2nd AFIR Colloquium 1991, 2: 93-128

Evaluation des Bons de Souscription d'Actions Ordinaires et des Bons de Souscription d'Actions Remboursables

Jean-Claude Augros

Institut de Science Financière et d'Assurances, Université Claude Bernard (Lyon 1), 43 boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne, France

Résumé

L'objet de cet article consiste à démontrer que la valeur d'un bon de souscription d'actions peut toujours être exprimée en termes d'options sur la firme émettrice, mais avec un degré de complexité variable selon la nature de l'émission. Partant de l'analyse de BLACK et SCHOLES selon laquelle un bon autonome ordinaire constitue un CALL simple sur la firme, nous montrons que, de la destination des fonds recueillis lors de l'émission des bons, dépend, d'une part, le prix d'exercice de l'option et, d'autre part, la stabilité de la volatilité des actifs de la firme. Poursuivant par l'analyse de bons plus complexes, nous démontrons que la valeur de bons autonomes remboursables ainsi que celle de bons ordinaires, mais émis en même temps que des obligations, peuvent être exprimées en termes d'options sur options ou, en d'autres termes, d'options composées de deuxième degré. Il ressort en outre que des bons remboursables, dont l'émission est associée à celle d'obligations classiques, sont assimilables à un portefeuille d'options complexes incluant des options composées de deuxième (options sur options) et de troisième degré (options sur options sur options). Enfin, plusieurs propositions sont faites permettant, pour les unes, de simplifier la procédure de calcul de la valeur des bons et, pour les autres, de traiter le problème posé par le détachement de dividendes et/ou de coupons.

Summary

Valuation of Warrants and Convertible Stocks

The purpose of this article is to demonstrate that the value of a warrant can always be expressed in terms of options on the issuing firm, albeit with a degree of complexity which varies according to the nature of the issue. Starting with the Black and Scholes analysis, according to which an ordinary share constitutes a simple CALL on the firm, we show that firstly the exercise price of the option and secondly the stability of the volatility of the assets of the firm are dependent on the destination of the funds received when the warrant is issued. Continuing our analysis via more complex instruments, we show that the value of convertible redeemable stocks or alternatively warrants simultaneously with bonds can be expressed in terms of options on options or, in other words, second-degree composite options. Furthermore, redeemable convertibles, the issuing of which is linked to the issuing of straight bonds, are likened to a portfolio of complex options including second-degree (options on options) and third- degree (options on options on options) composite options. Finally, several proposals are made, some to simplify the procedure for calculating the value of warrants and others to deal with the problem posed by the detaching of dividends and/or coupons.

SOMMAIRE

Depuis la loi du 3 Janvier 1983, les sociétés françaises peuvent émettre des obligations avec bons de souscription d'actions (OBSA) qui donnent droit à leurs titulaires de souscrire, à des époques et dans des conditions fixées dès l'émission de l'emprunt, des actions de la société émettrice. En outre, depuis la loi du 14 Décembre 1985, elles peuvent également émettre des bons de souscription d'actions autonomes dont l'émission n'est pas associée à celle d'un emprunt obligataire classique.

Les bons de souscription d'actions possèdent l'essentiel des attributs des CALLS sur actions. Comme le détenteur d'un CALL, celui d'un bon de souscription a la possibilité de souscrire des actions de la société émettrice dès lors qu'à l'échéance des bons le prix de ces actions est supérieur au prix d'exercice convenu dans le contrat d'émission. Les bons diffèrent cependant des options sur plusieurs points. En premier lieu, l'émission de bons modifie le bilan de l'émetteur. Ses capitaux propres augmentent, une première fois, du montant de l'émission et, le cas échéant, une seconde fois, lors de l'augmentation de capital consécutive à l'exercice des bons. La trésorerie ainsi recueillie permet à l'émetteur de financer de nouveaux investissements et d'accroître progressivement le cash-flow de la firme. En deuxième lieu, contrairement aux actions obtenues par exercice d'un CALL, celles obtenues par exercice d'un bon n'existent pas et doivent donc être créées à ce moment-là par l'émetteur (1) . Ainsi, l'émission de bons peut entraîner, en cas d'exercice, une dilution des résultats de la firme, ceux-ci se rapportant alors à un nombre accru d'actions. En troisième lieu enfin, l'émission de bons de souscription d'actions a pour effet de modifier la volatilité des actions de la firme et de rendre celle-ci non stationnaire. Dans ces conditions, il n'est guère envisageable d'évaluer des bons en les assimilant totalement à des options sur actions.

BLACK et SCHOLES (1972) ont été les premiers à prendre en compte le phénomène de dilution dans l'évaluation des bons de souscription et à retenir comme variable d'état, dans leur modèle d'évaluation, la valeur de la firme plutôt que celle des actions. Leur analyse, reprise plus tard par GALAI et SCHNELLER (1978), nous sert d'ailleurs de point de départ dans cet article où nous envisageons à la fois l'évaluation des bons de souscription ordinaires et celle des bons de souscription "remboursables". Depuis l'année 1988, en effet, plusieurs sociétés françaises ont émis des bons de souscription avec faculté de rachat au gré du porteur. S'ils n'exercent pas leurs bons à l'échéance, les investisseurs peuvent, dans ce cas, demander leur rachat auprès de l'émetteur, à un prix fixé dans le contrat d'émission. Hormis cette particularité, les bons "remboursables" sont identiques aux bons ordinaires.

Dans une première section, nous considérons l'évaluation des bons autonomes ordinaires lorsque la société émettrice n'est financée par ailleurs que par des actions. Dans la section II, nous envisageons la même politique de financement de l'émetteur, mais nous supposons toutefois que les bons autonomes émis sont remboursables. Dans les deux sections suivantes, nous admettons que la firme émettrice est financée conjointement par des actions et par des obligations à bons de souscription, ces derniers pouvant être ordinaires (section III) ou remboursables (section IV). Enfin, dans la dernière section, nous proposons quelques solutions pour résoudre le problème posé par l'existence de dividendes et/ou de coupons.

SECTION I. EVALUATION DES BONS AUTONOMES ORDINAIRES.

Une émission de bons de souscription a généralement pour objet de procurer à l'émetteur des fonds destinés à financer de nouveaux investissements. Nous envisageons, tout d'abord, le cas où ces fonds sont immédiatement investis dans des actifs assimilables à ceux de la firme, puis celui où ils sont investis dans un actif sans risque jusqu'à l'échéance des bons. Enfin, dans une troisième étape, nous supposons que le produit de l'émission des bons est provisoirement investi dans un actif sans risque avant d'être investi dans des actifs de mêmes caractéristiques que ceux que la firme possédait avant l'émission des bons.

1. Le produit de l'émission est investi dans des actifs risqués.

Nous envisageons le cas d'une entreprise qui, jusqu'à ce jour (t_0) , n'était financée que par des actions ordinaires. Soit V la valeur totale des actifs de la firme, telle que $V = NS$, S désignant le cours des N actions ordinaires émises. On admet que V suit un processus brownien géométrique caractérisé par un écart type, σ_V , constant au cours du temps.

En t_0 , l'entreprise émet n bons de souscription au prix , W , choisi de telle sorte que l'émission des bons laisse inchangé le cours des actions, toutes choses restant égales par ailleurs. Le produit de l'émission est immédiatement investi dans des actifs identiques à ceux de la firme. Soit $\hat{V}$ la valeur totale des actifs, aussitôt après l'émission, telle que : $\hat{V} = V + nW = NS + nW$. La volatilité , $\sigma_{\hat{V}}$, de $\hat{V}$ est identique à celle de V . On postule que chaque bon permet de souscrire une action de la firme au prix d'exercice, E , à l'issue d'une période de durée, τ . La structure des taux est supposée plate et stable au cours du temps. r désigne le taux sans risque exprimé en taux annuel continu.

On admet que les bons sont détenus par un grand nombre d'investisseurs (régime de concurrence) plutôt que par un seul (régime de monopole). Or EMANUEL (1983) et CONSTANTINIDES et ROSENTHAL (1984) ont montré que, dans un régime de monopole, en l'absence de dividende ou en présence d'un dividende continu et en supposant, en outre, que les bons sont exerçables en bloc, il n'est pas dans l'intérêt de l'investisseur détenant l'ensemble des bons d'exercer ceux-ci avant leur échéance. Ces auteurs devaient également démontrer qu'en régime de concurrence la valeur d'équilibre des bons est identique à celle qui prévaut dans un régime de monopole où les bons sont exerçables en bloc. Dans ces conditions, il est possible d'évaluer des bons en faisant comme si ceux-ci ne devaient pas être exercés avant leur échéance.

Pour faciliter l'analyse, nous supposons, pour l'instant, qu'il n'est prévu aucune distribution de dividende pendant toute la durée de vie des bons. Cette dernière hypothèse sera toutefois relâchée dans la section V.

A l'échéance des bons, leurs titulaires ne choisissent de les exercer que si le cours des actions, S* , est supérieur au prix d'exercice, E , des bons. Dans cette hypothèse, les porteurs de bons et les actionnaires anciens se répartissent la propriété de la firme dans la proportion n/(N+n) , pour les premiers, et N/(N+n) , pour les seconds. En cas d'exercice et après paiement du prix d'exercice par les titulaires de bons, on a donc l'équivalence suivante :

$$nW^* + nE = \frac{n}{N+n} (\hat{V}^* + nE) .$$

où W* désigne la valeur des bons à l'échéance. Soit, après simplification :

$$W^* = \frac{1}{N+n} (\hat{V}^* - NE) .$$

Comme la valeur des bons arrivés à échéance est soit positive, soit nulle, la condition d'exercice des bons s'écrit également de la façon suivante :

$$\hat{V}^* > NE .$$

La valeur des bons peut ainsi être assimilée, à un coefficient multiplicateur près, à un CALL européen sur la firme $\hat{V}$, de durée de vie τ et de prix d'exercice NE . Reprenant la présentation de COX et RUBINSTEIN (1985), on peut résumer la valeur des bons et celle des actions, en t_0 et à l'échéance des bons, à l'aide du tableau ci-dessous.

Tableau n° 1

	en t_0	Valeur à l'échéance		Expressions en termes d'options
		$\hat{V}^* < NE$	$\hat{V}^* > NE$	
Actions	NS	$\hat{V}^*$	$\frac{N}{N+n} (\hat{V}^* + nE)$	$\hat{V} - \frac{n}{N+n} C (\hat{V},\tau,NE)$
Bons	nW	0	$\frac{n}{N+n} (\hat{V}^* - NE)$	$\frac{n}{N+n} C (\hat{V},\tau,NE)$

Dès lors, il est possible de fixer le prix d'émission des bons à l'aide d'un modèle d'évaluation, celui de BLACK et SCHOLES par exemple. Il suffit de procéder par itération en choisissant initialement un prix d'émission des bons proche de zéro, d'en déduire la valeur de $\hat{V}$, puis de calculer à l'aide du modèle la valeur théorique des bons et des actions. Il convient, ensuite, de renouveler la procédure en augmentant progressivement le prix d'émission des bons jusqu'à obtenir le prix d'équilibre des bons qui laisse inchangé le cours des actions. Si, par exemple, $V = 100\,000$, $N = 1\,000$, $S = 100$, $\sigma_V = 20\ \%$, $n = 250$, $E = 100$, $\tau = 1$ an et $r = 10\ \%$, le prix d'émission des bons ressort à 12,491 francs.

Si l'on se situe quelques temps après l'émission, le modèle ne permet plus véritablement d'évaluer la valeur des bons. Tout au plus permet-il de vérifier si, eu égard à la valeur de marché des actions, la valeur des bons correspond à une situation d'équilibre ou bien si, au contraire, les bons apparaissent sur ou sous-évalués par rapport aux actions. Il suffit, pour cela, d'observer $\hat{V}$, c'est-à-dire (NS+nW), de mesurer la volatilité de $\hat{V}$, puis d'appliquer le modèle pour avoir la valeur théorique des bons que l'on peut alors comparer à leur valeur de marché. En cas d'égalité des deux valeurs, il y a équilibre. Si, au contraire, la valeur théorique des bons est supérieure (inférieure) à leur valeur réelle, les bons sont sous-évalués (surévalués) par rapport aux actions. Des arbitrages peuvent être envisagés.

Il est possible également de démontrer que l'émission de bons réduit la volatilité , σ_S , des actions de la firme. Le rendement instantané des bons étant égal à celui de l'option $C\ (\hat{V},\tau,NE)$ ....

$$\frac{dW}{W} = \frac{dC\ (\hat{V},\tau,NE)}{C\ (\hat{V},\tau,NE)}$$

... la volatilité des bons est donc égale à celle , σ_C , de $C\ (\hat{V},\tau,NE)$

or $$\sigma_C = L\ \sigma_{\hat{V}} \quad \text{avec } L = \frac{dC\ (\hat{V},\tau,NE)}{d\hat{V}} \times \frac{\hat{V}}{C\ (\hat{V},\tau,NE)}$$

ou, d'après la formule de BLACK et SCHOLES : $L = \Phi(d_1)\ \dfrac{\hat{V}}{C\ (\hat{V},\tau,NE)}$

avec $$d_1 = \frac{\text{Log}\ \dfrac{\hat{V}}{NE} + (r + \dfrac{1}{2}\ \sigma^2_{\hat{V}})\ \tau}{\sigma_{\hat{V}}\ \sqrt{\tau}} .$$

$\Phi(d_1)$ désignant la fonction intégrale de la loi normale de $-\infty$ à d_1 .

La volatilité, σ_W , des bons s'écrit, par conséquent :

$$\sigma_W = \frac{\Phi(d_1)\ \hat{V}\ \sigma_{\hat{V}}}{C\ (\hat{V}, \tau, NE)} . \qquad [1]$$

Comme, par ailleurs, $\hat{V} = NS + nW$:

$$\frac{d\hat{V}}{\hat{V}} = \frac{NS}{\hat{V}} \frac{dS}{S} + \frac{nW}{\hat{V}} \frac{dW}{W} .$$

Au cours d'un instant dt , la corrélation entre le rendement des actions et celui des bons étant parfaite, il vient :

$$\sigma_{\hat{V}} = \frac{NS}{\hat{V}}\ \sigma_S + \frac{nW}{\hat{V}} \sigma_W .$$

En remplaçant, dans l'expression précédente, σ_W par sa valeur donnée par [1] , la volatilité des actions devient :

$$\sigma_S = \frac{\hat{V}\ \sigma_{\hat{V}}}{NS} \left[1 - \frac{n\ W\ \Phi(d_1)}{C\ (\hat{V},\tau, NE)}\right] . \qquad [2]$$

Dans l'exemple numérique précédent, la volatilité des bons à l'émission ressort à 109,4 % et celle des actions à 17,6 % . Pendant toute la durée de vie des bons, la volatilité des actions fluctue au gré des variations de la valeur de la firme, tout en restant à un niveau inférieur à $\sigma_{\hat{V}}$. Au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'échéance des bons, la volatilité des actions tend progressivement vers celle de la firme si les bons sont en dehors ou vers $\sigma_{\hat{V}}\ \hat{V}/(\hat{V}+nE)$ s'ils sont en dedans. Au total, la dilution entraînée par l'émission de bons a pour effet de réduire provisoirement la volatilité des actions de la firme, tout en lui donnant un caractère stochastique.

2. Le produit de l'émission est placé dans un actif sans risque.

Comme précédemment, nous envisageons le cas d'une société qui, jusqu'à présent, n'était financée que par N actions ordinaires. Elle émet alors n bons de souscription au prix, W , choisi, là-aussi, de telle sorte qu'il laisse inchangé le cours S des actions de la firme. En revanche, plutôt que d'investir le produit de l'émission dans des actifs risqués, l'émetteur réalise un placement sans risque rémunéré au taux, r , et ce pendant toute la durée de vie des bons. Soit $B = nW$ le montant investi sans risque en t_0 . On pose à nouveau

$\hat{V} = V + nW = V + B$. Le rendement instantané global de la firme est donc tel que :

$$\frac{d\hat{V}}{\hat{V}} = \frac{V}{\hat{V}}\frac{dV}{V} + \frac{B}{\hat{V}}\frac{dB}{B} .$$

Le rendement de B n'étant pas stochastique, la volatilité de $\hat{V}$ s'écrit :

$$\sigma_{\hat{V}} = \frac{V}{\hat{V}}\sigma_V = \frac{V}{V+B}\sigma_V .$$

On observe que $\sigma_{\hat{V}}$ varie avec V . Du fait de la nature stochastique de $\sigma_{\hat{V}}$, il est préférable d'exprimer la valeur des bons, ainsi que celle des actions, en termes d'options sur V plutôt que d'options sur $\hat{V}$.

Les bons sont exercés à l'échéance si le cours des actions, S^* , à l'échéance des bons est supérieur à E . Il est possible de formuler autrement la condition d'exercice des bons à l'échéance. En effet, en cas d'exercice, il vient :

$$nW^* + nE = \frac{n}{N+n}(V^* + Be^{r\tau} + nE) .$$

Soit, 'après simplification :

$$nW^* = \frac{n}{N+n}[V^* - (NE - Be^{r\tau})] .$$

Il y a donc exercice des bons si $V^* > NE - Be^{r\tau}$.

On peut exprimer la valeur des bons, ainsi que celle des actions, en termes de CALLS européens sur V de prix d'exercice $NE - Be^{r\tau}$.

Tableau n° 2

	en t_0	Valeur à l'échéance		Expressions en termes d'options
		$V^*<NE-Be^{r\tau}$	$V^*>NE-Be^{r\tau}$	
Actions	NS	$V^*+Be^{r\tau}$	$\frac{N}{N+n}(V^*+Be^{r\tau}+nE)$	$(V+B)-\frac{n}{N+n}C[V,\tau,(NE-Be^{r\tau})]$
Bons	nW	0	$\frac{n}{N+n}(V^*+Be^{r\tau}-NE)$	$\frac{n}{N+n}C[V,\tau,(NE-Be^{r\tau})]$

Les formules [1] et [2] donnant la volatilité des bons et cel des actions restent valables après avoir substitué V , σ_V et $C\,[V,\tau,(NE - Be^{r\tau})]$ à $\hat{V}$, $\sigma_{\hat{V}}$ et $C\,(\hat{V},\tau,NE)$ respectivement.

Reprenant l'exemple numérique précédent, le prix d'émission des bons s'établit à 12,305 F, soit à un niveau un peu inférieur à celui obtenu lorsque l'entreprise envisage des investissements risqués. Si l'entreprise souhaite maximiser la valeur de ses actions et émettre des bons à un prix le plus élevé possible, elle a donc tout intérêt à faire connaître son intention de réaliser des investissements risqués dès l'émission.

3. Le produit de l'émission est placé sans risque, puis investi dans des actifs risqués.

Le schéma ci-dessous illustre la politique suivie par la firme : en t_o , elle investit le produit de l'émission dans un actif sans risque et ce jusqu'en t_1 , date à partir de laquelle elle investit sa trésorerie disponible - égale alors à $Be^{r(t_1-t_o)}$ - dans des actifs risqués assimilables à ceux de la firme.

bilan en t_o

V	NS
$+ B$	nW
$= \hat{V}$	

→

bilan en t_1

V	NS
$+ Be^{r(t_1-t_o)}$	nW
$= \hat{V}$	

→

bilan à l'échéance des bons

avant exercice

$\hat{V}^*$	NS^*
	nW^*

après exercice

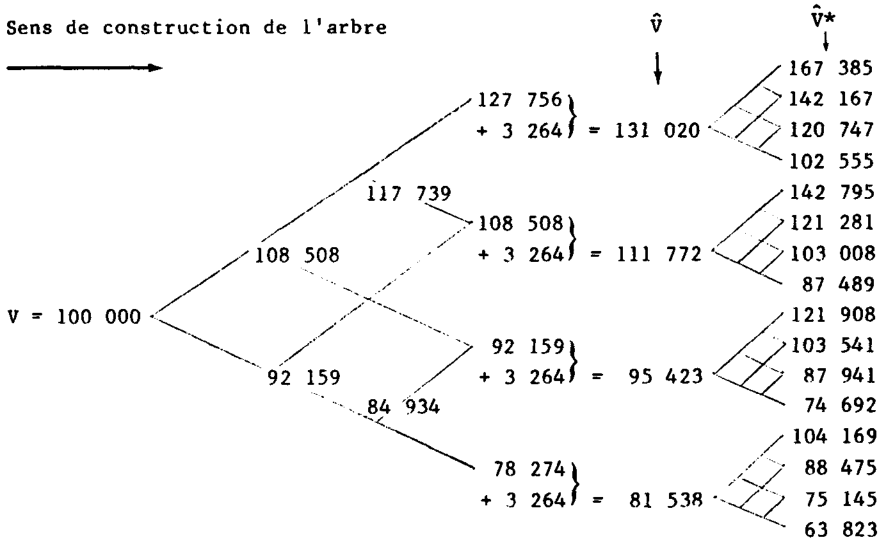
$\hat{V}^*$	$(N+n)\ S^*$
$+ nE$	

Le prix d'émission des bons peut être exprimé en termes d'option sur la valeur , $\hat{V}$, de la firme ; soit :

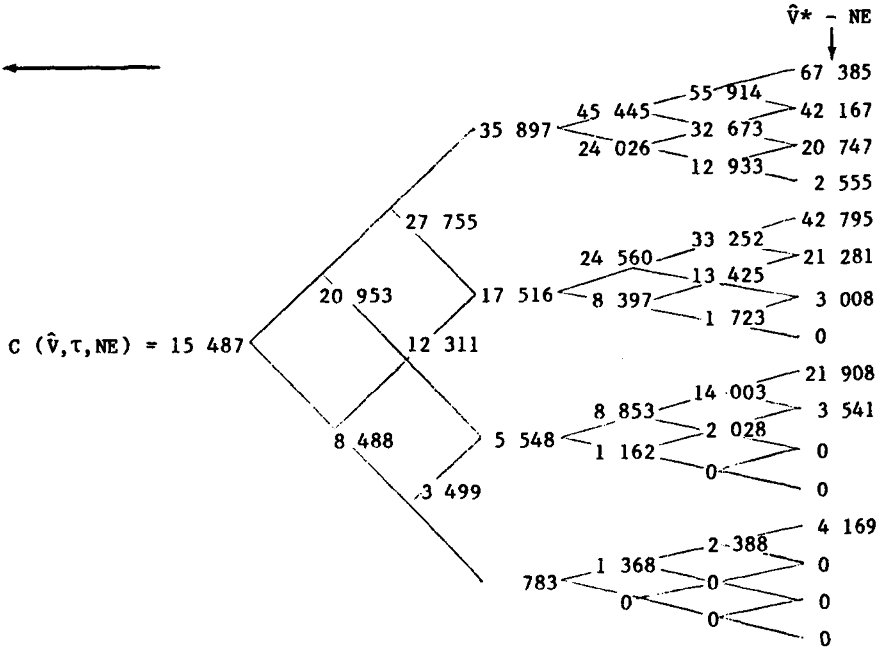
$$nW = \frac{n}{N+n}\, C\ (\hat{V},\tau,NE)\ .$$

Toutefois, la volatilité de $\hat{V}$ étant stochastique jusqu'à la date t_1 , il n'est pas possible ici d'évaluer la valeur des bons à l'aide de la formule de BLACK et SCHOLES. On peut, en revanche, procéder à cette évaluation à l'aide de la méthode binomiale définie par COX, ROSS et RUBINSTEIN (1979).

Reprenons l'exemple numérique précédent et supposons, par exemple, que l'on divise la durée de vie des bons, fixée à un an, en 6 périodes ($n = 6$) . Admettons, par ailleurs, que le produit de l'émission des bons soit placé sans risque pendant 3 périodes, puis investi dans des actifs risqués de mêmes caractéristiques que ceux de la firme. Si, par exemple, les bons sont émis à 12,42 F, l'entreprise peut investir $nW e^{r\frac{\tau}{2}} = 250 \times 12,42 \times e^{0,1 \times 0,5} = 3\ 264$ F à l'issue de la troisième période. L'arbre d'évolution de V (sur les 3 premières périodes), puis de $\hat{V}$ (sur les 3 dernières périodes) se présente de la façon suivante (2) :



On en déduit la valeur d'exercice de $C\ (\hat{V},\tau,NE)$ à l'échéance des bons, puis, en sens inverse, on construit, à l'aide de la formule binomiale (3) , l'arbre d'évolution de l'option $C\ (\hat{V},\tau,NE)$.

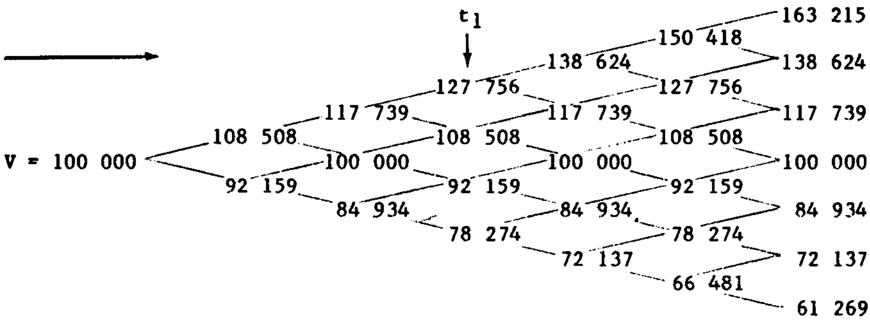


On vérifie que le prix d'émission des bons fixé initialement à 12,42 F est proche du prix d'équilibre pour lequel le cours des actions, comme celui des bons, restent inchangés aussitôt après l'émission. En effet :

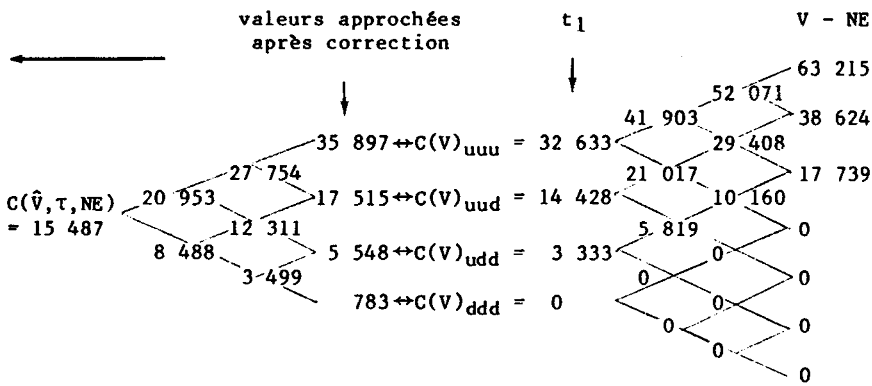
$$W = \frac{1}{N+n}\, C\,(\hat{V},\tau,NE) = \frac{15\ 487}{1\ 250} = 12{,}40 \simeq 12{,}42 \text{ F} .$$

En réalité, comme dans les cas précédents, ce prix ne peut être obtenu que par une procédure d'itération. Toutefois, ici, le temps de calcul est considérablement plus important car l'arbre binomial éclate à la date où la firme réalise des investissements risqués. Par analogie avec la méthode de SCHRODER (1988) permettant de simplifier la procédure binomiale dans le cas où les actions faisant l'objet d'un contrat d'option détachent un dividende fixe, nous proposons, pour réduire le temps de calcul de la valeur d'un bon, une méthode d'approximation qui s'avère tout à fait satisfaisante.

Celle-ci consiste à construire d'abord l'arbre d'évolution de la valeur, V , de la firme en ignorant l'émission des bons et les investissements en actifs risqués réalisés plus tard avec le produit de l'émission. Dans ces conditions, l'arbre de V , représenté ci-dessous, possède seulement $n+1 = 7$ branches à l'échéance.



Dans une deuxième étape, on construit l'arbre d'évolution de l'option C (V,τ,NE) - notée aussi C (V) par commodité - en partant de l'échéance des bons jusqu'à la date , t_1 , de réalisation des investissements risqués. Dans notre exemple, on obtient ainsi les quatre valeurs possibles de l'option à cette date : $C(V)_{uuu}$, $C(V)_{uud}$, $C(V)_{udd}$ et $C(V)_{ddd}$, comme indiquées ci-dessous.



De toute évidence, les valeurs de l'option en t_1 , telles qu'elles sont calculées ci-dessus, sont sous-estimées puisqu'elles se rapportent à un actif sous-jacent égal à V , alors qu'en réalité l'actif sur lequel est écrite l'option est $\hat{V}$, total des actifs de la firme incluant les investissements réalisés en t_1 . Il convient donc de corriger ces valeurs afin d'obtenir une valeur approchée correcte de l'option $C(\hat{V},\tau,NE)$ à cette date. Il suffit pour cela d'ajouter aux différentes valeurs de l'option $C(V,\tau,NE)$, obtenues en t_1, l'écart de valeur entre les deux actifs $\hat{V}$ et V (c'est-à-dire le montant, $Be^{r\frac{\tau}{2}}$, des investissements en actifs risqués réalisés en t_1), multiplié par le coefficient delta de l'option. Or ce dernier représente la pente de la tangente à la courbe représentative de la valeur de l'option en fonction de celle de la firme. Comme il s'agit ici de corriger à la hausse la valeur de l'option et comme, par ailleurs, le coefficient delta d'un CALL augmente avec le prix de l'actif sous-jacent, il est préférable d'estimer le coefficient delta par excès plutôt que par défaut. Il vient, par exemple, pour $C(\hat{V})_{ddd}$:

$$C(\hat{V})_{ddd} = C(V)_{ddd} + Be^{r\frac{\tau}{2}} \times \frac{C(V)_{udd} - C(V)_{ddd}}{V_{udd} - V_{ddd}}$$

où $\dfrac{C(V)_{udd} - C(V)_{ddd}}{V_{udd} - V_{ddd}}$ est le coefficient Δ du CALL

soit $$C(\hat{V})_{ddd} = 0 + 3\ 264 \times \frac{3\ 333 - 0}{92\ 159 - 78\ 274} = 783\ .$$

On obtient, de même, $C(\hat{V})_{udd}$ et $C(\hat{V})_{uud}$.

$$C(\hat{V})_{udd} = C(V)_{udd} + Be^{r\frac{\tau}{2}} \times \frac{C(V)_{uud} - C(V)_{udd}}{V_{uud} - V_{udd}}$$

$$C(\hat{V})_{uud} = C(V)_{uud} + Be^{r\frac{\tau}{2}} \times \frac{C(V)_{uuu} - C(V)_{uud}}{V_{uuu} - V_{uud}}$$

Soit : $C(\hat{V})_{udd} = 5\ 548$ et $C(\hat{V})_{uud} = 17\ 515$.

Enfin, pour la dernière valeur, $C(\hat{V})_{uuu}$, le coefficient delta ne pouvant être calculé par excès selon le même principe, celui-ci peut être estimé avec un décalage d'une période. Il vient :

$$C(\hat{V})_{uuu} = C(V)_{uuu} + Be^{r\frac{\tau}{2}} \times \frac{C(V)_{uuuu} - C(V)_{uuud}}{V_{uuuu} - V_{uuud}}\ .$$

Soit : $C(\hat{V})_{uuu} = 35\ 897$.

On observe que cette méthode approchée procure une excellente approximation. Dans l'exemple, en effet, les valeurs approchées de

$C(\hat{V})$ sont strictement équivalentes à celles obtenues par la méthode binomiale classique. En outre, la qualité de l'approximation demeure tout à fait excellente même lorsque le montant de l'émission de bons est beaucoup plus importante et que l'effet de dilution est encore plus conséquent.

SECTION II. EVALUATION DES BONS AUTONOMES REMBOURSABLES.

Conservant les mêmes hypothèses que dans la section précédente, nous admettons toutefois que les titulaires des bons peuvent, en cas de non exercice de leurs bons à l'échéance, en demander le remboursement à l'émetteur au prix F par bon. De plus, pour simplifier la présentation, nous ne retenons qu'une seule hypothèse en ce qui concerne l'utilisation du produit de l'émission : nous admettons, en effet, que les fonds recueillis sont immédiatement investis dans des actifs risqués assimilables à ceux de la firme.

Selon la valeur, $\hat{V}^*$, de la firme à l'échéance, trois cas sont envisageables **(tableau n° 3)**.

<u>1er cas</u> : La valeur intrinsèque des bons (ou, en d'autres termes, leur valeur lorsque ceux-ci sont exercés) est supérieure à leur valeur de remboursement ; les bons sont alors exercés (colonne IV). On a, dans ce cas :

$$nF < \frac{n}{N+n}(\hat{V}^* - NE) .$$

Soit : $$NE + F(N+n) < \hat{V}^* .$$

<u>2ème cas</u> : La valeur intrinsèque des bons est inférieure à leur valeur nF de remboursement, mais cette dernière est inférieure à la valeur, $\hat{V}^*$, de la firme : les bons sont remboursés intégralement au prix F convenu. La clause de rachat joue aussi bien lorsque la valeur intrinsèque des bons est inférieure à leur valeur de remboursement, mais positive (colonne III) que lorsque celle-ci est nulle (colonne II).

<u>3ème cas</u> : La valeur intrinsèque des bons est nulle, mais la valeur totale des actifs de la firme, $\hat{V}^*$, est inférieure à leur valeur de remboursement nF. Les bons ne peuvent donc être remboursés que partiellement à un prix global égal à $\hat{V}^*$. Il y a défaillance de l'émetteur. Les actions sont alors sans valeur (colonne I).

En fait, il est possible d'assimiler des bons autonomes remboursables à un portefeuille d'options européennes de durée τ, tel que :

Tableau n° 3

Financement par actions et bons autonomes remboursables

Valeur en t_o	Valeur à l'échéance				Expressions en termes d'options
	I $\hat{V}^* < nF$	II $nF < \hat{V}^* < NE$	III $NE < \hat{V}^* < NE + F(N+n)$	IV $NE + F(N+n) < \hat{V}^*$	
Actions = NS	0	$\hat{V}^* - nF$		$\frac{N}{N+n}(\hat{V}^* + nE)$	$\hat{V} - nW$
Bons: CALL	0		$\frac{n}{N+n}(\hat{V}^* - NE)$		$(a) = \frac{n}{N+n} C(\hat{V}, \tau, NE)$
+ PUT/CALL	nF		$n\left[F - \frac{\hat{V}^* - NE}{N+n}\right]$	0	$(b) = P\left[\frac{n}{N+n} C(\hat{V}, \tau, NE), \tau, nF\right]$
− PUT	$-(nF - \hat{V}^*)$		0		$-(c) = -P(\hat{V}, \tau, nF)$
= nW	$\hat{V}^*$	nF		$\frac{n}{N+n}(\hat{V}^* - NE)$	$NW = (a) + (b) - (c)$

$$nW = \frac{n}{N+n} C(\hat{V},\tau,NE) + P\left[\frac{n}{N+n} C(\hat{V},\tau,NE),\tau,nF\right] - P(\hat{V},\tau,nF)$$

les bons remboursables sont ainsi équivalents à la somme :

. d'une position longue (a) sur la fraction $\frac{n}{N+n}$ d'un CALL sur la firme de prix d'exercice égal à NE ;

. d'une position longue (b) sur une option composée, en l'occurrence un PUT, de prix d'exercice égal à nF et dont l'actif sous-jacent est la fraction $\frac{n}{N+n}$ du CALL précédent. On vérifie que ce PUT est exercé à l'échéance dès lors que son sous-jacent (a) est inférieur à son prix d'exercice nF . Soit, d'une part, lorsque (a) = 0 (colonne I et II) et, d'autre part, lorsque 0 < (a) < nF (colonne III). Dans ce dernier cas : $\hat{V}^* > NE$ et $\frac{n}{N+n}(\hat{V}^* - NE) < nF$, soit, au total : $NE < \hat{V}^* < NE + F(N+n)$. Si, en revanche, (a) > nF , le PUT est abandonné (colonne IV) ;

. et, enfin, d'une position courte, - (c) , sur un PUT sur la firme de prix d'exercice égal à nF .

La dernière ligne du **tableau n° 3** permet de vérifier que, quelle que soit la valeur de la firme à l'échéance, la valeur totale des bons est bien égale à la somme des trois positions (a) , (b) et (-c) .

La valeur des bons peut facilement être calculée par la méthode binomiale. Il suffit de construire d'abord l'arbre d'évolution de $\hat{V}$, ensuite celui de $C(\hat{V},\tau,NE)$, puis celui de l'option composée et, enfin, celui de $P(\hat{V},\tau,nF)$. Il ne reste plus, dès lors, qu'à agréger la valeur de ces différentes composantes pour obtenir la valeur totale des bons. Plutôt que de construire successivement l'arbre de chacun des éléments des bons, il est possible également de construire directement l'arbre d'évolution de la valeur des bons. La valeur, $\hat{V}^*$, de la firme détermine, en effet, la valeur des bons à l'échéance. L'arbre est ensuite achevé à l'aide de la formule binomiale habituelle (4) , jusqu'à obtenir la valeur présente des bons.

SECTION III. EVALUATION DES OBLIGATIONS À BONS DE SOUSCRIPTION ORDINAIRES.

On envisage une firme qui, jusqu'alors, n'était financée que par des actions ($V = NS$) et qui choisit d'émettre n obligations à bons de souscription d'actions. Chacune de ces obligations constitue, en fait, la juxtaposition d'une obligation classique, notée B , et d'un bon de souscription ordinaire, noté W . On suppose qu'à chaque obligation est associé un bon de souscription donnant droit à une action. K désigne le prix de remboursement de chaque obligation. On admet que la structure des taux est plate et stable au cours du temps. Seul le risque de défaut des émetteurs crée donc des disparités de taux entre les différentes obligations de mêmes caractéristiques présentes sur le marché. Afin de faciliter l'analyse, nous supposons que l'entreprise ne verse pas de dividende ni de coupon et que le produit de l'émission est immédiatement investi dans des actifs risqués assimilables à ceux de la firme. A l'émission, on pose $\hat{V} = V+n(B+W)$. Nous envisageons successivement le cas où les bons et les obligations ont la même échéance, puis celui où l'échéance des bons est antérieure à celle des obligations.

1. Les bons et les obligations ont la même échéance.

A l'échéance, trois cas sont envisageables **(tableau n° 4)** .

<u>1er cas</u> : La valeur des actions, S^* , est supérieure au prix d'exercice, E , des bons. Ces derniers sont exercés et les obligations sont intégralement remboursées. Les anciens actionnaires et les titulaires de bons se partagent alors la propriété des actifs de la firme dans la proportion $N/(N+n)$, pour les premiers, et $n/(N+n)$, pour les seconds. On a donc, pour les bons :

$$nW^* + nE = \frac{n}{N+n} (\hat{V}^* + nE - nK) .$$

Soit, après simplification : $nW^* = \frac{n}{N+n} (\hat{V}^* - NE - nK)$.

Il y a donc exercice des bons si $\hat{V}^* > NE + nK$ (colonne III).

Tableau n° 4

Financement par actions et obligations

à bons de souscription ordinaire

Echéance des bons = échéance des obligations

	en t_o	Valeur à l'échéance I $\hat{V}^* < nK$	II $nK < \hat{V}^* < NE+nK$	III $NE+nK < \hat{V}^*$	Expressions en termes d'options
Actions	NS	0	$\hat{V}^* - nK$	$\frac{N}{N+n}(\hat{V}^* + nE - nK)$	$C(\hat{V},\tau,nK) - \frac{n}{N+n} C[\hat{V},\tau,(NE+nK)]$
Obligations	nB	$\hat{V}^*$	nK		$\hat{V} - NS - nW$
Bons	nW	0		$\frac{n}{N+n}(\hat{V}^* - NE - nK)$	$\frac{n}{N+n} C[\hat{V},\tau,(NE+nK)]$

2ème cas : La valeur des actions est inférieure au prix d'exercice des bons et la valeur des actifs de la firme est supérieure au prix de remboursement des obligations (colonne II : $nK < \hat{V}^* < NE + nK$) . Les bons ne sont pas exercés et les obligations sont intégralement remboursées.

3ème cas : La valeur des actifs de la firme est insuffisante pour rembourser en totalité les obligations (colonne I : $\hat{V}^* < nK$) . Il y a défaillance de l'émetteur ; les actions sont alors sans valeur.

Avant leur échéance, la valeur des bons peut ainsi être assimilée à la fraction $n/(N+n)$ d'un CALL européen portant sur l'actif $\hat{V}$ et de prix d'exercice égal à $NE + nK$.

De même, les actions de la firme peuvent s'interpréter comme un portefeuille de CALLS portant sur l'actif $\hat{V}$, tel que :

$$NS = C\ (\hat{V},\tau,nK) - \frac{n}{N+n}\, C\ [\hat{V},\tau,(NE+nK)]\ .$$

2. L'échéance des bons est antérieure à celle des obligations.

Habituellement, les bons de souscription arrivent à échéance avant les obligations avec lesquelles ils sont émis. Soit τ_1 la durée de vie des bons et τ_2 celle des obligations, avec $\tau_1 < \tau_2$. Désignons par τ_3 le laps de temps compris entre l'échéance des bons et celle des obligations, tel que $\tau_3 = \tau_2 - \tau_1$.

Soit $\hat{V}_1$, S_1 , B_1 et W_1 les valeurs respectives de la firme, des actions, des obligations et des bons en t_1 , date d'échéance des bons.

En cas d'exercice des bons et après règlement du prix d'exercice, les titulaires de bons possèdent une fraction, égale à $n/(N+n)$, de l'actif net de la firme. Soit :

$$nW_1 + nE = \frac{n}{N+n}\,(\hat{V}_1 + nE - nB_1)\ .$$

D'où, après simplification :

$$nW_1 = \frac{n}{N+n}\,(\hat{V}_1 - NE - nB_1)\ . \qquad [3]$$

Il y a donc exercice des bons en t_1 si $\hat{V}_1 > NE + nB_1$.

Le **tableau n° 5** ci-après résume la valeur, en t_1 , des titres émis par la firme en fonction de la valeur totale de ses actifs.

Tableau n° 5

	Valeur en t_1	
	$\hat{V}_1 < NE + nB_1$	$NE + nB_1 < \hat{V}_1$
Actions	$NS_1 = \hat{V}_1 - nB_1$	$NS_1 = \frac{N}{N+n} (\hat{V}_1 + nE - nB_1)$
Obligations	nB_1	nB_1
Bons	0	$nW_1 = \frac{n}{N+n} (\hat{V}_1 - NE - nB_1)$

Considérons successivement le cas où les bons sont exercés en t_1, puis celui où ils sont abandonnés par leurs titulaires.

<u>1er cas</u> : Les bons sont exercés en t_1 ($NE + nB_1 < \hat{V}_1$) .

On suppose que les fonds résultant de l'exercice des bons sont immédiatement investis dans des actifs risqués assimilables à ceux de la firme. On désigne alors par $\hat{V}'$ la valeur totale des actifs de la firme avec en t_1, $\hat{V}'_1 = \hat{V}_1 + nE$.

Soit $\hat{V}'_2$ la valeur des actifs de la firme en t_2, date d'échéance des obligations. Le **tableau n° 6** ci-dessous représente la valeur, en t_2, des actions (anciennes et nouvelles) et des obligations en fonction de la valeur de la firme et leur expression en termes d'options à la date t_1 .

Tableau n° 6

	en t_1	Valeur en t_2		Expressions, en t_1, en termes d'options
		$\hat{V}'_2 \leq nK$	$nK < \hat{V}'_2$	
Actions	$(N+n)\ S_1$	0	$\hat{V}'_2 - nK$	$C\ (\hat{V}'_1, \tau_3, nK)$
Obligations	nB_1	$\hat{V}'_2$	nK	$\hat{V}'_1 - C\ (\hat{V}'_1, \tau_3, nK)$

En remplaçant dans [3] nB_1 par sa valeur donnée par le **tableau n° 6** , il vient, après simplification :

$$nW_1 = \frac{n}{N+n} [C(\hat{V}'_1, \tau_3, nK) - E(N+n)] .$$

La condition d'exercice des bons en t_1 peut donc s'écrire également :

$$C(\hat{V}'_1, \tau_3, nK) > E(N+n) .$$

2ème cas : Les bons sont abandonnés en t_1 ($\hat{V}_1 \leq NE + nB_1$ ou $C(\hat{V}'_1, \tau_3, nK) \leq E(N+n)$) . Le **tableau n° 7** ci-dessous donne la valeur, en t_2 , des actions et des obligations en fonction de la valeur de la firme ainsi que leur expression, en t_1 , en termes d'options.

Tableau n° 7

	en t_1	Valeur en t_2		Expressions, en t_1 , en termes d'options
		$\hat{V}_2 \leq nK$	$nK < \hat{V}_2$	
Actions	NS_1	0	$\hat{V}_2 - nK$	$C(\hat{V}_1, \tau_3, nK)$
Obligations	nB_1	$\hat{V}_2$	nK	$\hat{V}_1 - C(\hat{V}_1, \tau_3, nK)$

Le **tableau n° 8** ci-dessous permet de récapituler la valeur des actions anciennes, des obligations et des bons à la date t_1 .

Tableau n° 8

	en t_o	Valeur en t_1	
		$\hat{V}_1 \leq NE + nB_1$ $C(\hat{V}'_1, \tau_3, nK) \leq E(N+n)$	$nB_1 + NE < \hat{V}_1$ $E(N+n) < C(\hat{V}'_1, \tau_3, nK)$
Actions	NS	$C(\hat{V}_1, \tau_3, nK)$	$\frac{N}{N+n} C(\hat{V}'_1, \tau_3, nK)$
Obligations	nB	$\hat{V}_1 - C(\hat{V}_1, \tau_3, nK)$	$\hat{V}'_1 - C(\hat{V}'_1, \tau_3, nK)$
Bons	nW	0	$\frac{n}{N+n}[C(\hat{V}'_1, \tau_3, nK) - E(N+n)]$

Il convient de souligner que la valeur des actions ainsi que celle des obligations en t_1 ne sont pas des fonctions continues de $\hat{V}_1$ au voisinage du point $\hat{V}^*_1$ pour lequel $C(\hat{V}'^*_1, \tau_3, nK) = E(N+n)$. Le cours des actions, comme celui des obligations, sont donc susceptibles d'effectuer un saut en t_1 au voisinage de ce point.

La valeur des bons en t_o peut ainsi être exprimée en termes d'options européennes. Il vient :

$$nW = \frac{n}{N+n} C\,[C\,(\hat{V}',\tau_2,nK),\tau_1,E(N+n)]\ .$$

La valeur des bons est donc égale à la fraction n/(N+n) de celle d'une option composée, en l'occurrence un CALL sur un CALL, exerçable en t_1 et de prix d'exercice égal à E (N+n) . L'actif sous-jacent de l'option composée est un CALL, exerçable en t_2 , de prix d'exercice nK et portant sur le total des actifs de la firme, $\hat{V}'$, tel qu'en t_1 : $\hat{V}'_1 = \hat{V}_1 + nE$.

La valeur des bons peut facilement être calculée par la méthode binomiale. Il suffit de construire, tout d'abord, l'arbre d'évolution de $\hat{V}$ jusqu'en t_1 , puis d'en déduire, à l'aide - par exemple - de la formule de BLACK et SCHOLES, la valeur de C $(\hat{V}'_1,\tau_3,nK)$.

On détermine ensuite la valeur intrinsèque des bons en t_1 , puis, de proche en proche, on calcule, à l'aide de la formule binomiale, la valeur des bons en t_0 .

SECTION IV. EVALUATION DES OBLIGATIONS À BONS DE SOUSCRIPTION REMBOURSABLES.

Nous reprenons les mêmes hypothèses que dans la section précédente, à la seule différence que les bons sont ici remboursables au prix F par bon. On suppose que la valeur de remboursement, K , des obligations est supérieure à celle des bons. Afin de faciliter l'analyse, nous distinguons à nouveau le cas où les bons et les obligations ont la même échéance, puis celui, plus conforme à la réalité, où les bons arrivent à échéance avant les obligations.

1. Les bons et les obligations ont la même échéance.

Comme pour des bons autonomes remboursables, à l'échéance des bons et des obligations, trois cas sont envisageables **(tableau n° 9)** .

<u>1er cas</u> : La valeur intrinsèque des bons est supérieure à leur valeur de remboursement ; les bons sont exercés et les obligations sont intégralement remboursées (colonne V).

Tableau n° 9

Financement par actions et obligations à bons de souscription remboursables

Echéance des bons = échéance des obligations

Valeur en t_o	Valeur à l'échéance				
	I $\hat{V}^* < nF$	II $nF < \hat{V}^* < n(K+F)$	III $n(K+F) < \hat{V}^* < NE+nK$	IV $NE+nK < \hat{V}^* < NE+nK+F(N+n)$	V $NE+nK+F(N+n) < \hat{V}^*$
Actions = NS	0		$\hat{V}^* - nK - nF$		$\frac{N}{N+n}(\hat{V}^* + nE - nK)$
Obligations = nB	0	$\hat{V}^* - nF$	nK		
Bons: CALL	0			$\frac{n}{N+n}(\hat{V}^* - NE - nK)$	
+ PUT/CALL	nF			$n\left[F - \frac{\hat{V}^* - NE - nK}{N+n}\right]$	0
− PUT	$-(nF - \hat{V}^*)$	0			
= nW	$\hat{V}^*$	nF			$\frac{n}{N+n}(\hat{V}^* - NE - nK)$

On suppose que $nF < NE$ d'où $nK + nF < NE + nK$.

2ème cas : La valeur intrinsèque des bons est inférieure à leur valeur de remboursement ; les bons sont remboursés intégralement. La clause de rachat joue aussi bien lorsque la valeur intrinsèque des bons est nulle (colonne II et III) que lorsqu'elle est positive (colonne IV). On suppose ici que le remboursement des bons prime sur celui des obligations : les bons sont remboursés intégralement, même s'il y a défaillance de l'émetteur pour le remboursement des obligations (colonne II).

3ème cas : La valeur intrinsèque des bons est nulle et donc nécessairement inférieure à leur valeur de remboursement, mais la valeur des actifs de la firme ne permet pas de rembourser intégralement les bons. Il y a aussi défaillance de l'émetteur pour le remboursement des bons (colonne I). Dans ce cas, les obligations comme les actions sont sans valeur.

Au total, la valeur des bons est assimilable à celle d'un portefeuille d'options européennes, tel que :

$$nW = \frac{n}{N+n} C[\hat{V},\tau,(NE+nK)] + P\left\{\frac{n}{N+n} C[\hat{V},\tau,(NE+nK)],\tau,nF\right\} - P(\hat{V},\tau,nF) \quad [4]$$

Ce portefeuille résulte :

. d'une position longue sur la fraction n/(N+n) d'un CALL sur la firme de prix d'exercice NE + nK et de durée τ ;

. d'une position longue sur une option composée, en l'occurrence un PUT, de durée τ, de prix d'exercice égal à nF et dont l'actif sous-jacent est la fraction n/(N+n) du CALL précédent ;

. et, enfin, d'une position courte sur un PUT sur la firme, de durée τ et de prix d'exercice égal à nF .

La valeur des actions comme celle des obligations peuvent aussi être exprimées en termes d'options européennes. Il vient :

$$NS = \hat{V} - nK + P[\hat{V},\tau,(nK+nF)] - P(\hat{V},\tau,nF) - nW \quad [5]$$

et $nB = \hat{V} - NS - nW$ où NS et nW sont définis par les expressions [4] et [5] .

2. L'échéance des bons est antérieure à celle des obligations.

En t_1 , à l'échéance des bons, trois cas sont également envisageables **(tableau n° 10)** .

<u>1er cas</u> : La valeur intrinsèque des bons est supérieure à leur valeur de remboursement : les bons sont exercés (colonne IV). $\hat{V}'$ désigne la valeur des actifs de la firme après le règlement du prix d'exercice des bons avec, en t_1 , $\hat{V}'_1 = \hat{V}_1 + nE$. On suppose à nouveau que les fonds recueillis lors de l'exercice des bons sont immédiatement investis dans des actifs identiques à ceux de la firme. La valeur des bons en t_1 est telle que :

$$nW_1 + nE = \frac{n}{N+n} (\hat{V}_1 + nE - nB_1)$$

où nB_1 désigne la valeur des obligations en t_1 . Après simplification, il vient :

$$nW_1 = \frac{n}{N+n} (\hat{V}_1 - nB_1 - NE) . \qquad [6]$$

Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que les bons soient exercés est donc que :

$$\hat{V}_1 > nB_1 + NE . \qquad [7]$$

Les actions anciennes et nouvelles représentent en t_1 une option sur la firme de prix d'exercice nK et de durée de vie égale à τ_3 . Soit :

$$(N+n) S_1 = C (\hat{V}'_1,\tau_3,nK) .$$

La valeur, nB_1 , des obligations en t_1 est telle que :

$$nB_1 = \hat{V}'_1 - C (\hat{V}'_1,\tau_3,nK) .$$

En remplaçant dans [6] nB_1 par sa valeur donnée par l'expression ci-dessus, après simplification, on obtient pour la valeur des bons en t_1 :

$$nW_1 = \frac{n}{N+n} [C (\hat{V}'_1,\tau_3,nK) - E (N+n)]. \qquad [8]$$

En définitive, il y a exercice des bons lorsque leur valeur intrinsèque en t_1 est supérieure à leur valeur de remboursement, soit lorsque $nW_1 > nF$. En remplaçant nW_1 par son

Tableau n° 10

Financement par actions et obligations à bons de souscription remboursables

L'échéance, t_1, des bons est antérieure à celle, t_2, des obligations

Valeur en t_o	Valeur en t_1			
			$nB_1 + NE < \hat{V}_1$	
	I	II	III	IV
	$\hat{V}_1 < nF$	$nF < \hat{V}_1 < nB_1 + NE$	$0 < C(\hat{V}_1', \tau_3, nK) - E(N+n) < F(N+n)$	$F(N+n) < C(\hat{V}_1', \tau_3, nK) - E(N+n)$
Actions = NS	0	$C(\hat{V}_1'', \tau_3, nK)$		$\frac{N}{N+n} C(\hat{V}_1', \tau_3, nK)$
Obligations = nB	0	$\hat{V}_1'' - C(\hat{V}_1'', \tau_3, nK)$		$\hat{V}_1' - C(\hat{V}_1', \tau_3, nK)$
Bons: CALL/CALL	0		$\frac{n}{N+n} [C(\hat{V}_1', \tau_3, nK) - E(N+n)]$	
+ PUT/CALL	nF		$nF - \frac{n}{N+n}[C(\hat{V}_1', \tau_3, nK) - E(N+n)]$	0
− PUT	$-(nF - \hat{V}_1)$	0		
= nW	$\hat{V}_1$	nF		$\frac{n}{N+n} [C(\hat{V}_1', \tau_3, nK) - E(N+n)]$

En t_1, $\hat{V}_1$ devient $\hat{V}_1'$ en cas d'exercice des bons avec $\hat{V}_1' = \hat{V}_1 + nE$

ou $\hat{V}_1''$ en cas de remboursement des bons avec $\hat{V}_1'' = \hat{V}_1 - nF$.

expression donnée par [8] , la condition d'exercice des bons en t_1 s'écrit encore :

$$F\ (N+n) < C\ (\hat{V}'_1, \tau_3, nK) - E\ (N+n)\ .$$

<u>2ème cas</u> : La valeur intrinsèque des bons en t_1 est inférieure à leur valeur de remboursement ; les bons sont remboursés intégralement. La clause de rachat des bons joue à la fois lorsque leur valeur intrinsèque est nulle (colonne II) et lorsqu'elle est positive (colonne III). Dans ce dernier cas, la condition [7] nécessaire à l'exercice des bons est bien satisfaite, mais elle ne suffit pas ici à l'exercice des bons. On a donc, dans ce cas (colonne III) :

$$0 < C\ (\hat{V}'_1, \tau_3, nK) - E\ (N+n) < F\ (N+n)\ .$$

Dès lors que les actifs de la firme sont suffisants pour rembourser les titulaires de bons, les actions et les obligations conservent une valeur non nulle : la valeur des actions est égale à celle d'un CALL de durée de vie τ_3 , de prix d'exercice nK et dont le sous-jacent, $\hat{V}''$, représente les actifs de la firme après remboursement des bons avec, en t_1 , $\hat{V}''_1 = \hat{V}_1 - nF$. La valeur nB_1 des obligations en t_1 est donc telle que :

$$nB_1 = \hat{V}''_1 - C\ (\hat{V}''_1, \tau_3, nK)\ .$$

<u>3ème cas</u> : La valeur des actifs de la firme est insuffisante pour permettre le remboursement intégral des bons : $\hat{V}_1 < nF$. Il y a défaillance de l'émetteur. Les titulaires de bons se partagent les actifs, $\hat{V}_1$, de la firme. Les actions comme les obligations sont alors sans valeur (colonne I).

Au total, la valeur des bons est équivalente à celle d'un portefeuille d'options européennes, tel que :

$$nW = \frac{n}{N+n}\ C\ [C\ (\hat{V}', \tau_2, nK), \tau_1, E(N+n)]$$

$$+ P \left\{ \frac{n}{N+n}\ C\ [C\ (\hat{V}', \tau_2, nK), \tau_1, E(N+n)], \tau_1, nF \right\} - P(\hat{V}, \tau_1, nF) \qquad [9]$$

La relation [9] exprime que ce portefeuille d'options résulte :

. d'une position longue sur la fraction $n/(N+n)$ d'un CALL composé, exerçable en t_1, de prix d'exercice égal à $E(N+n)$ et dont l'actif sous-jacent est lui-même un CALL sur la firme, exerçable en t_2 et de prix d'exercice égal à nK, avec en t_1 $\hat{V}' = \hat{V}_1' = \hat{V}_1 + nE$;

. d'une position longue sur un PUT composé de 3ème degré, exerçable en t_1, de prix d'exercice égal à nF et dont l'actif sous-jacent est lui-même la fraction $n/(N+n)$ du CALL composé précédent ;

. et, enfin, d'une position courte sur un PUT sur la firme exerçable en t_1 et de prix d'exercice égal à nF.

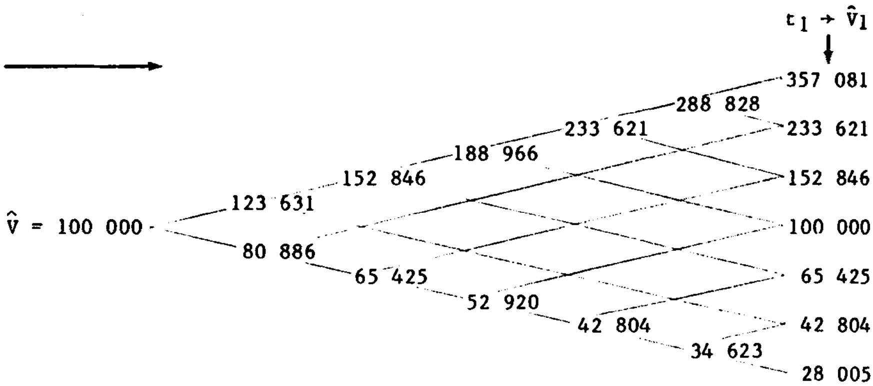
Si cette formulation peut apparaître complexe de prime abord, le calcul de la valeur d'une obligation à bon de souscription remboursable est, en fait, simple à réaliser par la méthode binomiale, comme le montre l'exemple suivant :

Considérons une firme dont la valeur des actifs, $\hat{V}$, est égale à 100 000 F ; la volatilité de ces actifs s'élève à 30 % en base annuelle. La firme est financée par 1 000 actions (NS) et 500 obligations (nB) à bons de souscription (nW) remboursables au prix (F) de 60 F par bon. La durée de vie des bons est de 3 ans ; l'exercice de chacun d'entre eux donne droit à une action contre le paiement d'un prix d'exercice (E) égal à 100 F.

Les obligations sont remboursables au prix (K) de 100 F dans 5 ans. Il s'agit d'obligations zéro coupon qui ne détachent donc pas de coupons pendant toute leur durée de vie. Par ailleurs, il n'est prévu aucun versement de dividende sur un horizon de 5 ans. La structure des taux est plate et égale à 10 % en taux annuel continu. De plus, elle est stable au cours du temps.

Soit à déterminer le prix d'équilibre des actions, des obligations et des bons.

Avec un pas semestriel, l'arbre d'évolution de la valeur des actifs de la firme peut être représenté, jusqu'en t_1, de la façon suivante (5).



Puisqu'il n'est prévu ni coupon ni dividende, on peut ici, pour simplifier la présentation, construire l'arbre jusqu'en t_1 seulement et appliquer, à cette date et pour les différents états de la nature, la formule de BLACK et SCHOLES afin de calculer **(tableau n° 11)** la valeur du CALL $C(\hat{V}_1', \tau_3, nK)$ avec $\hat{V}_1' = \hat{V}_1 + nE = \hat{V}_1 + 500 \times 100$.

Tableau n° 11

$\hat{V}_1$	$\hat{V}_1'$	$C(\hat{V}_1', \tau_3, nK)$	$C(\hat{V}_1', \tau_3, nK) - E(N+n)$		$F(N+n)$
357 081	407 081	366 144	216 144	>	90 000
233 621	283 621	242 684	92 684	>	90 000
152 846	202 846	161 910	11 910	<	90 000
100 000	150 000	109 073	- 40 926	<	90 000
....	....	....	....		....

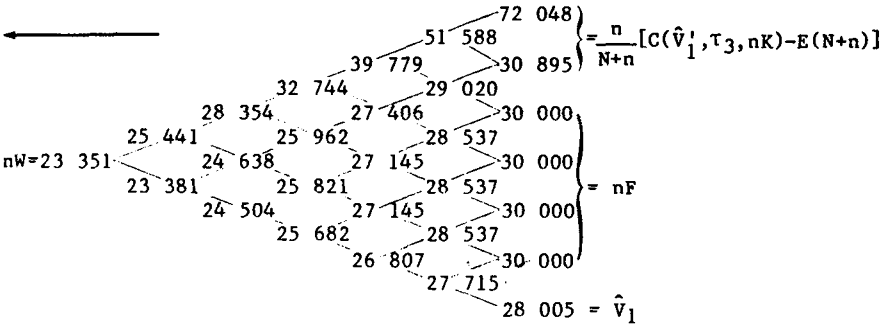
Lorsque $C(\hat{V}_1', \tau_3, nK) - E(N+n) > F(N+n)$, il y a exercice des bons : on en déduit leur valeur d'exercice égale à :

$$[n/(N+n)]\,[C(\hat{V}_1', \tau_3, nK) - E(N+n)].$$

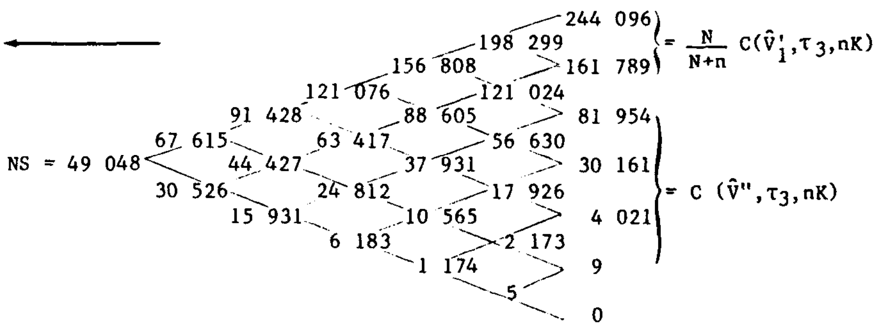
Par ailleurs, si les bons ne sont pas exercés, ils sont remboursés globalement au prix $nF = 30\ 000$ dès lors que la valeur des actifs de la firme est supérieure à ce montant.

En cas de défaillance de l'émetteur, la valeur des bons en t_1 est égale à celle, $\hat{V}_1$, de la firme.

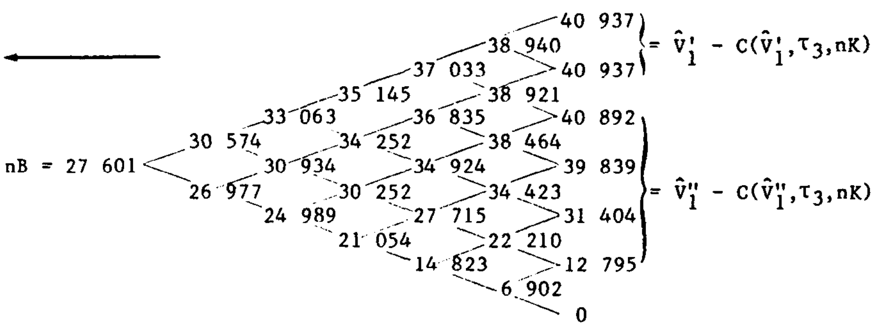
L'arbre d'évolution de la valeur des bons est ensuite construit, de proche en proche, à l'aide de la formule binomiale habituelle. On obtient l'arbre suivant :



On construit de même l'arbre d'évolution de la valeur des actions et celui de la valeur des obligations. Il vient, pour les actions :



... et pour les obligations :



On vérifie bien que $\hat{V}$ = NS + nB + nW = 100 000 F.

Si l'on se situe à l'émission et si le cours des actions, juste avant l'émission, est égal à 49 048 : 1 000 = 49,048 F, il convient d'émettre les obligations avec bons de souscription au prix de 101,904 F par obligation, c'est-à-dire au prix de 27 601 : 500 = 55,202 F pour les obligations zéro coupon et de 23 351 : 500 = 46,702 F pour les bons remboursables. Dans ces conditions, le cours des actions, toutes choses restant égales par ailleurs, n'est pas affecté par l'émission. Compte tenu du risque de défaillance de l'émetteur, le rendement actuariel des obligations zéro coupon s'établit à 11,88 % (6) , soit sensiblement au-dessus du taux sans risque.

SECTION V. EVALUATION EN PRÉSENCE DE DIVIDENDES ET/OU DE COUPONS.

Nous avons admis, jusqu'ici, l'absence de détachement de dividende et/ou de coupon pendant la durée de vie des bons et, le cas échéant, des obligations. Incontestablement, l'existence de dividendes et de coupons complique sensiblement l'évaluation des bons. Considérons la situation la plus complexe où l'émission de bons est associée à celle d'obligations. Il convient, dans ce cas, de distinguer deux phases dans la procédure d'évaluation. La première concerne la période de vie des bons, la seconde celle qui débute à l'échéance des bons et se termine à celle des obligations.

L'existence de distribution de dividendes et de coupons au cours de cette seconde phase de l'évaluation ne perturbe guère la procédure de calcul dans la mesure où le modèle de BLACK et SCHOLES, utilisé pour calculer en t_1 la valeur de différentes options européennes sur la firme, convient également en présence de distributions. Il suffit en effet d'introduire dans le modèle le cours du sous-jacent amputé de la valeur actuelle des distributions. En revanche, la présence de distributions ralentit notablement la première phase de l'évaluation. Si en effet, on admet que les dividendes par actions sont fixes et prédéterminés, les dividendes et/ou les coupons étant prélevés sur les actifs de la firme, le processus d'évolution binomiale de ceux-ci est perturbé et leur arbre d'évolution éclate à chaque date de distribution multipliant le nombre des branches. Certes, la procédure binomiale demeure applicable dans tous les cas de figure, mais le temps de calcul est considérablement accru, surtout lorsque le nombre des distributions est important. Si la durée des calculs est jugée par trop excessive, il devient nécessaire de simplifier la procédure. A cet effet, plusieurs méthodes peuvent être préconisées.

Une première approche consiste à supposer que les dividendes et les coupons sont prélevés, pendant la durée de vie des bons, sur une réserve de trésorerie constituée lors de l'émission et spécialement affectée au règlement de ces distributions. Cette réserve de trésorerie peut, bien sûr, être placée au taux sans risque dans l'attente de son utilisation. L'existence de cette réserve de trésorerie autorise une évolution binomiale classique des autres actifs de la firme, sans explosion multiple de l'arbre, de telle sorte que la procédure de calcul demeure aussi rapide qu'en l'absence de distribution, même si l'on admet - par analogie avec les CALLS américains - qu'il peut parfois être avantageux au titulaire d'un bon d'exercer celui-ci avant son échéance limite, à la fin d'un exercice comptable, soit juste avant que les actions obtenues par exercice du bon perdent leur droit au prochain dividende.

Une seconde solution, celle de SCHRODER (1988), peut également être envisagée. Cette méthode approchée, dont nous nous sommes inspirés dans la première section, a été spécialement conçue par son auteur pour résoudre le problème de l'évaluation d'une option en présence d'un ou plusieurs dividendes de montant fixe et prédéterminé. Son application consiste ici à construire l'arbre d'évolution de la valeur de la firme en négligeant les distributions réalisées. L'arbre d'évolution de la valeur des options sur la firme est ensuite construit, pas à pas, en prenant soin, à chaque date de distribution de dividendes et/ou de coupons, de corriger les valeurs obtenues par calcul en retranchant le montant distribué multiplié par le coefficient delta des options.

L'évaluation d'une option composée par la méthode de SCHRODER est possible, mais sensiblement plus délicate dans la mesure où elle implique une double correction, celle de l'option sur la firme d'abord, puis celle de l'option sur l'option précédente ensuite. En tout état de cause, lorsqu'un bon est équivalent à un portefeuille d'options - simples ou composées - sur la firme, la mise en oeuvre de la méthode de SCHRODER implique l'évaluation séparée de chaque option.

CONCLUSION

Nous avons montré, dans cet article, que la valeur d'un bon de souscription d'actions peut toujours être exprimée en termes d'options sur la firme émettrice, mais avec un degré de complexité variable selon la nature de l'émission. Partant de l'analyse de BLACK et SCHOLES selon laquelle un bon autonome ordinaire constitue un CALL simple sur la firme, nous avons montré que, de la destination des fonds recueillis lors de l'émission des bons, dépend, d'une part, le prix d'exercice de l'option et, d'autre part, la stabilité de la volatilité des actifs de la firme. Poursuivant par l'analyse de bons plus complexes, nous avons ensuite démontré que la valeur de bons autonomes remboursables ainsi que celle de bons ordinaires, mais émis en même temps que des obligations, peuvent être exprimées en termes d'options sur options ou, en d'autres termes, d'options composées de deuxième degré. Par ailleurs, nous avons montré que des bons remboursables, dont l'émission est associée à celle d'obligations classiques, sont assimilables à un portefeuille d'options complexes incluant des options composées de deuxième (options sur options) et de troisième degré (options sur options sur options). Enfin, plusieurs propositions ont été faites permettant, pour les unes, de simplifier la procédure de calcul de la valeur des bons et, pour les autres, de traiter le problème posé par le détachement de dividendes et/ou de coupons.

NOTES

(1) Les actions nouvelles obtenues par exercice de bons de souscription donnent droit aux dividendes versés au titre de l'exercice comptable au cours duquel elles ont été souscrites. Elles ne sont donc assimilables aux actions anciennes que dans la mesure où elles sont "pleine jouissance" et, par conséquent, donnent droit au prochain dividende. Dans le cas contraire, elles ne sont assimilables aux actions anciennes qu'après le détachement du prochain dividende annuel.

(2) A chaque étape du processus binomial défini par COX, ROSS et RUBINSTEIN (1979), la valeur de la firme est affectée par un coefficient multiplicatif u , à la hausse, et d , à la baisse, tels que $u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$ et $d = 1/u$, la durée de vie de l'option étant divisée en n périodes. Dans l'exemple, u = 1,08507 et d = 0,92159.

(3) Si C désigne la valeur d'une option en début de période et C_u et C_d les valeurs possibles de l'option en fin de période, on démontre que $C = \hat{r}^{-1}\,[p\ C_u + (1-p)\ C_d]$ avec $\hat{r} = e^{r\frac{T}{n}}$ et $p = \frac{\hat{r}-d}{u-d}$.
Connaissant la valeur intrinsèque de l'option à l'échéance, on obtient, de proche en proche, la valeur de l'option à la date présente. Dans l'exemple, $\hat{r}$ = 1,0168 et p = 0,58240 . On trouvera une description détaillée de la formule binomiale dans "Finance : options et obligations convertibles" (1987).

(4) Comme dans le cas d'une option, le raisonnement d'arbitrage conduit, pour un bon, à la formule d'évaluation suivante : $W = \hat{r}^{-1}\,[p\ W_u + (1-p)\ W_d]$ où W désigne la valeur du bon en début de période et où W_u et W_d désignent les valeurs possibles du bon en fin de période.

(5) Les caractéristiques du processus binomial sont, ici, les suivantes :

u = 1,23631 ; d = 0,80886 , $\hat{r}$ = 1,05127 et p = 0,56711 .

(6) $27\ 601 = 50\ 000\ e^{-5R} \Leftrightarrow R = 11{,}88\ \%$, R désignant le taux actuariel des obligations zéro coupon exprimé en taux annuel continu.

REFERENCES

J.C. AUGROS. "Finance : options et obligations convertibles". 2ème édition. Economica, 1987.

F. BLACK et M. SCHOLES. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, Mai/Juin 1973, p. 637-654.

G. CONSTANTINIDES et R. ROSENTHAL. "Strategic Analysis of the Competitive Exercice of Certain Financial Options", Journal of Economic Theory, 32, Février 1984, p. 128-138.

J.C. COX, S.A. ROSS et M. RUBINSTEIN. "Option Pricing : A Simplified Approach", Journal of Financial Economics, 7, Septembre 1979, p. 229-263.

J.C. COX et M. RUBINSTEIN. "Options Markets". Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.

M. CROUHY et D. GALAI. "Warrant Valuation : A Binomial Approach". 1er Colloque International AFIR, Paris, 23-27 Avril 1990.

D.C. EMANUEL. "Warrant Valuation and Exercice Strategy", Journal of Financial Economics, 12, 1983, p. 211-235.

D. GALAI et M.I. SCHNELLER. "Pricing of Warrants and the Value of the Firm", Journal of Finance, Décembre 1978, p. 1 333-1 342.

M. SCHRODER. "Adapting the Binomial Model to Value Options on Assets with Fixed-Cash Payouts", Financial Analysts Journal, Novembre/Décembre 1988, p. 54-62.

C. SPATT et F.P. STERBENZ. "Warrant Exercice, Dividends and Reinvestment Policy", Journal of Finance, Juin 1988, p. 493-506.