\mathbb{P}(\omega_S)$$

La probabilité risque-neutre sur Ω est alors $d\mathbb{P}_\Omega^*(\omega = (\omega_X, \omega_S)) = d\mathbb{Q}(\omega_X) d\mathbb{P}^*(\omega_S)$. C'est ici que l'hypothèse de marchés complets joue. En effet, on suppose l'unicité de la probabilité risque neutre (ou mesure martingale équivalente) : **cette hypothèse est ici simplificatrice**, et l'étude en marché incomplet est plus pertinente. Ceci dit, elle n'est pas sans intérêt, et les résultats obtenus dans ce cadre sont justifiés lorsque l'on cherche à évaluer les risques avec un nombre moyen (ou déterminé au préalable) de rachats. Nous nous pencherons sur la manière de résoudre plus précisément ce problème dans la partie suivante du rapport.

A partir de ces hypothèses, on connaît facilement la loi de \tilde{x}_i à partir de \mathbb{Q} , puisque $\tilde{x}_i = X_i - X_{i-1}$. En marché complet, on peut donc évaluer le prix à la date de souscription ($t=0$) de la couverture MS_i des rachats à la date i par :

$$MS_i = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\Omega^*} \left[e^{-\rho i} \tilde{x}_i ((1+r_g)^i - S_i)^+ \right]$$

donc (par le théorème de Fubini)

$$MS_i = E_{\mathbb{Q}} [\tilde{x}_i] E_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\rho i} ((1+r_g)^i - S_i)^+ \right]$$

soit

$$MS_i = E_{\mathbb{Q}} [\tilde{x}_i] . Put(S_0 = PM_0, K = (1+r_g)^i, \rho, \sigma)$$

4.2.2 Application numérique

Pour étudier l'impact des rachats sur la marge exigible, reprenons les mêmes hypothèses que dans le modèle de base. Regardons, pour une génération de contrats la couverture nécessaire induite par un taux de rachats annuel de 5%:

Tableau 5 : hypothèses

r_g	r_a	r	σ	$PM(0)$	taux continu
4,5%	3,5%	4%	10%	1.0800	3,92%

Les résultats sur le besoin de marge sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Tableau 6 : besoin en marge

date i	x_i	$x_i \cdot PM(0)$	MS_i
0	5%	0,0540	0,00000
1	5%	0,0540	0,00072
2	5%	0,0540	0,00151
3	5%	0,0540	0,00221
4	5%	0,0540	0,00284
5	5%	0,0540	0,00342
6	5%	0,0540	0,00397
7	5%	0,0540	0,00449
8	60%	0,6480	0,05990

La couverture sans rachat serait de 9,2%. Lorsque l'on calcule la somme des MS_i rapporté aux provisions mathématiques initiales, on trouve un quotient égal à 7,32%. On constate donc une diminution du besoin de marge, ce qui relativement surprenant. En fait, ce résultat est dû à deux limites du modèle :

- La première limite provient de l'absence d'adéquation actif-passif : cette adéquation est en pratique obtenue en assurance par l'achat d'obligations, qui peuvent en partie répliquer les engagements futurs. En effet, si l'assureur promet du 4% sur 8 ans, il peut avoir dans son portefeuille une obligation de rendement 4% et d'échéance 8 ans (dans la pratique, il n'est évidemment pas certain de trouver l'actif en question sur le marché, mais l'exemple est donné à titre d'illustration). Dans ce cas, il y a un risque quasi-nul en cas d'absence de rachats, l'introduction de ces derniers induisant un risque de taux, l'assureur devant vendre une partie de ses obligations avant l'échéance.
- Dans le cas où l'actif de l'assureur est un portefeuille action, il n'y a aucun « matching » des flux futurs, seule compte l'incertitude des revenus futurs, qui est moins grande à brève échéance : les rachats diminuent donc cette incertitude en réduisant l'horizon de paiement.
- La seconde limite provient de l'évaluation en marchés complets. En revenant aux calculs de la couverture MS_i d'un rachat à la date i on constate que le terme $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{x}_i]$ ne reflète que très partiellement le risque auquel l'assureur est exposé. En effet, ce dernier n'est parfaitement couvert que dans les cas où x_i reste inférieur à $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{x}_i]$. Nous reviendrons sur ce point dans la partie sur les marchés incomplets : si dans ce cas l'utilisation pratique des résultats théoriques serait simple, leur justification demande quelques développements non triviaux.

On peut aussi constater que le modèle est indifférent aux hypothèses de mise en run-off de l'activité, ou de sa continuité (nouvelle souscription de contrats dans le futur). En effet, la perspective de nouveaux contrats devrait faire diminuer le risque, la vente de l'actif pour payer les sorties de contrats pouvant alors être remplacées par l'agent "cash" des nouveaux entrants, ces derniers prenant alors les droits sur les actifs. Or dans ce modèle, plus

vite l'actif est vendu, moins le risque est grand : il n'y a pas de prise en compte de la gestion actif-passif faite par l'assureur, afin de matcher les flux futurs.

4.3 Le modèle obligataire : « matching » de flux futurs

Dans une première approche, nous avons fait le choix de ne considérer qu'un portefeuille action. Simple à étudier, il ne correspond qu'à une partie de la réalité, 75% à 80% de l'actif d'une compagnie d'assurance vie étant en général constitué d'obligations. En effet, considérons pour simplifier qu'il existe sur le marché des obligations d'échéance 8 ans, fournissant un taux fixe $r_b \geq r_g$. Pour simplifier les calculs, nous supposons que cette obligation ne verse aucun flux avant le terme et verse à l'échéance le nominal capitalisé au taux r_b .

En investissant les provisions mathématiques dans cet actif, l'assureur ne prend donc aucun risque financier en l'absence de rachat. En effet, son investissement lui assure de pouvoir fournir le montant garanti dans 8 ans. Le problème se pose lorsqu'il y a une sortie de contrat : l'assureur doit alors vendre une partie de son actif. S'il y a eu entre temps une hausse des taux d'intérêt, la valeur de l'obligation aura baissé, et l'assureur ne pourra tenir son engagement avec la seule vente de son investissement.

Ce cadre est encore très simple, car il suppose que l'assureur trouve sur le marché les obligations correspondant aux échéances de paiements ($T=8$ ans), ce qui n'est pas toujours le cas. Si l'échéance est supérieure à 8 ans, même en l'absence de rachats, on se retrouve face dans le même cas de figure, où une hausse des taux fragilise l'assureur. Dans le cas où la maturité de l'obligation est inférieure à huit ans, une baisse des taux pose un problème de refinancement, l'assureur ne pouvant trouver sur le marché des produits permettant d'obtenir un rendement égalant celui qu'il recevait avec l'obligation arrivée à terme.

Pour étudier la solvabilité dans ce cadre, il nous faut introduire un modèle de taux d'intérêts : pour rester dans l'esprit Black & Scholes, nous prenons un modèle de Heath Jarrow Morton. Dans ce modèle, le zéro coupon d'échéance T est un actif qui verse 1€ à la date T , son prix à la date t est noté $B(t, T)$, et sa dynamique donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t \\ B(T, T) = 1 \text{ en l'absence d'opportunité d'arbitrage} \end{cases}$$

$\mu(t, T)$ est l'espérance du taux de rendement instantané de $B(t, T)$, et $\sigma(t, T)$ sa volatilité. W_t est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique \mathbb{P} .

5.3.1 Couverture des engagements en l'absence de rachat

Comme précédemment, l'assureur reçoit une prime unique P , garantit un taux technique r_g , avec un taux d'actualisation r_a . Le taux sans risque dépend lui de la maturité et est déduit du prix des zéro-coupons. La provision mathématique constituée par la compagnie à la souscription du contrat est la même que précédemment : $PM_0 = P \cdot (1 + r_g)^8 / (1 + r_a)^8$. Ce montant est investi dans une obligation fournissant un rendement capitalisé au taux r_b : le flux versé à la date $T=8$ ans par cette obligation est donc $(1 + r_b)^8$. Le taux r_b de l'obligation est le taux actuariel du coupon à 8 ans : $B(0, 8) (1 + r_b)^8 = 1$, l'actif de la compagnie est donc constitué d'un nombre N d'obligations :

$$P \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} = N.B(0,8)(1+r_b)^8 = N$$

A la date t , la valeur A_t de l'actif de l'assureur vaut $A_t = P \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} B(t,8)(1+r_b)^8$. A

l'échéance du contrat, on a (car $B(T,T)=1$)

$$A_8 = P \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} (1+r_b)^8$$

On constate que la valeur de l'actif est suffisante pour honorer les engagements pris si et seulement si $r_a \leq r_b$, ce qui est assuré par la réglementation. En l'absence de rachats, le risque financier est donc nul, les flux futurs étant parfaitement "matchés".

4.3.2 Introduction des rachats

Nous nous situons toujours en marchés complets, et la forme des taux de rachat \tilde{x}_i suit toujours celle définie dans le cas d'un actif investi en actions. Ainsi, à la date i , l'assureur doit payer $\tilde{x}_i(1+r_g)^i$, en vendant les actifs mis en représentation des contrats rachetés : $\tilde{x}_i A_i$. La marge initiale doit pouvoir couvrir la perte éventuelle, en générant un flux au moins égal à $(\tilde{x}_i(1+r_g)^i - \tilde{x}_i A_i)^+ = \tilde{x}_i((1+r_g)^i - A_i)^+$. Il s'agit là encore d'un put sur l'actif, constitué ici par un zéro coupon :

$$MS_i = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\Omega^*} \left[e^{-\int_0^i \rho_s ds} \tilde{x}_i \left((1+r_g)^i - \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} B(i,8)(1+r_b)^8 \right)^+ \right]$$

donc (par le théorème de Fubini)

$$MS_i = \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} (1+r_b)^8 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\tilde{x}_i] \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\int_0^i \rho_s ds} \left(\frac{(1+r_a)^8}{(1+r_b)^8 (1+r_g)^{8-i}} - B(i,8) \right)^+ \right]$$

avec :

$$\begin{cases} v = \sqrt{\int_0^i (\sigma(s,8) - \sigma(s,i))^2 ds} \\ K_i = \frac{(1+r_a)^8}{(1+r_b)^8 (1+r_g)^{8-i}} \\ d_0 = \frac{1}{v} \ln \left(\frac{B(0,i)K_i}{B(0,8)} \right) + \frac{1}{2}v \end{cases}$$

donc (preuve en annexe 2)

$$MS_i = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\tilde{x}_i] \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} (1+r_b)^8 [K_i B(0,i) \mathcal{N}(d_0) - B(0,8) \mathcal{N}(d_0 - v)]$$

ou encore :

$$MS_i = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\tilde{x}_i] \left[(1+r_g)^8 B(0,i) \mathcal{N}(d_0) - \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} (1+r_b)^8 B(0,8) \mathcal{N}(d_0 - v) \right]$$

4.3.3 Exemple numérique avec un modèle de volatilité Hull et White

La forme de la volatilité est $\sigma(t, T) = \frac{s}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(T-t)})$, donc

$$\sqrt{\int_0^i (\sigma(s, T) - \sigma(s, i))^2 ds} = s \sqrt{\frac{(e^{2\lambda i} + e^{2\lambda T} - 2e^{\lambda(T+i)})(e^{2\lambda i} - 1)e^{-2\lambda(T+i)}}{\lambda^3}}$$

Avec les valeurs numériques $s=2\%$ et $\lambda=4\%$

On peut alors calculer le besoin de marge lorsque le taux de rachat est de 5% par an, $r_a=r_g=3,5\%$ et $r_b=5\%$.

Tableau 7 : hypothèses

Taux long	$PM(8)$	$B(0,8)$
5%	1,317	0,677

Les résultats sont alors :

Tableau 8 : Evolution de l'exigence de marge pour un contrat – modèle de Hull et White

date	PM	$K(i)$	Courbe taux	$B(0,i)$	v	$d0$	$N(d0)$	$N(d0-v)$	MS_i
0	1	0,677	0,00%	1,000	0,00%				
1	1,035	0,701	1,75%	0,983	11,97%	-0,0826	0,467	0,420	2,86E-03
2	1,071	0,725	3,00%	0,943	14,50%	0,00574	0,502	0,445	3,15E-03
3	1,109	0,750	3,60%	0,899	14,80%	0,09358	0,537	0,478	2,87E-03
4	1,148	0,777	4,10%	0,852	13,68%	0,23743	0,594	0,540	2,16E-03
5	1,188	0,804	4,35%	0,808	11,48%	0,41369	0,660	0,617	1,38E-03
6	1,229	0,832	4,60%	0,764	8,39%	0,79785	0,788	0,762	5,27E-04
7	1,272	0,861	4,80%	0,720	4,54%	1,94772	0,974	0,971	2,25E-05
8	1,317	0,891	5,00%	0,677	0,00%				

La provision mathématique vaut 1 à la souscription, et la somme de options nécessaires pour couvrir les 5% de rachats annuels vaut $\sum_{i=0}^8 MS_i = 0,013$: on a dans ce cas une marge minimale de 1,30%.

On peut regarder la marge pour un contrat en cours, souscrit il y a k années, et couvert par une obligation à maturité 8- k : on a alors pour $i \in \{0..k-8\}$

$$MS^k = \sum_{i=0}^{8-k} MS_i^k$$

$$MS^k = \sum_{i=0}^{8-k} E_Q[\tilde{x}_i^k] \left[(1+r_g)^{k+i} B(0,i)N(d_0^k) - \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} (1+r_b)^8 B(0,8-k)n(d_0-v) \right]^5$$

où

$$\begin{cases} v_k = \sqrt{\int_0^i (\sigma(s, 8-k) - \sigma(s, i))^2 ds} \\ K_i^k = \frac{(1+r_a)^8}{(1+r_b)^8 (1+r_g)^{8-i-k}} \\ d_0^k = \frac{1}{v_k} \ln \left(\frac{B(0, i) K_i^k}{B(0, 8-k)} \right) + \frac{1}{2} v_k \end{cases}$$

On a donc un chargement en fonction de la durée d'ancienneté dans le contrat qui évolue de la manière suivante :

Tableau 9 : Exigence de marge en régime permanent – modèle de Hull et White

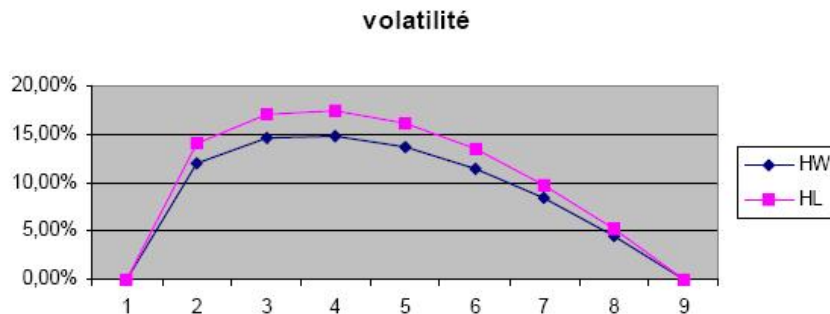
Durée dans le contrat	<i>PM</i>	<i>MS</i>	<i>MS/PM</i>	% de contrat restant en RP	<i>PM</i> en cours en RP	<i>MS(k)</i>
0	1	0,01298	1,30%	100%	1,00	0,0130
1	1,035	0,02506	2,42%	95%	0,98	0,0238
2	1,071	0,04353	4,06%	90%	0,96	0,0392
3	1,109	0,05770	5,20%	85%	0,94	0,0490
4	1,148	0,06263	5,46%	80%	0,92	0,0501
5	1,188	0,05602	4,72%	75%	0,89	0,0420
6	1,229	0,03601	2,93%	70%	0,86	0,0252
7	1,272	0,00000	0,00%	65%	0,83	0,0000
8	1,317	0,00000	0,00%	65%	0,86	0,0000

On constate qu'il y a un besoin de marge plus élevé pour les contrats en cours, souscrits il y a 3 ou 4 ans⁶. Ceci impacte donc le besoin total en régime permanent, qui est alors plus élevé que pour des contrats souscrits dans l'année. Dans notre exemple, le rapport entre la marge et le montant total des provisions mathématiques est de 2,94%, ce qui reste cette fois en dessous des 3% de risques financiers prévus dans l'actuelle réglementation.

4.3.4 Exemple numérique avec un modèle de volatilité Ho et Lee

La forme de la volatilité est $\sigma(t, T) = s \cdot (T-t)$, avec $s=2\%$

Graphique 1 : Volatilité de Hull et White (HW) et de Ho et Lee (HL)



Avec taux long de 5%, on a $PM(8)=1,317$ et $B(0,8)=0,677$, l'exigence de marge avec en régime permanent est calculée dans le tableau ci-dessous.

Tableau 10 : Evolution de l'exigence de marge pour un contrat – modèle de Ho et Lee

date	PM	K(i)	Courbe taux	B(0,i)	v	d0	N(d0)	N(d0-v)	MSi
0	1	0,677	0,00%	1,000	0,00%				
1	1,035	0,701	1,75%	0,983	14,00%	-0,05181	0,476	0,424	3,27E-03
2	1,071	0,725	3,00%	0,943	16,97%	0,02778	0,511	0,444	3,65E-03
3	1,109	0,750	3,60%	0,899	17,32%	0,10333	0,541	0,472	3,37E-03
4	1,148	0,777	4,10%	0,852	16,00%	0,22451	0,589	0,526	2,61E-03
5	1,188	0,804	4,35%	0,808	13,42%	0,37190	0,645	0,594	1,74E-03
6	1,229	0,832	4,60%	0,764	9,80%	0,69639	0,757	0,725	7,40E-04
7	1,272	0,861	4,80%	0,720	5,29%	1,67769	0,953	0,948	5,21E-05
8	1,317	0,891	5,00%	0,677	0,00%				

On obtient cette fois un besoin de marge de 1,54%, ce qui est légèrement supérieur aux 1,30% obtenus avec Hull et White. Par contre, en régime permanent, la différence est nulle, l'écart entre les deux modèles diminuant très vite avec l'ancienneté dans le contrat : le chiffre de 3% des PM est donc relativement pertinent sous ces hypothèses.

4.3.5 Développements possibles

Nous venons de regarder le cas où les obligations achetées ont pour maturité l'échéance du contrat. Or pratiquement, ce matching parfait des flux futurs n'est pas toujours réalisable, toutes les maturités n'étant pas disponibles sur le marché. L'approche précédente par des Puts reste toutefois encore valable (si l'échéance de l'obligation est inférieure à 8 ans, l'option est un call), et les calculs sont de la même forme.

D'autre part, il est possible par cette méthode d'évaluer la marge nécessaire pour couvrir un mécanisme de PB. En effet, si l'actif de l'assureur est investi dans une action S_i dont 85% (minimum réglementaire) des plus-values sont redistribuées en revalorisation de la PM, alors, pour un contrat qui vient d'être souscrit et sans sortie avant les 8 ans :

$$MS = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\rho t} \left[\prod_{i=1}^T \left(1 + r_g + 0.85 \left[\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} - r_g \right]^+ \right) - S_T \right]^+ \right]$$

$$MS = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\rho t} \left[\prod_{i=1}^T \left(1 + r_g + 0.85 [r_i - r_g]^+ \right) - S_T \right]^+ \right]$$

Cette espérance sous probabilité risque neutre s'évalue par monté-carlo, lorsque l'on connaît le changement de probabilité $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$ (par le modèle de Black & Scholes ou méthode de Essher présentée en annexe 3).

4.4 Couverture imparfaite : solvabilité par quantile dans le cas d'un portefeuille « actions »

Jusqu'à présent, nous avons vu la marge de solvabilité comme une option que l'assureur doit prendre afin d'être certain de tenir ses engagements. En marché complet, en

supposant que ces dérivés existent, on peut couvrir de manière certaine les flux futurs. Or les valeurs extrêmes pouvant être prises par le passif (valeurs élevées), mais surtout par l'actif (valeurs très faibles) augmentent fortement le prix de la couverture. Cela sera encore plus perceptible en marché incomplet. Nous allons donc nous pencher sur la couverture par quantile, qui permet de prévoir la marge suffisante permettant de tenir les engagements dans 95 ou 99% des cas. Cette étape est d'autant plus intéressante que, dans l'esprit, elle se rapproche de l'étude en marché incomplet : on va chercher à sur-répliquer le passif sous un certain nombre de contraintes.

Le cadre général de la couverture par quantile est présenté en annexe 4.

4.4.1 Définition de l'horizon de la couverture imparfaite :

Dire que l'on désire couvrir les engagements au quantile α n'est pas une donnée suffisamment précise pour effectuer le calcul. En effet, il y a plusieurs manières de comprendre cet objectif. La première qui vient à l'esprit est de dire que ce sont les flux à échéance qui doivent être couverts au quantile α . Or on voit tout de suite une limite forte : un même engagement ne conduit pas nécessairement des flux versés à une date unique.

Nous définirons donc la couverture au quantile α à l'horizon t comme le prix minimum d'une stratégie permettant d'obtenir à la date t une valeur de portefeuille supérieure dans au moins $\alpha\%$ à la valeur en t des engagements futurs. En outre, nous prendrons pour horizon 1 an. Fixer un tel horizon revient à dire que la marge de solvabilité est suffisante 99 années sur 100, et que l'année où elle ne l'est pas, il faut remettre du capital.

Procéder ainsi a deux avantages :

1. L'insuffisance n'est pas constatée au moment de payer les engagements, comme ce à quoi conduit une couverture en pourcentage des flux futurs.
2. La période de 1 an correspond à la fréquence des bilans, et donc des réévaluations des engagements. C'est donc plus particulièrement à ce moment que la marge de solvabilité peut-être renforcée.

4.4.2 Calcul pour un contrat qui vient d'être souscrit :

Nous nous situons de nouveau dans le modèle simple, en l'absence de rachats, où la marge s'exprime par :

$$MS = Put(S_0 = P \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8}, K = P(1+r_g)^8, \rho, \sigma)$$

$$MS = P(1+r_g)^8 e^{-8\rho} \mathcal{N}(-d_2) - P \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} \mathcal{N}(-d_1)$$

$$\text{où } \begin{cases} d_1 = \frac{-4 \ln(1+r_a) + 4(\rho + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{2}} \\ d_2 = d_1 - 2\sqrt{2}\sigma \end{cases}$$

A la date t quelconque, on sait que

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} = P \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

Donc à la date 1, la valeur aléatoire de l'actif est :

$$s = S_1(u) = P e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)} \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} e^{\sigma u}$$

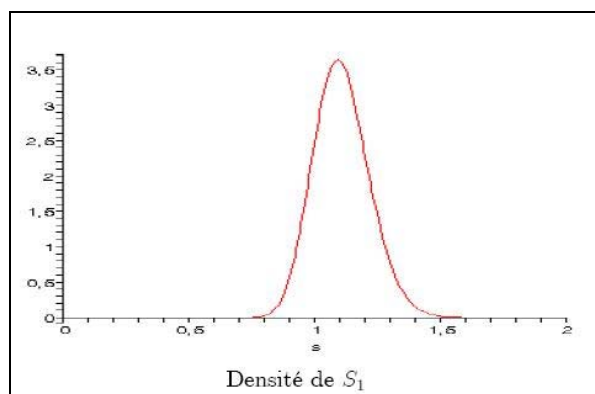
où $u \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$, donc sa densité $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$

$$\text{On a } u = g(s) = \frac{1}{\sigma} \left[\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu \right) + \ln \left(\left(\frac{1+r_g}{1+r_a} \right)^8 \frac{s}{P} \right) \right]$$

Or $f(u) = f(g(s)) \frac{dg(s)}{ds} ds$, on a donc la densité de la loi de l'actif : $f(g(s)) \frac{dg(s)}{ds}$

La densité de S_1 est donc, pour $\mu=10\%$, $\sigma=10\%$, $r_a=r_g$ et $P=1$

Graphique 2 : Densité de S_1



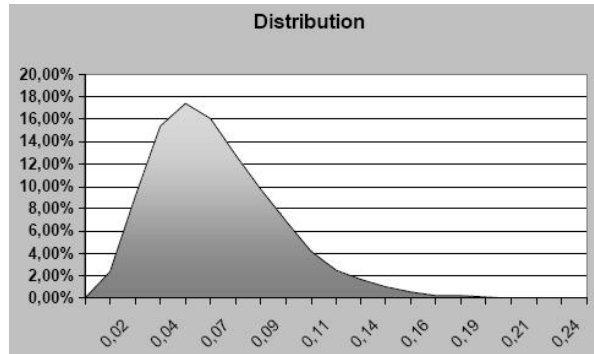
A l'issue de la première année, l'actif S_1 de l'assureur vaudra s , et ses engagements seront le montant de la marge permettant d'assurer le flux $((1+r_g)^8 - S_8)^+$ à échéance. Le montant de cette marge sera donc :

$$MS(s) = Put(s, K = P(1+r_g)^8, \rho, \sigma) = P(1+r_g)^8 e^{-\rho} \mathcal{N}(-d_2) - s \mathcal{N}(-d_1)$$

$$\text{où } \begin{cases} d_1 = \frac{\ln\left(\frac{s}{P(1+r_g)^8}\right) + 7\left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{7}} \\ d_2 = d_1 - \sqrt{7}\sigma \end{cases}$$

Comme nous connaissons la distribution de s , nous connaissons donc celle de $MS(s)$.
Pour $r_a=r_g=80\%$, $r=5\%$ (donc $\rho=4,88\%$), la densité en probabilité historique vaut :

Graphique 3 : Densité de la marge en probabilité historique



Ici

$$\frac{d\mathbb{P}_1^*}{d\mathbb{P}_1} = e^{-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\mu_s - r_s}{\sigma_s}\right)^2 ds - \int_0^1\left(\frac{\mu_s - r_s}{\sigma_s}\right) dW_s} = e^{-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{10\% - 4,88\%}{10\%}\right)^2 ds - \int_0^1\left(\frac{10\% - 4,88\%}{10\%}\right) dW_s}$$

$$\frac{d\mathbb{P}_1^*}{d\mathbb{P}_1} = e^{-0,131072 - 0,512\int_0^1 dW_s}$$

On peut donc calculer par monte carlo $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [e^{-\rho} MS_1 | \mathcal{F}_0] = 7,48\%$ que l'on peut comparer à la valeur obtenue avec la formule du put de Black & Scholes : 7,54%. Le quantile à 99% de $e^{-\rho} MS_1$ vaut 0,40664 et celui à 95% 0,23363 : on a donc les valeurs de la marge à 99% et à 95%, pour $\mu=10\%$, $\sigma=10\%$, $r=5\%$ $r_a=r_g=80\%$. r :

$$MS_0^{95\%} = 6,00\%.PM_0$$

$$MS_0^{99\%} = 6,96\%.PM_0$$

Pour $r=4\%$, on rappelle que $MS_0=8,17\%$. Par quantile, on obtient :

$$MS_0^{95\%} = 6,25\%.PM_0$$

$$MS_0^{99\%} = 7,42\%.PM_0$$

4.4.3 Calcul en régime permanent :

Cette fois, nous considérons l'ensemble des générations k de contrats présents dans le portefeuille à la date d'aujourd'hui. Un contrat souscrit il y a k années nécessite une marge

égale à $Put\left(S = P\frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^{8-k}}s, K = P(1+r_g)^8, \rho, \sigma\right)$ avec $S_0=1$. La valeur de ce même put à la date 1 vaudra :

- pour $k < 7$:

$$MS^k(s) = Put\left(P\frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^{8-k}}s, K = P(1+r_g)^8, \rho, \sigma\right)$$

$$MS^k(s) = P(1+r_g)^8 e^{-(8-k-1)\rho} \mathcal{N}(-d_2) - s \cdot \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^{8-k}} \mathcal{N}(-d_1)$$

$$\text{où } \begin{cases} d_1 = \frac{\ln\left(\frac{s}{P(1+r_g)^8}\right) + (7-k)\left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{7-k}} \\ d_2 = d_1 - \sqrt{7-k}\sigma \end{cases}$$

- pour $k=7$, la marge nécessaire n'est plus un put, mais le flux $\left(P(1+r_g)^8 - \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8}Ps\right)^+ = P(1+r_g)^8\left(1 - \frac{1}{(1+r_a)^8}s\right)^+$, qu'il s'agit donc d'évaluer à 90 ou 95%

On a donc finalement :

$$MS(s) = \sum_{i=0}^7 MS^k(s) + P(1+r_g)^8\left(1 - \frac{1}{(1+r_a)^8}s\right)^+$$

$$MS(s) = \sum_{i=0}^7 Put\left(P\frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^{8-k}}s, K = P(1+r_g)^8, \rho, \sigma\right) + P(1+r_g)^8\left(1 - \frac{1}{(1+r_a)^8}s\right)^+$$

Par Monte Carlo avec $r=4\%$, on obtient un ratio MS/PM égal à 5,60%, celui obtenu analytiquement étant de 5,49%. On a cette fois :

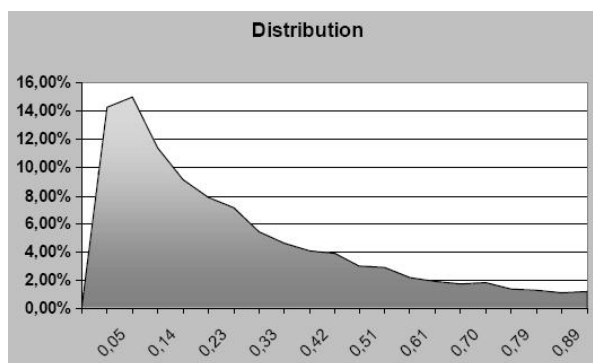
$$MS_0^{95\%} = 3,90\%.PM_0$$

$$MS_0^{99\%} = 4,90\%.PM_0$$

Si l'on cherche en terme de quantile ce que les 4% réglementaires valent, on a une couverture à 96% environ, et si l'on ne considère que le risque financier de 3%, on a 88% de couverture à 1 an.

Sur 3000 simulations, on peut constater que la queue de la distribution de la marge est très épaisse : la quantile à 95% est 2,11 et n'apparaît pas sur le graphique :

Graphique 4 : Distribution de la Marge en régime permanent



4. ETUDE EN MARCHÉ INCOMPLET

5.1. Le pourquoi de l'étude en marché incomplet

On a pu voir dans l'étude en marché complet la grande dépendance qu'il y a entre valeur du passif et actifs présents dans le portefeuille. Ces actifs interviennent dans les outils de couverture (les puts en l'occurrence), mais aussi dans le calcul de la probabilité risque-neutre. Or, en marché complet, cette probabilité risque-neutre est supposée unique, c'est à dire que la seule information sur la valeur des actifs à un instant t permet de déterminer l'état du monde dans lequel on est. Or, en assurance, il n'est pas possible de décrire tous les états monde en fonction des seuls actifs : l'aléa sur la vie et le comportement des assurés (sortie de contrats par rachats ou décès) n'est pas nécessairement - voire pas du tout pour ce qui est des décès - corrélé à la dynamique des marchés financiers. Il y a donc là une forte source d'incomplétude des marchés.

Une autre raison pour faire une étude en marché incomplet provient de l'impossibilité pour un assureur de gérer dynamiquement son portefeuille, et donc de mettre en oeuvre la stratégie de couverture. De plus, le recours aux produits dérivés est limité en assurance, et ceux nécessaires à la couverture du portefeuille ne sont pas toujours disponibles sur le marché.

5.2. Bases théoriques de l'étude en marchés incomplets

En marché incomplet, tous les états du monde ne peuvent être décrits par les actifs disponibles sur le marché. Il n'existe donc pas une probabilité risque-neutre unique. Ainsi, sur l'ensemble des états du monde munis d'une probabilité et d'une filtration naturelle $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$, l'ensemble des états des actifs du marché est une partie de Ω , $(\Omega_S, \mathbb{P}^S, \mathcal{G})$.

Dans ce cas, il y a plusieurs probabilités risque-neutres – ou mesures martingales équivalentes¹ – et le prix d'un état de la nature particulier n'est pas unique, mais appartient à un intervalle $[\underline{p}, \overline{p}]$. Cette fourchette correspond pour un flux aléatoire futur à la date T , F_T \mathcal{F}_T -mesurable :

¹ Une mesure martingale équivalente est une probabilité équivalente à la probabilité historique sous laquelle les processus des actifs divisés par l'actif de référence sont des martingales

$$\underline{p} = \inf_{\mathbb{P}_0^* \in \mathcal{P}_0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0^*} \left[\frac{F_T}{S_0^T} \middle| \mathcal{F}_0 \right]$$

et

$$\bar{p} = \sup_{\mathbb{P}_0^* \in \mathcal{P}_0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0^*} \left[\frac{F_T}{S_0^T} \middle| \mathcal{F}_0 \right]$$

En posant $\mathcal{P}_t = \left\{ \mathbb{P}_t^* \mid \mathbb{P}_t^* \sim \mathbb{P}_t^\Omega \text{ et } \mathbb{P}_t^* \text{ probabilité risque neutre} \right\}$ où \mathbb{P}_t^Ω est la probabilité historique à la date t sur les événements futurs² et S^0 l'actif de référence pour l'actualisation (appelé encore nominal).

A ce stade, on peut remarquer que l'évaluation en marché complet n'est pas complètement hors sujet pour donner un prix : celui-ci se situe dans la fourchette. Toutefois, dans une optique de couverture, c'est la borne supérieure \bar{p} de l'intervalle que nous cherchons : ce prix correspond au prix minimum d'une stratégie auto financée qui sur réplique le flux F . Une stratégie de réplication correspond à la définition d'un processus vectoriel $\xi(t) = (\xi_t^0, \dots, \xi_t^n)$, où $n+1$ est le nombre d'actifs S^0, \dots, S^n disponibles sur le marché, et telle que pour tout t

$$V_t = \sum \xi_t^i S_t^i$$

avec

$$\left\langle \frac{d\xi_t}{dt}, S_t \right\rangle \leq 0 \quad (\text{Contrainte d'autofinancement})$$

et

$$\frac{V_t}{S_t} \geq \sup_{\mathbb{P}_t^* \in \mathcal{P}_t} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_t^*} \left[\frac{F_T}{S_0^T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{Contrainte de sur réplication})$$

\bar{p} est alors la plus petite valeur initiale V_0 des portefeuilles de sur réplication possible. $\frac{V}{S_0}$ est alors la plus petite \mathcal{P} - surmartingale dominant $\frac{F}{S_0}$. Elle est encore appelée enveloppe de Snell supérieure de $\frac{F}{S_0}$ et notée $ess \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[\frac{F}{S_0} \right]$.

² C'est à dire $\forall A \in \Omega \quad \mathbb{P}_t^\Omega [A] = E[1_A \mid \mathcal{F}_t]$

5.3. Cas discret : vers un modèle de solvabilité en assurance vie

5.3.1. Cadre général

Etudier le cas discret nous rapproche de ce qui se passe en réalité, avec une réallocation d'actifs qui ne se fait pas continûment. De plus nous avons vu que nous étions capables, grâce à une transformation de Esscher, de calculer la probabilité risque-neutre. Nous verrons en effet qu'il est possible, à partir la probabilité risque neutre sur Ω_S , de résoudre le problème en marché incomplet.

Considérons alors un processus aléatoire E , représentant les engagements de l'assureur à chacune des périodes ($E_t \geq 0$). L'engagement de l'assureur à la date t se décompose de deux manières : ce qu'il doit payer immédiatement F_t , et ses engagements futurs, qui sont la valeur en t de E_{t+1} . Comme nous sommes en marchés incomplets, E n'est a priori pas répliquable, et le coût de la couverture K_0 est supérieure aux provisions mathématiques initiales : on peut donc ici voir la marge de solvabilité comme étant le coût de sur réplification du passif E .

Pour évaluer la marge $(\tilde{V}_0 - PM_0)$, nous allons rechercher la plus petite valeur initiale d'un portefeuille qui sur réplique le passif w :

$$\tilde{V}_0 = \inf_{\substack{V \in \mathcal{V} \\ \forall t \in \mathbb{Z} \quad V_t \geq E_t}} V_0$$

où $\mathcal{V} = \left\{ V \mid \forall t \in \mathbb{Z} \exists \xi_t \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } V_t = \sum \xi_t^i S_t^i = \langle \xi_t, .S_t \rangle \text{ et } \langle \xi_t, .S_t \rangle \leq \langle \xi_{t-1}, .S_t \rangle \right\}$

En introduisant $U = \frac{V}{S^0}$ et $H = \frac{E}{S^0}$ pour travailler sur l'ensemble \mathcal{P} des mesures martingales équivalentes, la solution U au problème d'optimisation est définie par récurrence descendante :

$$\begin{cases} \tilde{U}_T = H_T \\ \tilde{U}_t = H_t \vee \sup_{\mathbb{P}_t^* \in \mathcal{P}_t} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_t^*} [\tilde{U}_{t+1} | \mathcal{F}_t] \end{cases}$$

Pour simplifier le problème, regardons ce qu'il donne en $T-1$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{T-1} &= H_{T-1} \vee \sup_{\mathbb{P}_{T-1}^* \in \mathcal{P}_{T-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T-1}^*} [\tilde{U}_T | \mathcal{F}_{T-1}] \\ &= H_{T-1} \vee \sup_{\mathbb{P}_{T-1}^* \in \mathcal{P}_{T-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T-1}^*} [H_T | \mathcal{F}_{T-1}] \\ &= \frac{E_{T-1}}{S_{T-1}^0} \vee \sup_{\mathbb{P}_{T-1}^* \in \mathcal{P}_{T-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T-1}^*} \left[\frac{E_T}{S_T^0} | \mathcal{F}_{T-1} \right] \\ &= \frac{F_{T-1} + \text{engagements futurs}}{S_{T-1}^0} \vee \sup_{\mathbb{P}_{T-1}^* \in \mathcal{P}_{T-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T-1}^*} \left[\frac{E_T}{S_T^0} | \mathcal{F}_{T-1} \right] \end{aligned}$$

Or la valorisation à la date $T-1$ des engagements futurs est telle que

$$\frac{\text{engagements futurs}}{S_{T-1}^0} = \sup_{\mathbb{P}_{T-1}^* \in \mathcal{P}_{T-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T-1}^*} \left[\frac{E_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_{T-1} \right]$$

Donc

$$\frac{\tilde{V}_{T-1}}{S_{T-1}^0} = \frac{F_{T-1}}{S_{T-1}^0} + \sup_{\mathbb{P}_{T-1}^* \in \mathcal{P}_{T-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T-1}^*} \left[\frac{E_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_{T-1} \right]$$

On a, en procédant de la même manière :

$$\frac{\tilde{V}_{t-1}}{S_{t-1}^0} = \frac{F_{t-1}}{S_{t-1}^0} + \sup_{\mathbb{P}_{t-1}^* \in \mathcal{P}_{t-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{t-1}^*} \left[\frac{\tilde{V}_t}{S_t^0} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right]$$

Si cette formule permet en théorie de donner la valeur de \tilde{V}_0 par récurrence descendante, il faut connaître l'ensemble des mesures martingales équivalentes, ce qui n'est pas simple dans le cas général. Nous allons maintenant regarder un cas particulier où la difficulté peut être surmontée.

5.3.2. Résolution formelle avec des rachats indépendants de l'actif

Reprenons les mêmes notations que pour la partie en marché complet :

- \mathbb{Q} la probabilité historique du processus X , auquel est associée la filtration \mathcal{H} sur l'ensemble des états de la nature Ω_X ;
- \mathbb{P} la probabilité historique du brownien W , auquel est associée la filtration \mathcal{G} sur l'ensemble des états de la nature Ω_S ;
- \mathbb{P}^* la probabilité risque neutre pour S , équivalente à \mathbb{P} ;
- on peut définir la filtration relative à l'ensemble de l'information disponible à une date donnée : $\mathcal{F}_t = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{G}_t$.

Si les x_i sont indépendants de l'actif, alors Ω_X et Ω_S sont disjoints, et l'ensemble des états de la nature Ω est défini par :

$$\Omega = \Omega_X \otimes \Omega_S = \{ \omega = (\omega_X, \omega_S) \mid \omega_X \in \Omega_X, \omega_S \in \Omega_S \}$$

La probabilité sur Ω est alors la probabilité \mathbb{P}^Ω définie par

$$d\mathbb{P}^\Omega(\omega_X, \omega_S) = d\mathbb{Q}(\omega_X) d\mathbb{P}(\omega_S)$$

L'ensemble $\mathcal{P}_t = \left\{ \mathbb{P}_t^{\Omega^*} \mid \mathbb{P}_t^{\Omega^*} \sim \mathbb{P}_t^{\Omega} \text{ et } \mathbb{P}_t^{\Omega^*} \text{ probabilité risque neutre} \right\}$ peut alors se réécrire

$$\mathcal{P}_t = \left\{ \mathbb{P}_t^{\Omega^*} \mid d\mathbb{P}_t^{\Omega^*}(\omega_X, \omega_s) = d\mathbb{Q}'(\omega_X) d\mathbb{P}^*(\omega_s) \text{ avec } \mathbb{Q}' \sim \mathbb{Q} \right\}$$

où \mathbb{P}^* est l'unique probabilité risque neutre sur Ω_s .

On peut alors montrer que si G_t est un flux positif répliquable sur S , alors on a pour tout $s \leq t$:

$$\sup_{\mathbb{P}_s^{\Omega^*} \in \mathcal{P}_s} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s^{\Omega^*}} [x_t G_t \mid \mathcal{F}_s] = \overline{x_{t|s}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s^*} [G_t \mid \mathcal{G}_s]$$

où $\overline{x_{t|s}}$ est la borne supérieure du support $I_{x_t | \mathcal{H}_s}$ de la densité de la variable aléatoire $x_t \mid \mathcal{H}_s$:

$$\overline{x_{t|s}} = \sup_{x \in [0,1]} \left\{ x \mid \mathbb{Q}_s [x_t \geq x] > 0 \right\} = \sup_{x \in I_{x_t | \mathcal{H}_s}} \{x\}$$

Donnons le principe de la preuve lorsque $\frac{d\mathbb{Q}}{dx}$ existe et est continue sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{P}_s^{\Omega^*} \in \mathcal{P}_s} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s^{\Omega^*}} [x_t G_t \mid \mathcal{F}_s] &= \sup_{\mathbb{Q}' \sim \mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s^{\Omega^*} | d\mathbb{P}_t^{\Omega^*}(\omega_X, \omega_s) = d\mathbb{Q}'(\omega_X) d\mathbb{P}^*(\omega_s)} [x_t G_t \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \sup_{\mathbb{Q}' \sim \mathbb{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'_s} [x_t \mid \mathcal{H}_s] \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s^*} [G_t \mid \mathcal{G}_s] \right\} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s^*} [G_t \mid \mathcal{G}_s] \sup_{\mathbb{Q}' \sim \mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'_s} [x_t \mid \mathcal{H}_s] \end{aligned}$$

Comme \mathbb{Q}' et \mathbb{Q} sont équivalentes, elles ont le même support (inclus dans $[0,1]$), donc

$$\sup_{\mathbb{Q}' \sim \mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'_s} [x_t \mid \mathcal{H}_s] \leq \overline{x_{t|s}}$$

Pour montrer l'égalité considérons la suite des probabilités \mathbb{Q}_s^n équivalentes à \mathbb{Q}_s et telles que

$$\frac{d\mathbb{Q}_s^n}{dx}(x) = \frac{e^{-2^n(x-\overline{x_{t|s}})^2}}{\int_{[0,1]} e^{-2^n(u-\overline{x_{t|s}})^2} \frac{d\mathbb{Q}_s}{dx}(u) du} \frac{d\mathbb{Q}_s}{dx}(x)$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_s^n} [x_t \mid \mathcal{H}_s] = \overline{x_{t|s}}$$

CQFD

Il est donc maintenant possible de résoudre le programme

$$(*) \begin{cases} \frac{\tilde{V}_{t-1}}{S_{t-1}^0} = \frac{F_{t-1}}{S_{t-1}^0} + \sup_{\mathbb{P}_{t-1}^* \in \mathcal{P}_{t-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{t-1}^*} \left[\frac{\tilde{V}_t}{S_t^0} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ F_t = x_t (1+r_g)^t \\ \tilde{V}_T = F_T = \left(1 - \sum_{i=0}^{T-1} x_i \right) (1+r_g)^T \end{cases}$$

Si l'actif sans risque est défini sur une période par un taux r fixe, en appliquant deux fois la récurrence descendante, il apparaît dans le calcul le terme :

$$\sup_{\mathbb{Q}' \sim \mathbb{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'_{T-2}} \left[x_{T-1} (1+r_g)^{T-1} + \frac{1}{1+r} (1+r_g)^T \left(1 - \sum_{i=1}^{T-1} x_i \right) \middle| \mathcal{H}_{T-2} \right] \right\}$$

Dans le cas de base où il n'y a pas de risque de taux, on se heurte pour appliquer directement (*) au problème posé par la distribution de la variable aléatoire $x_{T-1} (1+r_g)^{T-1} + \frac{1}{1+r} (1+r_g)^T \left(1 - \sum_{i=1}^{T-1} x_i \right)$ dont la borne supérieure du support n'est pas simple à déterminer. Le problème est le lien entre les x_i : il est évident que x_i n'est pas indépendant de x_{i-1} , x_{i-2} , ..., x_1 , puisque $\sum_{i=1}^{T-1} x_i = 1$. Il est possible de résoudre problème en posant davantage d'hypothèses, chose que nous ne ferons pas ici, cela demandant une grande puissance de calcul, et les résultats obtenus seraient trop dépendants des hypothèses de départ. Pour l'instant, la solution proposée dans la partie marché complet permet toutefois de contourner le problème en ne regardant que la couverture d'un flux à un instant t : le calcul est à la fois plus simple, et plus prudent, car il va nous faire apparaître le maximum de rachats à chaque date, sans hypothèse sur les corrélations entre ces rachats.

5.3.3. Calcul de la marge dans le modèle obligataire et extensions possibles

Rappelons la forme de la valeur de la marge de solvabilité permettant de couvrir

$$MS_i = E_{\mathbb{P}_{\Omega}^*} \left[e^{-\int_0^i \rho_s ds} \tilde{x}_i \left((1+r_g)^i - \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} B(i,8) (1+r_b)^8 \right)^+ \right]$$

donc en appliquant (31), on a :

$$MS_i = \frac{(1+r_g)^8}{(1+r_a)^8} (1+r_b)^8 \overline{x_{i|0}} E_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\int_0^i \rho_s ds} \left(\frac{(1+r_a)^8}{(1+r_g)^{8-i} (1+r_b)^8} - B(i,8) \right)^+ \right]$$

Finalement, le calcul est identique à celui mené en marché complet, à la différence que le nombre de rachats n'est plus le nombre moyen, mais le nombre maximum possible à une date

donnée. Ainsi, si on reprend l'exemple donné en première partie avec le modèle de Hull et White, avec un nombre moyen de rachats égal à 5%, on obtenait une marge de 2,94% : si l'on suppose que le nombre maximum de rachat est de 10% par an, la marge devient alors 4,92%. Ce montant ne correspond plus à une couverture en moyenne, mais à une couverture dans le pire des cas : c'est la différence qu'il y a entre un prix à l'intérieur de la fourchette $[\underline{p}, \overline{p}]$ et sa borne supérieure.

On a supposé jusqu'à maintenant que les rachats étaient indépendants de l'actif : cette hypothèse a été vérifiée sur les données de rachats étudiés précédemment. Toutefois, il peut exister dans certains cas (cf Cherif et Pras) une corrélation entre le taux de rachats et la différence entre taux long et taux court. Une forme proposée est $x_i(k, r_i) = g(i, k) + a(r_i - r_\infty)^+$ où k est la génération du contrat et r_∞ le taux long. On peut même généraliser pour les $x_i(k, r_i) = g(i, k) + f_i$ où f_i est répliquable par les actifs du marché. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{P}_s^{\Omega^*} \in \mathcal{P}_s} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s^{\Omega^*}} [x_t G_t | \mathcal{F}_s] &= \sup_{\mathbb{Q}' \sim \mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s^{\Omega^*} | d\mathbb{P}_s^{\Omega^*}(\omega_X, \omega_s) = d\mathbb{Q}'(\omega_X) d\mathbb{P}_s^*(\omega_s)} [(g(t, k) + f_t) G_t | \mathcal{F}_s] \\ &= \sup_{\mathbb{Q}' \sim \mathbb{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'_s} [g(t, k) | \mathcal{H}_s] \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s^*} [f_t G_t | \mathcal{G}_s] \right\} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s^*} [f_t G_t | \mathcal{G}_s] \sup_{\mathbb{Q}' \sim \mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'_s} [g(t, k) | \mathcal{H}_s] \end{aligned}$$

5. CONCLUSION

Le contexte de l'approche de la solvabilité est multiple et il est difficile de trouver une approche standard qui soit suffisamment flexible pour prendre en compte les spécificités de chaque société. Une approche à deux niveaux telle que celle envisagée par la FSA est intéressante car en complément d'un niveau minimal de capital calculé d'une manière standard, des tests de sensibilité sont effectués comme depuis peu dans la réglementation française et un suivi spécifique des risques au travers du développement de modèles internes est encouragé. La validation de ceux-ci pour le calcul du capital minimal requis pose tout de même des problèmes importants dans la mesure où il n'existe pas de typologie commune de risques en assurance vie aujourd'hui et où le contrôle a posteriori de ceux-ci semble encore plus sujet à caution que celui des modèles de risques de marché en banque par exemple. Les principaux risques qui doivent être pris en compte quel que soit le modèle choisi sont le risque de rachat, le risque de marché action et le risque de taux.

Le principal résultat porte sur l'évolution des taux et de la valeur de marché des actions. La marge actuelle qui représente 4% des provisions mathématiques pour les contrats en euros (dont 1% de risque opérationnel) apparaît insuffisante dans le cas d'une couverture complète des engagements par des actions et juste suffisante en cas de couverture par des obligations avec des rachats annuels de 5%, valeur qui est plus réaliste que prudente. On a aussi pu déterminer une approximation linéaire du besoin minimal en marge en couverture complète sans risque de rachat, connaissant le taux sans risque r et la volatilité de l'actif σ sous l'hypothèse de rendements normaux de la forme :

$$\boxed{\text{Marge} = \text{provisions mathématiques} * (a - b.r + c.\sigma)}$$

Les éléments qui ressortent de cette étude, au delà du montant des engagements réglementés, pour le calcul d'un minimum de marge de solvabilité sont la nature des actifs qui

sont en représentation de ceux-ci (rendement, volatilité,...), le taux de rachat moyen sur le contrat qui peut varier de manière importante suivant les caractéristiques de celui-ci et le montant des encours par année de souscription et son évolution.

Dans la suite, nous avons vu que l'étude en couverture imparfaite permet de fournir un outil intéressant pour comparer le niveau de couverture de la marge actuelle : sur le cas des actions, la marge permet de couvrir à 86% (et dans le cas d'une stratégie optimale...).

La dernière partie du travail, effectuée en marchés incomplets, reste elle essentiellement théorique. Elle permet toutefois de poser des résultats mathématiques qui ne sont pas triviaux, et qui peuvent être exploités dans le cadre d'un modèle plus précis, avec une puissance de calcul relativement importante. Ces quelques développements présentés ont été obtenus en travaillant à partir de résultats très théoriques, les exemples concrets d'évaluation en marchés incomplets restant à ce jour quasiment inexistant : rechercher dans cette direction présente donc le double intérêt de répondre à notre problème initial et de proposer de nouvelles méthodes d'évaluation sur un sujet peu traité.

6. BIBLIOGRAPHIE

- P. Artzner, Philippe, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath (1999) "Coherent Measures of Risk", *Mathematical Finance* 9 July 1999 203-228
- T. Cherif, I. Pras "Evaluation de l'option de rachat anticipé dans les contrats d'assurance vie" (1997)
- P. Priaulet, L. Martellini (2004) "Produits de taux d'intérêts - Méthode dynamique d'évaluation et de couverture", *Economica* 2ème édition
- Kupiec, Paul H. (1995) "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models." *Journal of Derivatives* 3 (Winter), 73-84H. Bühlmann, F. Delbaen P. Embrechts, A.N. Shiryaev (1998) "On Esscher transforms in discrete finance models". *ASTIN Bulletin* 28 171-186
- Site de la BIS (Bank for International Settlements) <http://www.bis.org> (Bâle 2)
- Site de l'Union européenne :
http://europa.eu.int/comm/internal_market/insurance/index_fr.htm
- CP195: Enhanced capital requirements and individual capital assessments for life insurers (<http://www.fsa.gov.uk/pubs/cp/195/>)
- N. Gautron Cours d'actuariat retraite et assurance vie, ENSAE
- M. Bossy, N. Pistre, D. Talay (1997) "Etude numérique de sensibilités du bilan d'une compagnie d'assurance dans le cadre d'un contrat avec option de sortie" *Banques et Marché*, 28:21-31
- KPMG "étude des mécanismes d'évaluation de la situation financière globale des entreprises d'assurance dans le cadre de la surveillance prudentielle", http://europa.eu.int/comm/internal_market/insurance/solvency/solvency2-study_fr.htm
- F. Levallois, "Couverture par quantiles" (1999) - Mémoire d'actuariat
- O. Pequeux, S. Merlus (2000) "Les garanties planchers dans les contrats d'assurance vie en unités de compte" Mémoire d'actuariat
- H. de Cayeux et G. Autier, "Garanties implicites d'un contrat d'assurance vie en euros" (2002) - Mémoire d'actuariat
- H. Föllmer et A. Schied, "Martingale Methods in Mathematical Finance : An Introduction in Discrete Time" – 2001

ANNEXE 1 : MODELISATION DES RACHATS

1. Etat de l'art

Les assureurs doivent faire face au risque de rachat des contrats qui est inscrit dans le code des assurances.

Imaginons un assureur qui se couvre avec une obligation, si les taux montent, la valeur de l'obligation baisse. Si l'assuré rachète son contrat à ce moment-là l'assureur doit être en mesure de lui verser la somme qu'il lui doit, qui est indépendante de la valeur de l'obligation à cet instant. Le nombre de rachats à une date donnée est certes en partie corrélée négativement aux taux offerts sur les marchés financiers mais les souscripteurs d'assurance vie n'ont pas un comportement absolument rationnel et ne sont pas identiques; il apparaît donc intéressant d'étudier des rachats partiels et non des rachats totaux.

Il faut aussi garder à l'esprit que les modèles macroéconomiques de rachats ne captent que la tendance générale au travers de la composante âge du contrat et des conditions générales des marchés et de l'économie. D'autres éléments comme l'âge des assurés, leur niveau d'imposition ou un licenciement peuvent influencer de manière microéconomique la décision de racheter un contrat d'assurance vie. En effet si les assurés ne comparaient que le rendement de leur contrat d'assurance vie à celui des marchés, il y aurait un rachat massif de tous les contrats au même moment quand le rendement du marché deviendrait supérieur à ce qu'ils peuvent attendre de leur contrat ce qui ne se retrouve pas empiriquement.

2 Etude empirique

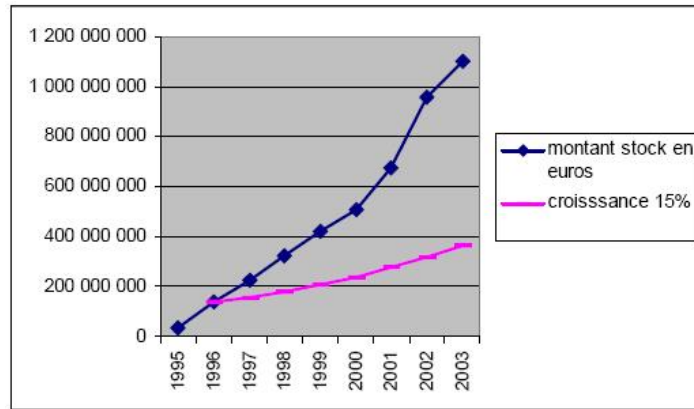
2.1 Les produits

Contrat A

Le contrat A est un produit lancé en 1995, avec une politique de souscription volontariste, c'est le produit le plus vendu par la société et les encours sont en constante augmentation comme le montre le graphique suivant. Ce contrat d'assurance vie a :

- une durée de vie de 25 ans, prorogable par tacite reconduction mutuelle ;
- un montant initial minimum de 1530 euros à la souscription ;
- les versements sont libres avec un montant minimal pendant 15 ans (de 240 euros en 2004) ;
- les frais sont de 4% sur chaque versement et de 0,05% de l'épargne acquise chaque mois ;
- pas de pénalité de rachat ;
- le taux minimum garanti est au moins égal à 110% du livret A et au plus égal à 75% du rendement moyen des actifs de la société.

Graphique 5 : Croissance des encours du contrat A depuis son lancement



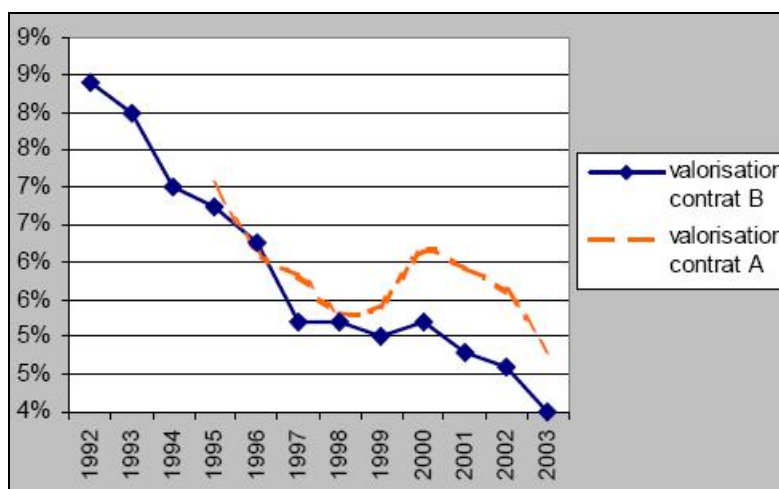
Contrat B

Les caractéristiques de ce contrat d'assurance vie dont la souscription a été arrêtée en 1998 sont :

- les versements sont périodiques avec un montant minimal pendant 15 ans (de 240 euros en 2004)
- les frais sont de 9,9% sur chaque prime et de 0% de l'épargne acquise chaque mois
- un fonds de participation aux bénéfices spécifique
- pas de pénalité de rachat.

On constate une baisse de la souscription de ce contrat dès la première année de mise en souscription du contrat A, en effet celui-ci était mis en avant par les agents et le taux de participation aux bénéfices était inférieur pour le contrat B.

Graphique 6 : Participation aux bénéfices sur le contrat A (en pointillé) et le contrat B (ligne continue)



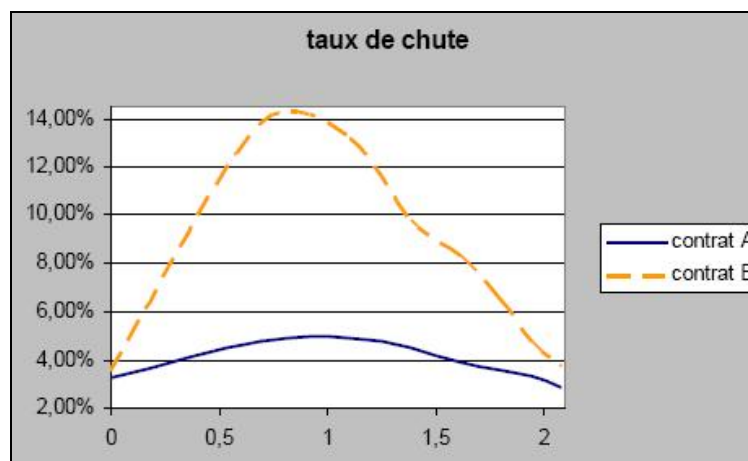
2.2 Structure générationnelle

L'analyse du graphique ci-dessous qui représente le nombre de rachats en pourcentage du nombre de contrats initiaux en fonction de leur ancienneté fait apparaître l'effet fiscal que l'on attendait, à savoir une baisse des rachats sur les contrats qui ont entre 3 et 8 ans.

Sur les deux produits on observe la même forme de fonction de rachat, à savoir une croissance de ceux-ci sur les deux ou trois premières années après la souscription puis une baisse des rachats jusqu'à huit ans (date où l'exonération fiscale devient maximale). La différence d'intensité de rachat entre les deux produits peut s'expliquer à la fois par le public visé, car le montant moyen investi par contrat a été plus important sur le contrat A notamment avec le versement minimal initial de 1530 euros et d'autre part par le fait que sur la période d'étude du contrat B les marchés actions étaient à la hausse et la tentation d'investir dans des produits plus risqués mais plus rentables sans doute importante. Le contrat B à primes périodiques touche a priori une population moins aisée qui devrait donc être moins sensible à l'avantage fiscal de l'assurance vie. Mais l'élément principal qui explique le plus fort taux de chute sur B est l'absence de possibilité de rachat partiel qui est offerte a contrario sur A, les statistiques utilisées ici ne portant que sur les sorties totales.

Sur les huit premières années de vie du contrat, la fonction de rachat sur cette période est croissante puis décroissante avec un pic de rachat autour de 2-3 ans; l'allure des courbes si l'échelle de l'ancienneté des contrats est logarithmique suggère l'emploi d'une parabole pour modéliser cette partie de la vie d'un contrat.

Graphique 7 : Taux de chute entre 0 et 7 ans



La modélisation de la fonction de rachat est donc du type :

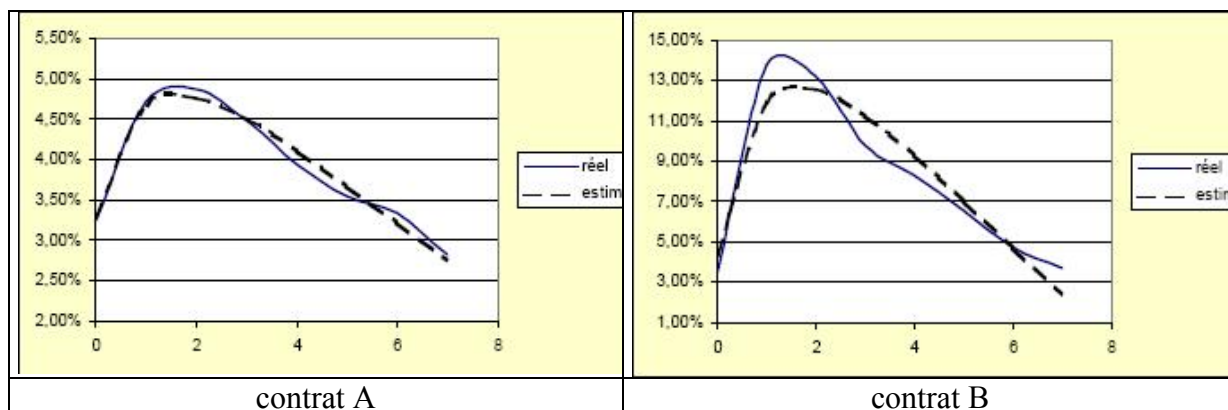
$$f : x \rightarrow a \cdot [\ln(x+1)]^2 + b \cdot \ln(x+1) + c$$

$x+1$ est préféré à x pour éviter le problème de définition du \ln en 0. Afin de déterminer les coefficients a , b et c nous utilisons la méthode des moindres carrés ce qui revient à calculer :

$$\min_{a,b,c} \sum_{i=0}^7 (\tilde{y}_i - y_i)^2$$

où y_i est l'estimateur de y_i par f

Graphique 8 : adéquation entre le modèle de rachat et les valeurs empiriques



On obtient un R^2 de 97,8% dans le premier cas et de 91,5% dans le second cas. Afin d'interpréter la modélisation nous la réécrivons sous une autre forme :

$$y(x) = \text{taux de rachat}(0) \cdot [1 - a \cdot \ln(x + 1) \cdot (\ln(x + 1) - b)]$$

où :

- taux de rachat(0) est le pourcentage de contrats rachetés au cours de la première année ;
- a est un facteur d'échelle positif qui détermine si les rachats sont nombreux ou faibles sur le contrat, par exemple dans les deux exemples ci-dessus a vaut 1 pour A et 4 pour B, c'est un facteur croissant avec l'importance des rachats sur le produit ;
- b permet de régler l'emplacement du pic de rachat, en pratique si $b = \ln(8)$, le pourcentage de contrats rachetés est le même la première année et l'année avant la défiscalisation. S'il est plus grand le taux de rachat en fin de vie est plus grand.

Avec cette forme de fonction, nous avons donc besoin de trois paramètres pour caractériser les rachats entre 0 et 7 ans.

La méthode des moindres carrés a en outre l'avantage de préserver la moyenne et donc aussi la somme des rachats sur les 8 années. Dans le cadre de prévision et de comparaison avec les données sur les premières années de vie d'un contrat, on peut introduire des effets de retour « à la moyenne », par exemple s'il y a eu une vague de rachat l'année précédente on peut supposer des rachats plus faibles l'année qui suit.

ANNEXE 2 : PRIX DU PUT SUR ZERO-COUPON

Calcul du prix C_t à la date t d'une option de vente de strike K_i et d'échéance i sur un zéro-coupon de maturité $T \geq i$:

La dynamique du zero-coupon est donnée par :

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t$$

Sous probabilité forward-neutre

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \rho(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t^*$$

où $\frac{d\mathbb{P}_T^*}{d\mathbb{P}_T}(T) = \frac{e^{-\int_0^T \rho_s ds}}{B(0,T)}$ et W_t^* mouvement brownien standard sous \mathbb{P}^* .

$$\text{Donc } B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\int_t^T \rho_s ds} \mid \mathcal{G}_t \right]$$

En notant $\xi = \{K_i \geq B(i,T)\}$, on a alors :

$$\begin{aligned} C_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\int_0^T \rho_s ds} [K_i - B(i,T)]^+ \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\int_0^T \rho_s ds} [K_i - B(i,T)] 1_\xi \right] \\ &= K_i \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\int_0^T \rho_s ds} 1_\xi \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-\int_0^T \rho_s ds} B(i,T) 1_\xi \right] \\ &= K_i B(0,i) \mathbb{E}_{\mathbb{P}_i^*} [1_\xi] - B(0,T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}_8^*} [1_\xi] \\ &= K_i B(0,i) \mathbb{P}_i^* [\xi] - B(0,T) \mathbb{P}_8^* [\xi] \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = \sqrt{\int_0^i (\sigma(s,T) - \sigma(s,i))^2 ds} \\ d_0 = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{B(0,i)K_i}{B(0,T)} \right) + \frac{1}{2}\nu \end{array} \right. \quad \text{on a} \quad \begin{cases} \mathbb{P}_i^* [\xi] = \mathcal{N}(d_0) \\ \mathbb{P}_8^* [\xi] = \mathcal{N}(d_0 - \nu) \end{cases}$$

d'où

$$K_i B(0,i) \mathcal{N}(d_0) - B(0,T) \mathcal{N}(d_0 - \nu)$$

ANNEXE 3 : CALCUL DE LA PROBABILITE RISQUE NEUTRE PAR LA TRANSFORMATION DE ESSHER

Dans le cadre du modèle de Black & Scholes, le changement de probabilité déjà présenté précédemment est simple à calculer lors de simulations Monte Carlo. Or, si le calcul de la probabilité risque neutre est connu dans ce cas simple, il est en revanche beaucoup difficile de l'obtenir dans le cadre général.

La transformation de Essher permet de calculer cette probabilité risque neutre sous des hypothèses beaucoup plus faibles. En fait on ne calcule pas directement la probabilité risque neutre mais le déflateur Y_t . Lorsque l'on dispose de n actifs S_i de prix S_i^t à la date t , alors le déflateur Y_t est tel que :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \frac{1}{1+r_{t-1}} \\ \forall i \in \{1..n\} \quad \mathbb{E}[Y_t S_i^t | \mathcal{F}_{t-1}] = S_i^{t-1} \end{cases}$$

où $\frac{1}{1+r_{t-1}}$ est le prix à la date t-1 de 1€ certain à la date t.

En d'autres terme, le déflateur Y_t est une version discrète de $e^{-\int_{t-1}^t \rho_s ds} \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_{t-1}}$.

Sous l'hypothèse où pour tout x_{t-1} \mathcal{F}_{t-1} -mesurable tel que, on a $x_{t-1} \left(\frac{1}{1+r_{t-1}} S_i^t - S_i^{t-1} \right)$ qui vaut zéro ou peut prendre des valeurs positives et des valeurs négatives avec des probabilités non nulles, alors il existe une valeur x_{t-1}^* de x_{t-1} telle que

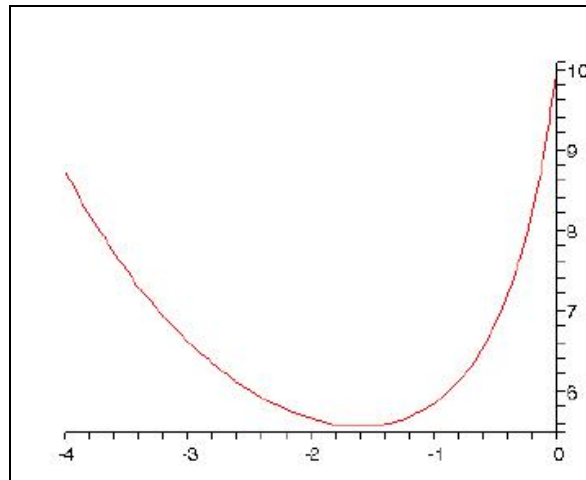
$$Y_t = \frac{1}{1+r_{t-1}} \frac{e^{\sum x_{t-1}^* S_i^t}}{\mathbb{E} \left[e^{\sum x_{t-1}^* S_i^t} \Big| \mathcal{F}_{t-1} \right]}$$

Cette valeur x_{t-1}^* est celle qui minimise la fonction objectif

$$F_t(x) = \ln \left(\mathbb{E} \left[e^{x_{t-1} \left(\frac{1}{1+r_{t-1}} S^t - S^{t-1} \right)} \Big| \mathcal{F}_{t-1} \right] \right)$$

L'existence de ce minimum provient de l'hypothèse sur les signes pris par $x_{t-1} \left(\frac{1}{1+r_{t-1}} S_i^t - S_i^{t-1} \right)$. En effet, en dimension 1, la forme de $\mathbb{E} \left[e^{x_{t-1} \left(\frac{1}{1+r_{t-1}} S_i^t - S_i^{t-1} \right)} \Big| \mathcal{F}_{t-1} \right]$ en fonction de x est alors :

Forme de $\mathbb{E} \left[e^{x_{t-1} \left(\frac{1}{1+r_{t-1}} S_i^t - S_i^{t-1} \right)} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right]$



A ce minimum intérieur, les dérivées partielles par rapport à chacun des x_{t-1}^i valent zéro :

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{1+r_{t-1}} S_i^t - S_i^{t-1} \right) e^{x_{t-1} \left(\frac{1}{1+r_{t-1}} S_i^t - S_i^{t-1} \right)} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = 0$$

ce qui équivaut à :

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{1+r_{t-1}} S_i^t e^{x_{t-1} \left(\frac{1}{1+r_{t-1}} S_i^t - S_i^{t-1} \right)} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = \mathbb{E} \left[S_i^{t-1} e^{x_{t-1} \left(\frac{1}{1+r_{t-1}} S_i^t - S_i^{t-1} \right)} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = S_i^{t-1} \mathbb{E} \left[e^{x_{t-1} \left(\frac{1}{1+r_{t-1}} S_i^t - S_i^{t-1} \right)} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right]$$

d'où

$$\mathbb{E} \left[Y_t S_i^t \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = S_i^{t-1}$$

Lemme de Neyman-Pearson

Le lemme de Neyman-Pearson est utilisé dans la littérature sur la couverture par quantile pour résoudre le problème suivant :

- le flux à couvrir - dans notre étude, c'est le passif d'assurance actualisé - est noté H . Son évaluation en marchés complets se fait en calculant son espérance sous probabilité risque neutre $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]$
- on ne souhaite couvrir que partiellement, sur un ensemble A . Le prix théorique de la couverture est alors $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [H 1_A | \mathcal{F}_0]$
- on cherche à maximiser les cas où la couverture va être efficiente, sous une contrainte de coût maximal c .

Formalisé, ce programme s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sup_A \mathbb{P}[A] \\ \text{s.c. } & \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [H 1_A | \mathcal{F}_0] \leq c \end{aligned}$$

où \mathbb{P} est la probabilité historique et \mathbb{P}^* la probabilité risque neutre, unique en marchés complets.

On introduit alors la mesure de probabilité \mathbb{Q}^* telle que

$$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{P}^*} = \frac{H}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]}$$

Comme $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[X \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [X]$, la contrainte s'écrit alors $\mathbb{Q}^* [A] \leq \frac{c}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]}$

Le lemme de Neyman-Pearson permet d'explicitier l'ensemble de succès A . A est de la forme

$\left\{ \frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}_T^*} \geq aH \right\}$. Etant donnée la contrainte, la valeur a de a qui maximise A est :

$$\tilde{a} = \inf \left\{ a \left| \mathbb{Q}^* \left[\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}_T^*} \geq aH \right] \leq \frac{c}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]} \right\}$$

Si d'autre part H est toujours strictement positif, ce qui est une hypothèse très raisonnable pour un flux à couvrir comme un passif d'assurance, alors

$$\tilde{a} = \inf \left\{ a \left| \mathbb{Q}^* \left[\frac{1}{H} \frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}_T^*} \geq aH \right] \leq \frac{c}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]} \right\}$$

Et donc a est tel que $\mathbb{Q}^* \left[\frac{1}{H} \frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}_T^*} \geq \tilde{a} \right] = \frac{c}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]}$, posons $X = \frac{1}{H} \frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}_T^*}$.

Dans le cas Black & Scholes, $\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}_T^*} = e^{\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\mu_s - r_s}{\sigma_s}\right)^2 ds + \int_0^T \left(\frac{\mu_s - r_s}{\sigma_s}\right) dW_s} = \frac{1}{L_T}$ donc

$$\tilde{a} = \inf \left\{ a \left| \mathbb{Q}^* \left[\frac{1}{L_T} \geq aH \right] \leq \frac{c}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]} \right. \right\}$$

Problème dual : cette fois le quantile est fixé

Si le cadre précédent est très souvent présenté dans la littérature, nous n'avons pas trouvé son problème dual, qui est pourtant celui qui nous intéresse. En effet, on désire fixer le quantile, et minimiser le coût de la couverture. Formellement, cela se traduit par :

$$\inf_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H1_A | \mathcal{F}_0]$$

s.c. $\mathbb{P}[A] \geq \alpha$

On cherche à minimiser le coût de la couverture, sous la contrainte que la probabilité de l'ensemble de succès soit supérieure à une probabilité α donnée. Ce problème peut être ramené à une forme très semblable au cas précédent, en considérant non plus l'ensemble de succès, mais l'ensemble $B = \bar{A}$ des échecs. Or

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H1_A | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H(1 - 1_{\bar{A}} - 1) | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0] - \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H1_{\bar{A}} | \mathcal{F}_0]$$

Le programme se réécrit donc

$$\sup_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H1_{\bar{A}} | \mathcal{F}_0]$$

s.c. $\mathbb{P}[\bar{A}] \leq 1 - \alpha$

soit avec les mêmes notations que précédemment :

$$\sup_A \mathbb{Q}^* [\bar{A}]$$

s.c. $\mathbb{P}[\bar{A}] \leq 1 - \alpha$

En appliquant le lemme de Neyman-Pearson

$$\bar{A} = \left\{ \frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{P}} \geq a \right\} = \left\{ \frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{P}^*} \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \geq a \right\} = \left\{ \frac{H}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]} \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \geq a \right\}^1$$

donc

$$A = \left\{ \frac{H}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]} \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \leq a \right\}$$

avec $\mathbb{P} \left[\frac{H}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]} \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} > a \right] = 1 - \alpha$ ce qui équivaut encore

$$\mathbb{P} \left[\frac{H}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]} \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \leq a \right] = \alpha$$

Résolution numérique par Monte Carlo

On obtient donc des formules analytiques qui ne sont pas nécessairement simples à exploiter dans le cas général. Il est toutefois possible de donner une méthodologie permettant de résoudre ce problème dans un certain nombre de configurations :

- le premier problème réside dans l'évaluation de la probabilité risque-neutre : $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$ est calculable dans le modèle de Black & Scholes, mais est aussi donnée par la transformation de Esscher, qui sera présentée dans le paragraphe suivant.
- une fois $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$ connue, on peut calculer $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]$ puis simuler $\frac{H}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0]} \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$ sous la probabilité historique afin d'en obtenir une distribution (ceci ne demande qu'une série de simulations puisque $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[H \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_0 \right]$).
- a est alors estimé en prenant le α -quantile de cette distribution
- à partir de la distribution, en la tronquant on obtient

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} [H 1_{\bar{A}} | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*} \left[H 1_{\bar{A}} \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_0 \right]$$

² Le rendement et la valeur de réalisation des actifs sont néanmoins pris en compte dans la provision pour aléas financiers et la provision pour risque d'exigibilité qui implicitement affectent les capitaux propres donc la marge.

³ Taux moyen des Emprunts d'Etat : C'est le taux de rendement sur le marché secondaire des emprunts d'Etat à taux fixe supérieurs à 7 ans.

⁴ cf Kupiec (1995) « Stress Testing in a Value at Risk Framework »

⁵ Le pourcentage de rachat est toujours pris par rapport au nombre de contrats initiaux : il faut donc corriger les 5% par ((5%)/(% de contrats restants))

⁶ Le besoin de marge est nul pour les contrats de 7 et 8 ans car il n'y a plus de risques sur eux : les rachats des contrats datant de 7 ans sont tous connus, ceux en cours iront jusqu'à échéance, et les contrats de 8 ans sont des dettes, payées incessamment sous peu aux assurés